۲-۱ نشان دهید که (الف) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\cup\overline{\overline{A}\cup B}=A$ ؛ (ب) $(A\cup B)(\overline{AB})=A\overline{B}\cup B\overline{A}$

۲-۲ به ازای $A=\{2\le x\le 5\}$ و $B=\{3\le x\le 6\}$ ، $A\cup B$ ، AB ، و $(A\cup B)(\overline{AB})$ را بیابید.

۲-۳ نشان دهید که اگر $AB=\{\emptyset\}$ ، آنگاه $P(A)\le P(\overline{B})$.

۲-۴ نشان دهید که (الف) اگر $P(A)=P(B)=P(AB)$ ، آنگاه $P(A\overline{B}\cup B\overline{A})=0$ ؛

(ب) اگر $P(A)=P(B)=1$ ، آنگاه $P(AB)=1$.

۲-۵ اتحاد زیر را اثبات کنید و آن را تعمیم دهید

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

۲-۶ نشان دهید که اگر S دارای تعداد شمارش‌پذیری عضو ζ_i باشد ، و هر زیر مجموعهٔ $\{\zeta_i\}$ یک

رخداد باشد ، آنگاه تمام زیر مجموعه‌های S رخداد است .

۲-۷ به ازای $S=\{۱,۲,۳,۴\}$ کوچکترین میدان دربردارندهٔ مجموعه‌های $\{۱\}$ و $\{۲,۳\}$ را بیابید.

۲-۸ داریم $A\subset B$ ، $P(A)=۱/۴$ ، و $P(B)=۱/۳$. $P(A\,|\,B)$ و $P(B\,|\,A)$ را بیابید.

۲-۹ نشان دهید که $P(AB\,|\,C)=P(A\,|\,BC)P(B\,|\,C)$ و $P(ABC)=P(A\,|\,BC)P(B\,|\,C)P(C)$.

۲-۱۰ ***قاعدهٔ زنجیری*** . نشان دهید که

$$P(A_n\cdots A_۱)=P(A_n\,|\,A_{n-۱}\cdots A_۱)\cdots P(A_۲\,|\,A_۱)P(A_۱)$$

۲-۱۱ m شیء از یک مجموعهٔ S دارای n شیء را به طور تصادفی برمی‌گزینیم و مجموعهٔ اشیاء برگزیده را A_m می‌نامیم . نشان دهید که احتمال p وجود یک عضو خاص از S در A_m برابر m/n است .

راهنمایی : p احتمال این است که یک شیء تصادفی انتخاب شده از S در A_m باشد.

۲-۱۲ در زمان t یک تماس گرفته می‌شود ؛ t یک نقطهٔ تصادفی در بازهٔ $(۰,۱۰)$ است .

(الف) $P\{۶\le t\le ۸\}$ را بیابید. (ب) $P\{۶\le t\le ۸|t>۵\}$ را بیابید.

۲-۱۳ فضای S مجموعهٔ تمام اعداد مثبت t است . نشان دهید که اگر به ازای هر $t_۰$ و $t_۱$ دلخواهی $P\{t\le t_۱\}=P\{t_۰\le t\le t_۰+t_۱|t\ge t_۰\}$ ، آنگاه $P\{t\le t_۱\}=۱-e^{-ct_۱}$ ، که c یک عدد ثابت است .

۲-۱۴ رخدادهای A و B ازهم‌جدا هستند. آیا این رخدادها می‌توانند مستقل باشند؟

۲-۱۵ نشان دهید که اگر رخدادهای $A_۱,\ldots,A_n$ مستقل باشند و B_i با A_i یا $\overline{A}_i$ یا S برابر باشد ، آنگاه رخدادهای $B_۱,\ldots,B_n$ نیز مستقل هستند.

۲-۱۶ در یک جعبه n گوی وجود دارد که از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. فرض کنید k گوی به طور متوالی برداشته می‌شود. (الف) احتمال این که بزرگترین عدد انتخاب شده m باشد چقدر است؟ (ب) احتمال این که بزرگترین عدد انتخاب شده کوچک‌تر یا برابر m باشد چقدر است؟

۲-۱۷ در k جعبهٔ مشابه n گوی شماره‌گذاری شده از ۱ تا n وجود دارد. از هر جعبه یک گوی برداشته می‌شود. احتمال این که بزرگترین عدد انتخاب شده m باشد چقدر است؟

۲-۱۸ ۱۰ مسافر سوار قطاری با سه واگن می‌شوند. اگر مسافران به طور تصادفی در واگن‌ها بنشینند ، احتمال این که در واگن اول سه نفر بنشینند چقدر است؟

۲-۱۹ در یک جعبه m گوی سفید و n گوی سیاه قرار دارد. k گوی بیرون آورده می‌شود. احتمال این که حداقل یک گوی سفید بیرون آورده شود چقدر است؟

۲-۲۰ شخصی سکه‌های به قطر ۳/۴ اینچ را از فاصلهٔ دور روی یک میز مربع شکل پرتاب می‌کند. روی میز سفره‌ای چهارخانه انداخته شده است که سطح میز را به مربع‌هایی با طول یک اینچ تقسیم می‌کند. احتمال این که سکه کاملاً درون یک خانه قرار گیرد چقدر است؟ (سکه حتماً روی میز قرار می‌گیرد.)

۲-۲۱ در یک بخت‌آزمایی شش عدد از یک رشتهٔ عددی ۱ تا ۵۱ انتخاب می‌شود. احتمال این که شش عدد انتخاب شده (الف) تماماً یک رقمی باشند ، و (ب) دو عدد یک رقمی و چهار عدد دورقمی باشند ،

چقدر است؟

۲-۲۲ نشان دهیدکه برای استقلال n رخداد باید $2^n - (n+1)$ معادله برقرار باشد.

۲-۲۳ جعبهٔ ۱ دارای ۱ گوی سفید و ۹۹۹ گوی قرمز است . جعبهٔ ۲ دارای ۱ گوی قرمز و ۹۹۹ گوی سفید است . یک گوی از یک جعبهٔ تصادفی خارج می‌شود. اگر گوی قرمز باشد ، احتمال این که از جعبهٔ ۱ بیرون آمده باشد چقدر است؟

۲-۲۴ جعبهٔ ۱ حاوی ۱۰۰۰ لامپ است که ۱۰٪ آنها خراب است . در جعبهٔ ۲ ، ۲۰۰۰ لامپ قرار دارد که ۵٪ آنها خراب هستند. از یک جعبه که به طور تصادفی انتخاب شده ، دو لامپ بیرون آورده می‌شود. (الف) احتمال این که هر دو لامپ خراب باشند چقدر است؟ (ب) اگر هر دو لامپ خراب باشند ، احتمال این که جعبهٔ ۱ انتخاب شده باشد چقدر است؟

۲-۲۵ یک قطار و یک اتوبوس بین ساعت ۹ و ۱۰ در زمانی تصادفی وارد ایستگاه می‌شوند. قطار ۱۰ دقیقه و اتوبوس x دقیقه توقف دارد. x را طوری تعیین کنید که احتمال با هم بودن قطار و اتوبوس در ایستگاه برابر ۰٫۵ باشد.

۲-۲۶ نشان دهید که یک مجموعهٔ S دارای n عنصر به تعداد

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

زیرمجموعهٔ k عنصری دارد.

۲-۲۷ دو سکه داریم ؛ اولی سالم است ، ولی هر دو روی سکهٔ دوم شیر است . یکی از سکه‌ها را به طور تصادفی برگزیده ، آن را دوبار پرتاب می‌کنیم و هر دو بار شیر می‌آید. احتمال این که سکهٔ منتخب سالم باشد چقدر است؟

مسائل