فصل ۱ – الگو و دنباله

بارم‌بندی فصل ۱
دی : ۵ نمره
خرداد : ۱ نمره
شهریور : ۲ نمره

مفهوم دنباله عددی : به دسته‌ای از اعداد که با ترتیب خاصی در کنار هم قرار می‌گیرند، دنباله عددی می‌گویند.

به عنوان مثال به دنباله‌های عددی زیر دقت کنید :

دنباله نامحدود اعداد اول	... و ۱۱ و ۷ و ۵ و ۳ و ۲	دنباله محدود	۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱
دنباله نامحدود اعداد زوج	... و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲	دنباله نامحدود اعداد فرد	... و ۹ و ۷ و ۵ و ۳ و ۱

به هر عدد از دنباله عددی، یک جمله از دنباله می‌گویند. همچنین به جمله nاُم یک دنباله جمله عمومی آن دنباله گفته و با a_n یا t_n و یا u_n نشان می‌دهند که در آن n شماره جمله بوده و یک عدد طبیعی می‌باشد.

مثال ۱ : ابتدا سه جمله بعدی دنباله ... و ۲۷ و ۹ و ۳ و ۱ را بیابید. سپس جمله nاُم آن را بنویسید.

حل : با کمی دقت در دنباله داده شده می‌توان فهمید که هر جمله از حاصل ضرب عدد ۳ در جمله قبلی به دست می‌آید. پس سه جمله بعدی دنباله عبارتند از : ۸۱ و ۲۴۳ و ۷۲۹ .
همچنین با کمی دقت می‌توان گفت جمله عمومی دنباله $a_n = ۳^{n-۱}$ می‌باشد که در آن n یک عدد طبیعی می‌باشد.

مثال ۲ : ابتدا سه جمله بعدی دنباله $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۴}$ و ۱ و ... را بیابید. سپس جمله nاُم آن را بنویسید.

حل : ابتدا مخرج تمام جملات را یکسان می‌کنیم : $\frac{۱}{۴}$ و $\frac{۲}{۴}$ و $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۴}$ و ...
حالا به سادگی می‌توان سه جمله بعدی دنباله را مشخص نمود که عبارتند از : $\frac{۵}{۴}$ و $\frac{۶}{۲}$ و $\frac{۷}{۴}$ و ...

مثال ۳ : اگر جمله nاُم دنباله‌ای $a_n = ۵n + ۱$ باشد، جدول عددی آن را تشکیل دهید.

حل : جدول عددی، جدولی شامل دو سطر است که در سطر اول، شماره جمله و در سطر دوم عدد متناظر با آن جمله نوشته می‌شود. بنابراین جدول متناظر با جمله عمومی فوق به صورت مقابل است :

n	۱	۲	۳	۴	...
a_n	۶	۱۱	۱۶	۲۱	...

مثال ۴ : جمله عمومی یک دنباله به صورت $u_n = \frac{۲n}{n+۱}$ می‌باشد.

الف) سه جمله اول آن را بیابید.

ب) کدام جمله دنباله برابر با $\frac{۲۱}{۱۱}$ می‌شود؟

حل الف)

$$u_n = \frac{۲n}{n+۱} \to \begin{cases} n = ۱ \to u_۱ = \frac{۲\times۱}{۱+۱} = \frac{۲}{۲} = ۱ \\ n = ۲ \to u_۲ = \frac{۲\times۲}{۲+۱} = \frac{۴}{۳} \\ n = ۳ \to u_۳ = \frac{۲\times۳}{۳+۱} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

حل ب) در این جا به جای u_n عدد $\frac{۲۱}{۱۱}$ را قرار می‌دهیم :

$$\frac{۲۱}{۱۱} = \frac{۲n}{n+۱} \Rightarrow ۲۱n + ۲۱ = ۲۲n \Rightarrow n = ۲۱$$

دنباله حسابی : دنباله‌ای است که در آن هر جمله از اضافه شدن یک مقدار ثابت به جمله قبلی به دست می‌آید. به این مقدار ثابت قدر نسبت گفته و آن را با d نشان می‌دهند.

$$a_۱ \xrightarrow{+d} a_۲ \xrightarrow{+d} a_۳ \ \text{و} \ \dots \quad \to \quad a_۱ \ \text{و} \ \underbrace{a_۱ + d}_{a_۲} \ \text{و} \ \underbrace{a_۱ + ۲d}_{a_۳} \ \text{و} \ \dots$$

نکته : در دنباله حسابی قدر نسبت از تفاضل هر جمله از جمله قبل به دست می‌آید.

مثال ۵ : قدر نسبت دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

الف) ... و ۶ و ۴ و ۲ **ب)** ... و ۱۱ و ۸ و ۵ ج) ... و $\frac{۸}{۳}$ و $\frac{۷}{۳}$ و ۲

حل الف) $d = ۴ - ۲ = ۲$ **حل ب)** $d = ۸ - ۵ = ۳$ **حل ج)** $d = \frac{۷}{۳} - ۲ = \frac{۱}{۳}$

نکته : در دنباله حسابی، اگر $a_۱$ جمله اول، d قدر نسبت و n شماره جملات باشد، جمله عمومی یا جمله nاُم از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\boxed{a_n = a_۱ + (n - ۱)d}$$

مثال ۶ : جمله عمومی هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

الف) ... و ۱۱ و ۷ و ۳ **ب)** ... و ۸ و ۳ و ۲− ج) ... و ۲ و ۵ و ۸

حل الف) $\begin{cases} a_۱ = ۳ \\ d = ۷ - ۳ = ۴ \end{cases} \rightarrow a_n = a_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow a_n = ۳ + (n - ۱)۴ \Rightarrow a_n = ۴n - ۱$

حل ب) $\begin{cases} a_۱ = -۲ \\ d = ۸ - ۳ = ۵ \end{cases} \rightarrow a_n = a_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow a_n = -۲ + (n - ۱)۵ \Rightarrow a_n = ۵n - ۷$

حل ج) $\begin{cases} a_۱ = ۸ \\ d = ۵ - ۸ = -۳ \end{cases} \rightarrow a_n = a_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow a_n = ۸ + (n - ۱) - ۳ \Rightarrow a_n = -۳n + ۱۱$

مثال ۷ : جمله پانزدهم از دنباله حسابی ... و ۶ و ۲ و ۲− را بیابید.

$\begin{cases} a_۱ = -۲ \\ d = ۶ - ۲ = ۴ \end{cases} \rightarrow a_n = a_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow a_{۱۵} = -۲ + (۱۵ - ۱)۴ \Rightarrow a_{۱۵} = -۲ + (۱۴ \times ۴) = ۵۴$

مثال ۸ : جمله دهم از یک دنباله حسابی با جمله اول ۷ و قدر نسبت ۳ را بیابید.

حل : $\begin{cases} a_۱ = ۷ \\ d = ۳ \end{cases} \rightarrow a_n = a_۱ + (n - ۱)d \Rightarrow a_{۱۰} = ۷ + (۱۰ - ۱)۳ \Rightarrow a_{۱۵} = ۷ + (۱۴ \times ۴) = ۳۴$

نکته : اگر a_n و a_m دو جمله دلخواه از یک دنباله حسابی باشند، قدر نسبت دنباله از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\boxed{d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \quad , \quad a_m > a_n}$$

مثال ۹ : اگر در یک دنباله حسابی، جمله سوم برابر با ۱۱ و جمله نهم برابر با ۳۵ باشد، قدر نسبت دنباله را بیابید.

حل : روش اول - راه حل تشریحی :

$a_n = a_۱ + (n - ۱)d \rightarrow \begin{cases} a_۳ = ۱۱ \\ a_۹ = ۳۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۱۱ = a_۱ + ۲d \\ ۳۵ = a_۱ + ۸d \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}} ۲۴ = ۶d \Rightarrow d = ۴$

روش دوم - با استفاده از نکته فوق :

$\begin{cases} a_۳ = ۱۱ \\ a_۹ = ۳۵ \end{cases} \rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{۳۵ - ۱۱}{۹ - ۳} = ۴$

نکته : اگر a و b و c سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، b را واسطه حسابی بین a و c می‌نامند و رابطه بین آن‌ها به صورت زیر می‌باشد :

$$\boxed{b = \frac{a+c}{۲}}$$

مثال ۱۰ : اگر ۱۱ و x و ۵ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، مقدار x را بیابید.

$$b = \frac{a+c}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵+۱۱}{۲} = ۸$$

مثال ۱۱ : اگر $۲m$ و $m+۱$ و $m-۱$ تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، مقدار m را بیابید.

$$b = \frac{a+c}{۲} \Rightarrow m+۱ = \frac{m-۱+۲m}{۲} \Rightarrow ۲m+۲ = ۳m-۱ \Rightarrow m = ۳$$

مثال ۱۲ : بین دو عدد ۷ و ۳۷ سه عدد قرار داده‌ایم به طوری که با این دو عدد یک دنباله حسابی تشکیل دهند. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

حل :

$$\underbrace{۷}_{a_۱} \text{ و } \underbrace{\square \text{ و } \square \text{ و } \square}_{\text{۳ واسطه حسابی}} \text{ و } \underbrace{۲۳}_{a_۵} \longrightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d \rightarrow \begin{cases} a_۱ = ۷ \\ a_۵ = ۲۳ \end{cases}$$

$$۲۳ = ۷ + ۴d \Rightarrow ۴d = ۱۶ \Rightarrow d = ۴$$

مثال ۱۳ : بین دو عدد ۱۲- و ۵۲ سه واسطه حسابی وجود دارد. مجموع واسطه ها را بیابید.

حل :

$$\underbrace{-۱۲}_{a_۱} \text{ و } \underbrace{\square \text{ و } \square \text{ و } \square}_{\text{۳ واسطه حسابی}} \text{ و } \underbrace{۵۲}_{a_۵} \longrightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d \rightarrow \begin{cases} a_۱ = -۱۲ \\ a_۵ = ۵۲ \end{cases}$$

$$۵۲ = -۱۲ + ۴d \Rightarrow ۴d = ۶۴ \Rightarrow d = ۱۶$$

$$-۱۲ \text{ و } \boxed{۴} \text{ و } \boxed{۲۰} \text{ و } \boxed{۳۶} \text{ و } ۵۲ \quad (+۱۶,\ +۱۶,\ +۱۶,\ +۱۶) \xrightarrow{\text{مجموع واسطه‌ها}} a_۲ + a_۳ + a_۴ = ۴ + ۲۰ + ۳۶ = ۶۰$$

دنباله هندسی : دنباله‌ای است که در آن هر جمله از ضرب شدن یک مقدار ثابت در جمله قبل به دست می‌آید. به این مقدار ثابت، قدر نسبت گفته و آن را با q نشان می‌دهند.

$$a_۱ \text{ و } a_۲ \text{ و } a_۳ \text{ و } \dots \ (\times q,\ \times q) \rightarrow a_۱ \text{ و } \underbrace{a_۱ \times q}_{a_۲} \text{ و } \underbrace{a_۱ \times q^۲}_{a_۳} \text{ و } \dots$$

نکته : در دنباله هندسی، قدر نسبت از تقسیم هر جمله بر جمله قبل از آن به دست می‌آید.

مثال ۱۴ : قدر نسبت دنباله‌های هندسی زیر را بیابید.

الف) ... و ۸ و ۴ و ۲ **ب)** ... و ۳ و ۹ و ۲۷ ج) ... و ۱۲ و ۶− و ۳

حل الف) $q = \frac{۴}{۲} = ۲$ **حل ب)** $q = \frac{۹}{۲۷} = \frac{۱}{۳}$ **حل ج)** $q = \frac{-۶}{۳} = -۲$

نکته : در دنباله هندسی، اگر $a_۱$ جمله اول، q قدر نسبت و n شماره جملات باشد، جمله عمومی یا جمله nاُم از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\boxed{a_n = a_۱ q^{n-۱}}$$

مثال ۱۵ : جمله عمومی هر یک از دنباله‌های هندسی زیر را بیابید.

الف) ... و ۵۰ و ۱۰ و ۲   **ب)** ... و $\frac{۱}{۲}$ و ۱ و ۲   ج) ... و ۱۲ و ۶− و ۳

حل الف)
$$\begin{cases} a_۱ = ۲ \\ d = \frac{۱۰}{۲} = ۵ \end{cases} \to a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۲ \times ۵^{n-۱}$$

حل ب)
$$\begin{cases} a_۱ = ۲ \\ d = \frac{۱}{۲} \end{cases} \to a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۲ \times (\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

حل ج)
$$\begin{cases} a_۱ = ۳ \\ d = \frac{-۶}{۳} = -۲ \end{cases} \to a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۳ \times (-۲)^{n-۱}$$

مثال ۱۶ : جمله پنجم از دنباله هندسی ... و ۱۸ − و ۶ و ۲− را بیابید.

حل :
$$\begin{cases} a_۱ = -۲ \\ d = \frac{۶}{-۲} = -۳ \end{cases} \to a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow a_۵ = -۲ \times -۳^{۵-۱} \Rightarrow a_۸ = -۲ \times -۸۱ = ۱۶۲$$

مثال ۱۷ : جمله هشتم از یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{۱}{۱۶}$ و قدر نسبت ۳ را بیابید.

حل :
$$\begin{cases} a_۱ = \frac{۱}{۱۶} \\ d = ۲ \end{cases} \to a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow a_۸ = \frac{۱}{۱۶} \times ۲^{۸-۱} \Rightarrow a_۸ = \frac{۱}{۱۶} \times ۱۲۸ = ۸$$

نکته : اگر a_n و a_m دو جمله دلخواه از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\boxed{q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \quad , \quad a_m > a_n}$$

مثال ۱۸ : اگر در یک دنباله هندسی، جمله سوم برابر با ۳ و جمله ششم برابر با $\frac{۸۱}{۸}$ باشد، جمله اول دنباله را بیابید.

حل : روش اول - راه حل تشریحی :

$$a_n = a_۱q^{n-۱} \to \begin{cases} a_۳ = ۳ \\ a_۶ = \frac{۸۱}{۸} \end{cases} \to \begin{cases} ۳ = a_۱q^{۳-۱} \\ \frac{۸۱}{۸} = a_۱q^{۶-۱} \end{cases} \xrightarrow{\text{بر هم تقسیم می کنیم}} \frac{\frac{۸۱}{۸}}{۳} = \frac{a_۱q^۵}{a_۱q^۲} \Rightarrow q^۳ = \frac{۲۷}{۸} \Rightarrow q = \sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۸}} = \frac{۳}{۲}$$

$$a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow ۳ = a_۱ \times (\frac{۳}{۲})^{۳-۱} \Rightarrow ۳ = a_۱ \times \frac{۹}{۴} \Rightarrow a_۱ = \frac{۴}{۳}$$

روش دوم - با استفاده از نکته فوق :

$$q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow q^{۶-۳} = \frac{\frac{۸۱}{۸}}{۳} \Rightarrow q^۳ = \frac{۲۷}{۸} \Rightarrow q = \sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۸}} = \frac{۳}{۲}$$

$$a_n = a_۱q^{n-۱} \Rightarrow ۳ = a_۱ \times (\frac{۳}{۲})^{۳-۱} \Rightarrow ۳ = a_۱ \times \frac{۹}{۴} \Rightarrow a_۱ = \frac{۴}{۳}$$

نکته : اگر a و b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، b را واسطه هندسی بین a و c می‌نامند و رابطه بین آن‌ها به صورت زیر می‌باشد :

$$\boxed{b^۲ = a.c}$$

مثال ۱۹ : واسطه هندسی بین ۴ و ۱۶ را بیابید.

$$b^۲ = a.c \Rightarrow b^۲ = ۴ \times ۱۶ = ۶۴ \Rightarrow b = \pm ۸$$

مثال ۲۰ : اگر جملات $\sqrt{۲}+۱$ و m و $\sqrt{۲}-۱$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، مقدار m را بیابید.

$$b^۲ = a.c \Rightarrow m^۲ = (\sqrt{۲}-۱)\times(\sqrt{۲}-۱) \Rightarrow m^۲ = ۲-۱ = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

مثال ۲۱ : بین دو عدد ۶ و ۴۸۶ تعدادی واسطه هندسی با قدر نسبت ۳ درج شده است. مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟

۶ و $\boxed{۱۸}$ و $\boxed{۵۴}$ و $\boxed{۱۶۲}$ و ۴۸۶ ($\times ۳$، $\times ۳$، $\times ۳$، $\times ۳$) $\xrightarrow{\text{مجموع واسطه‌ها}}$ $a_۲ + a_۳ + a_۴ = ۱۸ + ۵۴ + ۱۶۲ = ۲۳۴$

مثال ۲۲ : بین دو عدد $\frac{۱}{۳}$ و ۲۷ سه واسطه هندسی درج شده است. مجموع این واسطه‌ها را بیابید.

$\underbrace{\frac{۱}{۳}}_{a_۱}$ و $\underbrace{\boxed{\ \ } \text{ و } \boxed{\ \ } \text{ و } \boxed{\ \ }}_{\text{۳ واسطه هندسی}}$ و $\underbrace{۲۷}_{a_۵}$ $\longrightarrow a_n = a_۱ q^{n-۱} \Rightarrow ۲۷ = \frac{۱}{۳}\times q^{۵-۱} \Rightarrow q^۴ = ۸۱ \Rightarrow q = \sqrt[۴]{۸۱} = \pm ۳$

$$\begin{cases} \text{if} : q = +۳ \ \rightarrow \ \frac{۱}{۳} \text{ و } ۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۹ \text{ و } ۲۷ \xrightarrow{\text{مجموع واسطه ها}} a_۲ + a_۳ + a_۴ = ۱ + ۳ + ۹ = ۱۳ \\ \text{if} : q = -۳ \ \rightarrow \ \frac{۱}{۳} \text{ و } -۱ \text{ و } +۳ \text{ و } -۹ \text{ و } ۲۷ \xrightarrow{\text{مجموع واسطه ها}} a_۲ + a_۳ + a_۴ = (-۱) + ۳ + (-۹) = -۷ \end{cases}$$

نزدیک شدن جملات دنباله به یک عدد :

در برخی از دنباله‌ها، جملات دنباله به عدد معینی نزدیک و نزدیکتر می‌شوند.

به عنوان مثال با کمی دقت می‌توان گفت جملات دنباله های زیر به عدد ۱/۲ نزدیک می‌شوند :

۱/۲۱ و ۱/۲۰۱ و ۱/۲۰۰۱ و ۱/۲۰۰۱ و ... ‏ ‏ ‏ ‏ ۱/۱۹ و ۱/۱۹۹ و ۱/۱۹۹۹ و ...

نکته : اگر تفاضل جملات دنباله‌ای از یک عدد معین به صفر نزدیک شوند، می‌گوییم جملات دنباله به آن عدد معین نزدیک می‌شوند.

مثال ۲۳ : نشان دهید جملات دنباله ... و ۰/۳۳۳ و ۰/۳۳ و ۰/۳ به عدد $\frac{۱}{۳}$ نزدیک می‌شوند.

حل : ابتدا تفاضل جملات دنباله را از عدد $\frac{۱}{۳}$ حساب می‌کنیم :

$$\frac{۱}{۳} - ۰/۳ = \frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۱}{۳۰} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۳} - ۰/۳۳ = \frac{۱}{۳} - \frac{۳۳}{۱۰۰} = \frac{۱}{۳۰۰} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۳} - ۰/۳۳۳ = \frac{۱}{۳} - \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۳۰۰۰} \quad \text{و} \ ...$$

حال دنباله تفاضل را تشکیل می‌دهیم :

$$\frac{۱}{۳۰} \text{ و } \frac{۱}{۳۰۰} \text{ و } \frac{۱}{۳۰۰۰} \text{ و } ...$$

مشاهده می‌شود که جملات دنباله تفاضل به صفر نزدیک می‌شوند. پس جملات خود دنباله به عدد $\frac{۱}{۳}$ نزدیک می‌شوند.

مثال ۲۴ : با تقسیم ۱ بر ۹ خارج قسمت های به دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود؟ چرا؟

حل : ابتدا دنباله حاصل از تقسیم ۱ بر ۹ را می‌نویسیم : ... و ۰/۱۱۱ و ۰/۱۱ و ۰/۱ $\xrightarrow{\text{دنباله}}$ $\frac{۱}{۹} = ۰/۱۱۱\ ...$

سپس تفاضل جملات دنباله را از عدد $\frac{۱}{۹}$ حساب می‌کنیم :

$$\frac{۱}{۹} - ۰/۱ = \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۹۰} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۹} - ۰/۱۱ = \frac{۱}{۹} - \frac{۱۱}{۱۰۰} = \frac{۱}{۹۰۰} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۹} - ۰/۱۱۱ = \frac{۱}{۹} - \frac{۱۱۱}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۹۰۰۰} \quad \text{و} \ ...$$

حال دنباله تفاضل را تشکیل می‌دهیم : ... و $\frac{۱}{۹۰۰۰}$ و $\frac{۱}{۹۰۰}$ و $\frac{۱}{۹۰}$

مشاهده می‌شود که جملات دنباله تفاضل به صفر نزدیک می‌شوند. پس جملات خود دنباله به عدد $\frac{۱}{۹}$ نزدیک می‌شوند.

مثال ۲۵ : دنباله ... و ۲/۱۹۹۹ و ۲/۱۹۹ و ۲/۱۹ به چه عددی نزدیک می‌شود؟ با تشکیل دنباله تفاضل حدس خود را بیازمایید.

حل : این دنباله به عدد ۲/۲ نزدیک می‌شود. ابتدا تفاضل جملات دنباله را از عدد ۲/۲ حساب می‌کنیم :

$$۲/۲ - ۲/۱۹ = ۰/۰۱ \quad \text{و} \quad ۲/۲ - ۲/۱۹۹ = ۰/۰۰۱ \quad \text{و} \quad ۲/۲ - ۲/۱۹۹۹ = ۰/۰۰۱ \quad \text{و} \ ...$$

حال دنباله تفاضل را تشکیل می‌دهیم : ... و ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۱ و ۰/۰۱

مشاهده می‌شود که جملات دنباله تفاضل به صفر نزدیک می‌شوند. پس حدس درست بوده جملات دنباله به عدد $\frac{۱}{۳}$ نزدیک می‌شوند.

مثال ۲۶ : الگویی برای دنباله ... و $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۳}$ بیابید و جمله nاُم آن را بنویسید. آیا این دنباله به عدد خاصی نزدیک می‌شود؟ چرا؟

حل : با کمی دقت مشاهده می‌شود در هر مرحله یک واحد به صورت و یک واحد به مخرج اضافه می‌شود و همچنین اختلاف صورت و مخرج هر کسر یک واحد است. پس جمله عمومی دنباله به صورت $\frac{n+۱}{n+۲}$ می‌باشد. از طرفی دنباله به عدد ۱ نزدیک می‌شود زیرا تفاضل جملات دنباله از عدد ۱ به صفر نزدیک می‌شود :

$$۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳} \quad \text{و} \quad ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴} \quad \text{و} \quad ۱ - \frac{۴}{۵} = \frac{۱}{۵} \quad \text{و} \ ...$$

نکته : جملات یک دنباله ثابت مانند ... و a و a و a به همان مقدار ثابت دنباله نزدیک می‌شوند. در این حالت خاص، جملات دنباله دقیقا برابر همان عددی هستند که به آن نزدیک می‌شوند. به عنوان مثال به دنباله ... و ۲ و ۲ و ۲ دقت کنید.

مثال ۲۷ : در چه حالتی جملات یک دنباله حسابی به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ در یک دنباله هندسی چطور؟

حل : در دنباله حسابی اگر جملات دنباله افزایش یا کاهش یابند، نمی‌توانند به عدد خاصی نزدیک شوند ولی اگر قدر نسبت دنباله عدد صفر باشد، جملات دنباله با هم برابر شده و می‌توان گفت به همان جمله اول دنباله نزدیک می‌شوند.

در دنباله هندسی اگر قدر مطلق قدر نسبت دنباله کوچکتر از یک باشد (یعنی $|q| < ۱$ و یا $-۱ < q < ۱$) جملات دنباله مرتبا کوچک و کوچکتر شده و به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

دنباله تقریبات اعشاری یک عدد :

برای هر عدد حقیقی مثبت مانند x می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به x نزدیک می‌شوند. این دنباله را دنباله تقریبات اعشاری x می‌نامند و جمله nاُم آن را تقریب اعشاری x با n رقم اعشار می‌نامند.

جمله nاُم دنباله تقریبات اعشاری x ، یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و هر جمله آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله قبل به دست می‌آید.

مثال ۲۸ : دنباله تقریبات اعشاری اعداد $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱۱}{۶}$ را به دست آورید.

$$\frac{۲}{۳} = ۰/۶۶۶\ldots \xrightarrow{\text{دنباله تقریبات اعشاری}} ۰/۶ \quad و \quad ۰/۶۶ \quad و \quad ۰/۶۶۶ \quad و \quad \ldots$$

$$\frac{۱۱}{۶} = ۱/۸۳۳۳\ldots \xrightarrow{\text{دنباله تقریبات اعشاری}} ۱/۸ \quad و \quad ۱/۸۳ \quad و \quad ۱/۸۳۳ \quad و \quad \ldots$$

تذکر : از آن جایی که جمله nاُم دنباله تقریبات اعشاری عدد x ، شامل n رقم اعشار است، بنابراین جمله اول دنباله تقریبات اعشاری عدد x نیز باید شامل یک رقم اعشار باشد.

به عنوان مثال در نوشتن دنباله تقریبات اعشاری عدد $\frac{۱۱}{۶}$ (قسمت دوم از مثال فوق) نمی‌توان جمله اول را عدد ۱ در نظر گرفت.

مثال ۲۹ : اگر x عددی باشد که در نا معادلات $۲x + ۱ < ۸/۱۳۱۶$ و $۴ - x < ۰/۴۳۴۳$ صدق کند، چهار جمله اول دنباله تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

حل :

$$\begin{cases} ۲x + ۱ < ۸/۱۳۱۶ \Rightarrow x < \frac{۸/۱۳۱۶ - ۱}{۲} \Rightarrow x < ۳/۵۶۵۸ \\ ۴ - x < ۰/۴۳۴۳ \Rightarrow x > ۴ - ۰/۴۳۴۳ \Rightarrow x > ۳/۵۶۵۷ \end{cases} \rightarrow ۳/۵۶۵۷ < x < ۳/۵۶۵۸$$

$$\xrightarrow{\text{۴ جمله اول دنباله}} ۳/۵ \quad و \quad ۳/۵۶ \quad و \quad ۳/۵۶۵ \quad و \quad ۳/۵۶۵۷$$

در مثال فوق فقط ۴ جمله از دنباله را می‌توان با قاطعیت بیان کرد.

مثال ۳۰ : با استفاده از ماشین حساب دنباله تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۲}$ را تا ۴ رقم اعشار بنویسید. آیا بدون ماشین حساب می‌توان دنباله تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۸}$ را نیز نوشت؟

حل :

$$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱۴۲ \xrightarrow{\text{دنباله تقریبات اعشاری } \sqrt{۲}} ۱/۴ \text{ و } ۱/۴۱ \text{ و } ۱/۴۱۴ \text{ و } ۱/۴۱۴۲ \text{ و } \ldots$$

از آن جایی که $\sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$ پس کافی است عناصر دنباله تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۲}$ در عدد ۲ ضرب کنیم :

$$\sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲} \simeq ۲/۸۲۸۴ \xrightarrow{\text{دنباله تقریبات اعشاری } \sqrt{۸}} ۲/۸ \text{ و } ۲/۸۲ \text{ و } ۲/۸۲۸ \text{ و } ۲/۸۲۸۴ \text{ و } \ldots$$

مثال ۳۱ : اگر در دنباله تقریبات اعشاری عدد $\sqrt{۲}$ ، جمله پنجم برابر ۱/۴۱۴۲۱ باشد، دنباله تقریبات اعشاری عدد $۱۰\sqrt{۲}$ را تا چند رقم اعشار می‌توان نوشت؟

حل :

$$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱۴۲۱ \Rightarrow ۱۰\sqrt{۲} \simeq ۱۴/۱۴۲۱ \xrightarrow{\text{دنباله تقریبات اعشاری } ۱۰\sqrt{۲}} ۱۴/۱ \text{ و } ۱۴/۱۴ \text{ و } ۱۴/۱۴۲ \text{ و } ۱۴/۱۴۲۱$$

پس دنباله تقریبات اعشاری عدد $۱۰\sqrt{۲}$ را تا ۴ رقم اعشار می‌توان نوشت.

ریشه گیری اعداد حقیقی :

عدد حقیقی b را ریشه kاُم عدد حقیقی a می‌نامند هرگاه داشته باشیم : $b^k = a$ به طوری که :

الف) اگر k زوج باشد، a حتما عددی نا منفی ($a \geq ۰$) است. $\xleftarrow{\text{مثال}}$ $(-۳)^۲ = +۹$ و $(+۳)^۲ = +۹$

ب) اگر k فرد باشد، a می‌تواند هر عددی باشد. $\xleftarrow{\text{مثال}}$ $(-۲)^۳ = -۸$ و $(+۲)^۳ = +۸$

نکته : ریشه kاُم عدد حقیقی a را با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهند به طوری که :

$$\sqrt[k]{a} = \begin{cases} a \geq ۰ & \text{اگر } k \text{ زوج باشد :} \\ a \in R & \text{اگر } k \text{ فرد باشد :} \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} \sqrt[۲]{۳۶} = ۶ \quad \text{و} \quad \sqrt[۴]{۸۱} = ۳ \\ \sqrt[۵]{-۳۲} = -۲ \quad \text{و} \quad \sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵ \end{cases}$$

تذکر : عبارت $\sqrt[k]{a}$ در حالتی که k زوج و a منفی باشد، معنا ندارد و اصطلاحاً می‌گویند تعریف نشده است. بنابراین هرگاه از عبارت $\sqrt[k]{a}$ استفاده کردیم که در آن k زوج بود، همواره a را نامنفی در نظر می‌گیریم.

قوانین ریشه گیری :

$$۱) \begin{cases} \sqrt[k]{a^k} = a \quad , \quad k \text{ فرد} \\ \sqrt[k]{a^k} = |a| \quad , \quad k \text{ زوج} \end{cases} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[۳]{۵^۳} = ۵ \quad \text{و} \quad \sqrt[۲]{۳^۲} = |۳| = \pm ۳$$

$$۲) \ (\sqrt[k]{a})^k = a \xrightarrow{\text{مثال}} (\sqrt[۳]{۶})^۳ = ۶ \quad \text{و} \quad (\sqrt[۴]{۷})^۴ = ۷$$

$$۳) \ \sqrt[k]{a.b} = \sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{b} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[۳]{۸۱} = \sqrt[۳]{۳^۳ \times ۳} = \sqrt[۳]{۳^۳} \times \sqrt[۳]{۳} = ۳\sqrt[۳]{۳}$$

$$۴) \ \sqrt[k]{a^n} = (\sqrt[k]{a})^n \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[۴]{۵^۳} = (\sqrt[۴]{۵})^۳$$

$$۵) \ \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k.n]{a} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}} = \sqrt[۲\times۳]{۶۴} = \sqrt[۶]{۲^۶} = |۲| = \pm ۲$$

$$۶) \ a\sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{a^k.b} \xrightarrow{\text{مثال}} ۳\sqrt[۴]{۲} = \sqrt[۴]{۳^۴ \times ۲} = \sqrt[۴]{۱۶۲}$$

$$۷) \ \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[kn]{a^{km}} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[۶]{۱۶} = \sqrt[۶]{۲^۴} = \sqrt[۳]{۲^۲}$$

$$۸) \ \sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a^{m+n}} \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۴]{۲} = \sqrt[۳\times۴]{۲^{۳+۴}} = \sqrt[۱۲]{۲^۷}$$

مثال ۳۲ : عبارت های زیر را ساده کنید :

الف) $\sqrt[۶]{\sqrt{۲}+۱} \times \sqrt[۶]{\sqrt{۲}-۱}$ **ب)** $\sqrt[۶]{۸} \times \sqrt{۲}$ **ج)** $\sqrt[۳]{۹} \times \sqrt[۶]{۲۷}$

حل الف : $\sqrt[۶]{\sqrt{۲}+۱} \times \sqrt[۶]{\sqrt{۲}-۱} = \sqrt[۶]{\sqrt{۲}+۱ \times \sqrt{۲}-۱} = \sqrt[۶]{۲-۱} = \sqrt[۶]{۱} = ۱$

حل ب : $\sqrt[۶]{۸} \times \sqrt{۲} = \sqrt[۶]{۲^۳} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۲$

حل ج : $\sqrt[۳]{۹} \times \sqrt[۶]{۲۷} = \sqrt[۳]{۳^۲} \times \sqrt[۶]{۳^۳} = \sqrt[۶]{۳^۴} \times \sqrt[۶]{۳^۳} = \sqrt[۶]{۳^۴ \times ۳^۳} = \sqrt[۶]{۳^۷} = \sqrt[۶]{۳^۶ \times ۳} = ۳\sqrt[۶]{۳}$

مثال ۳۳ : عدد $\sqrt[۱۲]{۶۴}$ را به صورت یک عدد رادیکالی با فرجه ۳ بنویسید.

حل : $\sqrt[۱۲]{۶۴} = \sqrt[۳\times۴]{۲^۶} = \sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۲^۶}} = \sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۲^{۴+۲}}} = \sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۲^۴ \times ۲^۲}} = \sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۲^۲}} = \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$

مثال ۳۴ : اعداد $\sqrt[۳]{۴}$ و $\sqrt[۳]{-۴}$ را به صورت اعداد رادیکالی با فرجه ۶ بنویسید.

حل : $\sqrt[۳]{-۴} = -\sqrt[۳]{۴} = -\sqrt[۳\times۲]{۴^{۱\times۲}} = -\sqrt[۶]{۴^۲} = -\sqrt[۶]{۱۶}$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳\times۲]{۴^{۱\times۲}} = \sqrt[۶]{۴^۲} = \sqrt[۶]{۱۶}$

تذکر : می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج همواره نامنفی است. از طرفی می‌خواهیم عدد $\sqrt[۳]{-۴}$ را به صورت یک رادیکال با فرجه زوج بنویسیم. بنابراین ابتدا علامت منفی را از رادیکال بیرون می‌آوریم.

مثال ۳۵ : ثابت کنید : $(\sqrt[k]{a})^k = a$

حل : اگر $\sqrt[k]{a} = b$ باشد، در این صورت داریم :

$$b^k = a \Rightarrow \sqrt[k]{a} = b \xrightarrow{\text{به توان k می رسانیم}} (\sqrt[k]{a})^k = b^k \xrightarrow{b^k=a} (\sqrt[k]{a})^k = a$$

مثال ۳۶ : نشان دهید :

الف) اگر k فرد باشد، آنگاه : $\sqrt[k]{a^k} = a$

ب) اگر k زوج باشد، آنگاه : $\sqrt[k]{a^k} = |a|$

حل الف : اگر $a^k = b$ باشد، در این صورت داریم :

$$a^k = b \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt[k]{b} = a \xrightarrow{a^k=b} \sqrt[k]{a^k} = a$$

حل ب : اگر k زوج باشد در این صورت داریم :

$$a^k = b \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \sqrt[k]{b} = |a| \xrightarrow{a^k=b} \sqrt[k]{a^k} = |a|$$

توان رسانی با اعداد گویا :

برای هر عدد حقیقی مثبت a و عدد گویای $r = \frac{p}{n}$ که p عددی صحیح و n عددی طبیعی است، داریم : $a^r = (a)^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

مثال ۳۷ : عبارت های زیر را ساده کنید :

الف) $(۱۶)^{\frac{۳}{۴}}$

ب) $(۲۵)^{\frac{-۳}{۲}}$

ج) $(۲)^{\frac{۳}{۲}} \times (۳)^{\frac{۲}{۳}}$

حل الف : $(۱۶)^{\frac{۳}{۴}} = (۲^۴)^{\frac{۳}{۴}} = (۲)^۳ = ۸$

حل ب : $(۲۵)^{\frac{-۳}{۲}} = (۵^۲)^{\frac{-۳}{۲}} = (۵)^{-۳} = \frac{۱}{۵^۳} = \frac{۱}{۱۲۵}$

حل ج : $(۲)^{\frac{۳}{۲}} \times (۳)^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt{۲^۳} \times \sqrt[۳]{۳^۲} = \sqrt{۲^۲ \times ۲} \times \sqrt[۳]{۳^۲} = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt[۳]{۳^۲}$

$$\xrightarrow{\text{فرجه مشترک}} ۲\sqrt[۶]{۲^۳} \times \sqrt[۶]{۳^۴} = ۲\sqrt[۶]{۲^۳ \times ۳^۴} = ۲\sqrt[۶]{۸ \times ۸۱} = ۲\sqrt[۶]{۶۴۸}$$

مثال ۳۸ : برای هر عدد حقیقی مثبت a و اعداد طبیعی m و n نشان دهید : $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a^{m+n}}$

حل : $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = (a)^{\frac{۱}{m}} \times (a)^{\frac{۱}{n}} = (a)^{\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}} = (a)^{\frac{m+n}{m.n}} = \sqrt[m.n]{a^{m+n}}$

مثال ۳۹ : برای هر عدد حقیقی مثبت a و عدد گویای r نشان دهید : $a^{-r} = \frac{۱}{a^r}$

حل : اگر $r = \frac{p}{n}$ باشد که در آن p عدد صحیح و n عدد طبیعی هستند، داریم :

$$a^{-r} = (a)^{\frac{-p}{n}} = \sqrt[n]{(a)^{-p}} = (\sqrt[n]{a})^{-p} = \frac{۱}{(\sqrt[n]{a})^p} = \frac{۱}{\sqrt[n]{a^p}} = \frac{۱}{(a)^{\frac{p}{n}}} = \frac{۱}{a^r}$$

نکته : اگر p عددی صحیح و n و k اعدادی طبیعی باشند، داریم : $\frac{p}{n}=\frac{k.p}{k.n} \Rightarrow (a)^{\frac{p}{n}}=(a)^{\frac{k.p}{k.n}}$

مثال ۴۰ : اعداد $\sqrt[3]{4}$ و $\sqrt[3]{-4}$ را به صورت اعداد رادیکالی با فرجه ۶ بنویسید.

حل : $\sqrt[3]{-4}=-(4)^{\frac{1}{3}}=-(4)^{\frac{2}{6}}=-\sqrt[6]{4^2}=-\sqrt[6]{16}$ $\qquad \sqrt[3]{4}=(4)^{\frac{1}{3}}=(4)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$

مثال ۴۱ : برای هر عدد گویای r نشان دهید : $1^r=1$

حل : اگر $r=\frac{p}{n}$ باشد که در آن p عدد صحیح و n عدد طبیعی هستند، داریم : $1^r=1^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{1^p}=\sqrt[n]{1}=1$

قوانین توان رسانی با اعداد گویا :

همانند قوانین توان رسانی با اعداد صحیح است. در روابط زیر پایه‌ها (اعداد a و b) اعداد حقیقی مثبت و توان‌ها (اعداد r و s) اعداد گویا هستند.

۱) $a^r a^s=a^{r+s} \xrightarrow{\text{مثال}} 2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}=2^{\frac{13}{6}}=\sqrt[6]{2^{13}}=4\sqrt[6]{2}$

۲) $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s} \xrightarrow{\text{مثال}} \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}$

۳) $(a^r)^s=a^{r.s} \xrightarrow{\text{مثال}} (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}}=2$

۴) $a^{-r}=\frac{1}{a^r} \xrightarrow{\text{مثال}} 2^{\frac{-3}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2^3}}$

۵) $(a.b)^r=a^r.b^r \xrightarrow{\text{مثال}} (15)^{\frac{3}{2}}=(3\times 5)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}\times 5^{\frac{3}{2}}$

۶) $(\frac{a}{b})^r=\frac{a^r}{b^r} \xrightarrow{\text{مثال}} (\frac{7}{4})^{\frac{3}{2}}=\frac{7^{\frac{3}{2}}}{4^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{7^3}}{\sqrt{4^3}}=\sqrt{(\frac{7}{4})^3}$

مثال ۴۲ : ریشه‌گیری‌های زیر را بر حسب توان‌های گویا بنویسید و پس از ساده کردن مجددا بر حسب ریشه‌گیری بنویسید.

الف) $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}$ ب) $\sqrt{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{21}}$ ج) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[4]{8}$

حل الف : $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4]{5\times 5^{\frac{1}{3}}}=5^{\frac{1}{4}}\times(5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{12}}=5^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{12}}=5^{\frac{4}{12}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$

حل ب : $\sqrt{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{21}}=\sqrt{3^{\frac{1}{3}}\times 21^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{81^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{(3^4)^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{3^{\frac{4}{3}}}=(3^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{4}{6}}=3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{3^2}$

حل ج : $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[4]{8}=\sqrt[3]{2^2}\div\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{2}{3}}\div 2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=2^{\frac{-1}{12}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{12}}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}=\frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{2}$

توان رسانی با اعداد حقیقی :

قوانین توان رسانی با اعدا حقیقی همانند قوانین توان رسانی با اعداد گویا است با این تفاوت که در توان رسانی با اعداد حقیقی توان‌ها (اعداد r و s) اعداد حقیقی می‌باشند. بنابراین از نوشتن مجدد روابط پرهیز کرده و فقط چند مثال حل می‌کنیم.

مثال ۴۳ : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

$$۱)\ ۵^{۱-\sqrt{۳}}\times ۵^{۱+\sqrt{۳}} \rightarrow ۵^{۱-\sqrt{۳}+۱+\sqrt{۳}} = ۵^{۲} = ۲۵$$

$$۲)\ (\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} \rightarrow \sqrt{۳}^{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}^{۲} = ۳$$

$$۳)\ (\pi-۱)^{\sqrt{۳}}\times(\pi+۱)^{\sqrt{۳}} \rightarrow ((\pi-۱)(\pi+۱))^{\sqrt{۳}} = (\pi^{۲}-۱)^{\sqrt{۳}}$$

$$۴)\ ۲^{\sqrt{۳}}\times ۲^{\sqrt{۳}} \rightarrow ۲^{\sqrt{۳}+\sqrt{۳}} = ۲^{۲\sqrt{۳}} = ۴^{\sqrt{۳}}$$

$$۵)\ (\sqrt{۳}^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}} \rightarrow \sqrt{۳}^{\sqrt{۳}\times\sqrt{۱۲}} = \sqrt{۳}^{\sqrt{۳۶}} = \sqrt{۳}^{۶} = ۳^{\frac{۶}{۲}} = ۳^{۳} = ۲۷$$

$$۶)\ (\sqrt{۱۵}^{(۲-\sqrt{۲})})^{(۲+\sqrt{۲})} \rightarrow \sqrt{۱۵}^{(۲-\sqrt{۲})(۲+\sqrt{۲})} = \sqrt{۱۵}^{(۴-۲)} = \sqrt{۱۵}^{۲} = ۱۵$$

$$۷)\ (\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}} \xrightarrow{\sqrt{۲}+۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}} \big((\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})\big)^{(\sqrt{۲}+۱)} = (۳-۲)^{(\sqrt{۲}+۱)} = ۱^{(\sqrt{۲}+۱)}$$

$$۸)\ (۲^{۳-\sqrt{۵}})^{۳+\sqrt{۵}} \rightarrow ۲^{(۳-\sqrt{۵})(۳+\sqrt{۵})} = ۲^{(۹-۵)} = ۲^{۴} = ۱۶$$

$$۹)\ \left(\sqrt{\sqrt{۲}+۱}\right)\left(\sqrt[۴]{(\sqrt{۲}-۱)^{۲}}\right) \rightarrow \left(\sqrt{\sqrt{۲}+۱}\right)\left(\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\right) = \sqrt{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)} = \sqrt{۲-۱} = \sqrt{۱} = ۱$$

$$۱۰)\ (۵-\sqrt{۲۰})^{\sqrt{۲}}(۵+\sqrt{۲۰})^{\sqrt{۲}} \rightarrow ((۵-\sqrt{۲۰})(۵+\sqrt{۲۰}))^{\sqrt{۲}} = (۲۵-۲۰)^{\sqrt{۲}} = ۵^{\sqrt{۲}}$$

$$۱۱)\ (۷-۴\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}+۱}\left((۲-\sqrt{۳})^{۲}\right)^{۱-\sqrt{۲}} \rightarrow (۷-۴\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}+۱}(۷-۴\sqrt{۳})^{۱-\sqrt{۲}} =$$
$$(۷-۴\sqrt{۳})^{(\sqrt{۲}+۱)+(۱-\sqrt{۲})} = (۷-۴\sqrt{۳})^{۲} = ۴۹-۵۶\sqrt{۳}+۴۸ = ۹۷-۵۶\sqrt{۳}$$

$$۱۲)\ (۳-۲\sqrt{۲})^{۴۸}(۳+۲\sqrt{۲})^{۵۰} \rightarrow (۳-۲\sqrt{۲})^{۴۸}(۳+۲\sqrt{۲})^{۴۸}(۳+۲\sqrt{۲})^{۲} =$$
$$\big((۳-۲\sqrt{۲})(۳+۲\sqrt{۲})\big)^{۴۸}(۳+۲\sqrt{۲})^{۲} = (۹-۸)^{۴۸}(۹+۱۲\sqrt{۲}+۸) = ۱۷+۱۲\sqrt{۲}$$

$$۱۳)\ \frac{۵^{\sqrt{۳}}\times ۵^{\sqrt{۲۷}}}{۲۵^{\sqrt{۱۲}}} \rightarrow \frac{۵^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲۷}}}{(۵^{۲})^{\sqrt{۱۲}}} = \frac{۵^{\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}}}{۵^{۲(۲\sqrt{۳})}} = \frac{۵^{۴\sqrt{۳}}}{۵^{۴\sqrt{۳}}} = ۱$$

$$۱۴)\ \sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt{x^{۲}}}} \xrightarrow{\sqrt{x^{۲}}=x} \sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}.x}} = \sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt[۳]{x^{۳}}} = \sqrt[۳]{x^{۲}.x} = \sqrt[۳]{x^{۳}} = ۱$$

مثال ۴۴ : مقدار x را به گونه ای بیابید که $x^{\sqrt{۲}}$ برابر با ۴ شود.

حل :
$$x^{\sqrt{۲}} = ۴ \xrightarrow{\text{طرفین به توان } \sqrt{۲}} (x^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = ۴^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x^{۲} = ۴^{\sqrt{۲}} \Rightarrow x = \sqrt{۴^{\sqrt{۲}}} = \sqrt{(۲^{۲})^{\sqrt{۲}}} = \sqrt{(۲^{\sqrt{۲}})^{۲}} = ۲^{\sqrt{۲}}$$

مثال ۴۵ : برای هر عدد حقیقی مثبت a و عدد حقیقی b نشان دهید : $a^{-b} = \frac{۱}{a^{b}}$

حل :
$$a^{-b}\times a^{b} = a^{b-b} = a^{۰} = ۱ \Rightarrow a^{-b}\times a^{b} = ۱ \Rightarrow a^{-b} = \frac{۱}{a^{b}}$$

مثال ۴۶ : برای هر عدد حقیقی مثبت a و عدد حقیقی b نشان دهید : $\sqrt[k]{a^{n}} = (\sqrt[k]{a})^{n}$

حل :
$$\sqrt[k]{a^{n}} = (a)^{\frac{n}{k}} = (a^{\frac{۱}{k}})^{n} = (\sqrt[k]{a})^{n}$$

مثال ۴۷ : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^{\sqrt{3}+1}x^{\sqrt{3}-1} = 64$ ب) $\sqrt[10]{x^7} = \dfrac{8^{\frac{-1}{3}} \times \sqrt{32}}{\sqrt[5]{16}}$ ج) $\sqrt[x]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{16}}}$

حل الف :

$$x^{\sqrt{3}+1}x^{\sqrt{3}-1} = 64 \Rightarrow x^{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)} = 2^6 \Rightarrow x^{2\sqrt{3}} = 2^6 \Rightarrow x^{\sqrt{3}} = 2^3 \Rightarrow$$
$$(x^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = (2^3)^{\sqrt{3}} \Rightarrow x^3 = (2^{\sqrt{3}})^3 \Rightarrow x = 2^{\sqrt{3}}$$

حل ب :

$$\sqrt[10]{x^7} = \frac{8^{\frac{-1}{3}} \times \sqrt{32}}{\sqrt[5]{16}} \Rightarrow x^{\frac{7}{10}} = \frac{(2^3)^{\frac{-1}{3}} \times \sqrt{2^5}}{\sqrt[5]{2^4}} \Rightarrow x^{\frac{7}{10}} = \frac{2^{-1} \times 2^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{4}{5}}} \Rightarrow x^{\frac{7}{10}} = \frac{2^{-1+\frac{5}{2}}}{2^{\frac{4}{5}}} \Rightarrow x^{\frac{7}{10}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{4}{5}}} \Rightarrow$$
$$x^{\frac{7}{10}} = 2^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}} \Rightarrow x^{\frac{7}{10}} = 2^{\frac{7}{10}} \Rightarrow x = 2$$

حل ب :

$$\sqrt[x]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{16}}} \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} = \sqrt[2\times2\times3]{16} \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} = \sqrt[12]{2^4} \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$$