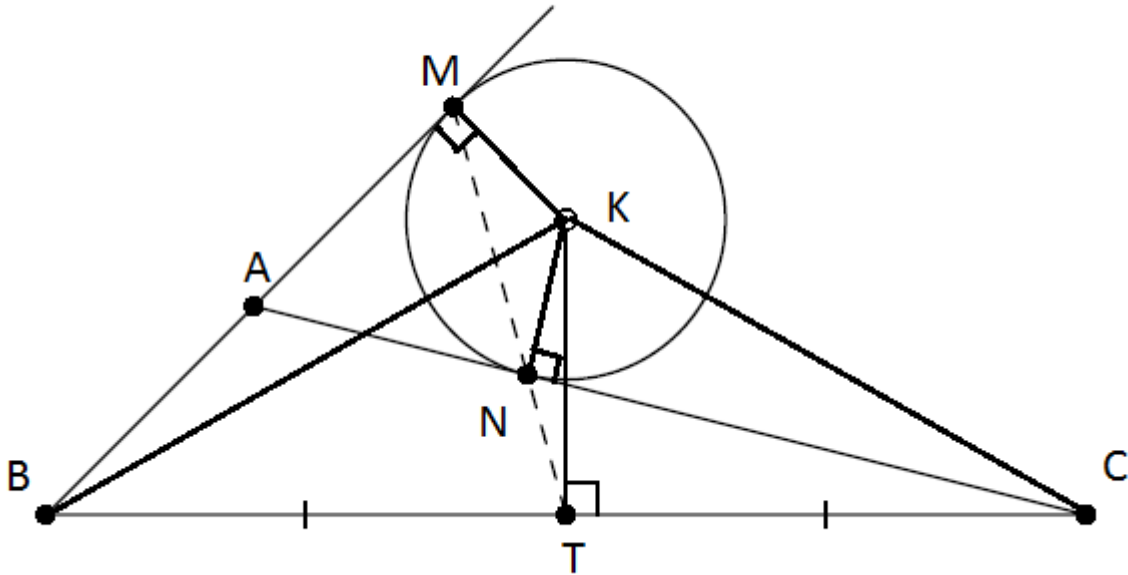


سوال 1 :



همانطور که در شکل مشهود است، در چهارضلعی $NKCT$ زوایای $\angle KTC$ و $\angle KNC$ راست گوشه (!) هستند بنابراین چهارضلعی محاطی است پس $\angle TNC = \angle TKC$ از طرفی چون K روی عمود منصف BC است بنابراین $\angle BKT = \angle TKC$. هم چنین چهارضلعی $BMKT$ به دلیل راست گوشه بودن زوایای $\angle BTK$ و $\angle BMK$ محاطی است بنابراین $\angle BKT = \angle BMT$. به علاوه زوایای $\angle MNA$ و $\angle BMT$ نیز به دلیل متساوی الساقین بودن مثلث AMN با هم برابرند. پس در نهایت داریم :

$$\angle MNA = \angle TNC$$

که حکم را نتیجه می دهد.

سوال 2.

لم در یک گراف کامل نامتناهی راسی که یال هایش با دو رنگ آبی و قرمز رنگ شده باشند خوشه تک رنگ نامتناهی راسی یافت می شود.

اثبات لم بر عهده خواننده!

حال کفایت راس های گراف را اعداد 1، 2، 3، ... در نظر بگیرید و دو راس A, B را که $A < B$ با یال آبی به هم وصل کنید اگر نقطه (A, B) آبی باشد و در غیر این صورت با یال قرمز. بنابر لم یک خوشه تک رنگ نامتناهی یافت می شود که متناظر این خوشه در نقاط معادل جواب است.

سوال 3.

لم برای هر $K \in \mathbb{N}$ و اعداد متوالی $a+1, a+2, \dots, a+K$ می توان K عدد متوالی دیگر مانند $b+1, b+2, \dots, b+K$ را طوری یافت که داشته باشیم:

$$a + 1 | b + 1, \quad a + 2 | b + 2, \quad \dots, \quad a + k | b + k$$

در واقع به دنبال b ای هستیم که در شرایط زیر صدق کند ...

$$b \equiv -i \pmod{a+i}$$

برای هر $i < k+1$

حال کفایت از تعمیم قضیه باقی مانده چینی استفاده کنیم. صورت تعمیم یافته قضیه باقی مانده چینی:

X ای با خواص زیر

$$X \equiv a_i \pmod{b_i} \quad \forall i < k$$

موجود است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\forall i, j < k, i \neq j \rightarrow (a_i, a_j) | b_i - b_j$$

که به وضوح شروط تعمیم باقی مانده چینی در سوال برقرار است.

حال با استفاده از لم می توان بی نهایت دسته 1394 تایی از اعداد متوالی یافت طوری که i امین عضو هر دسته ، i امین عضو دسته های بعدی را عاد کند.

a_1	a_1+1	a_1+2	a_1+3	a_1+1393
b_1	b_1+1	b_1+2	b_1+3	b_1+1393
.
.
.
.

مثلا در جدول بالا $a_i | b_i | \dots$

با توجه به این که در هر 1394 عدد متوالی حتما یکی از اعضای S یافت می شود بنابراین در هر سطر جدول یکی از اعضای S وجود دارد. حال چون تعداد ستون ها متناهیست بنابراین در یکی از ستون ها بی نهایت تا از اعضای S وجود دارد که همان خواسته سوال است.