۱ آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادی[1] نیز می‌گویند؛ دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به‌کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق **استدلال‌ها می‌پردازد** و درستی یا نادرستی یک استدلال را مشخص می‌کند. در این درس کار ما بسیار شبیه به بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

گزاره

استدلال سادهٔ زیر را در نظر بگیرید :

تیم ملی فوتبال ایران یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی می‌رود.

چنین نیست که تیم ملی فوتبال استرالیا به جام‌جهانی برود.

نتیجه : تیم ملی فوتبال ایران به جام‌جهانی می‌رود.

این استدلال از چند جملهٔ خبری به‌دست می‌آید، چنانچه دو جملهٔ اول این استدلال را درست درنظر بگیریم، در این صورت نتیجه‌گیری جملهٔ سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جملهٔ خبری نخست، **مقدمه‌های استدلال** و به جملهٔ خبری سوم، **نتیجه استدلال** گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه مقدمه‌های استدلال هستند.

کار در کلاس

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هر عدد مرکب، عدد اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه : ....

۱ــ Logic symbol

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد آن‌گاه مدارس تعطیل است.
به احتمال زیاد فردا وضعیت آلودگی هوا به‌صورت ناسالم است.
نتیجه : ....

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به **محتوای جملهٔ خبری که دارای ارزش درست یا نادرست است، گزاره[۱] می‌گوییم**. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p، q، r و ... نمایش می‌دهند.

درست[۲] یا نادرست[۳] بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است. برای مثال به گزاره زیر دقت کنید.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت[۴]»

مانند :

۴=۲+۲ ; ۶=۳+۳ ; ۸=۳+۵ ; ۱۰=۵+۵ ; ۱۲=۵+۷ ; ...

گزاره بالا یک حدس در ریاضیات است و این حدس تاکنون اثبات نشده است. از طرفی مثال نقضی هم برای آن یافت نشده است. در هر صورت این گزاره فقط دارای یک ارزش است. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس نادرست است.

خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که پرونده آنها در جهان علم باز است. این‌گونه مسائل علاوه‌بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون مثال نقضی هم برای آنها پیدا نشده است، حدس گلدباخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

کار در کلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را تعیین کنید.

- ایران کشور آسیایی است.
- در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

۱ـ Statement ۲ـ Truth ۳ـ False

۴ـ حدس گلد باخ

- ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.
- آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟
- هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول نوشت.
- هر معادله درجه دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.
- صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو می‌گیرد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزاره p و q ، طبق جدول روبه‌رو دارای ۴ حالت است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره p، q و r ، طبق جدول روبه‌رو دارای $۸=۲^۳$ حالت است. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	…	ن
…	ن	…
د	ن	ن
ن	د	…
…	د	ن
ن	…	…
…	…	…

ــ به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، دارای چند حالت است؟

ــ با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها دارای چند حالت است؟

گزاره‌نما

فعالیت

جمله‌های خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاپ یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. $(۳x+۲y=۶)$

۱ ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

۲ چنانچه به جای مجهول در جملهٔ «a عددی فرد است» قرار دهیم $a=۳$ در این صورت ارزش آن را تعیین کنید؟

اگر در آن $a=۴$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید :

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{\quad,\quad,\quad\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چند مجموعهٔ مانند A وجود دارد که اگر آنها را به‌جای A قرار دهیم، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود.

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{\quad,\quad,\quad\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، درست است.

اگر در جملهٔ «پ» قرار دهیم $x=\cdots\cdots$ و $y=\cdots\cdots$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x=\cdots\cdots$ و $y=\cdots\cdots$ در این صورت ارزش گزاره حاصل نادرست است.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا اینکه گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، **دامنهٔ متغیر**[۱] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

برای مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «x عددی زوج است» مجموعهٔ اعداد صحیح و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$۴x^۲+x-۵=۰$» مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب**[۲] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم : $S\subset D$.

۱ــ Domain of variable　　۲ــ Answer set

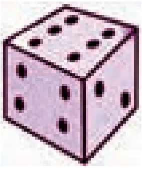
کار در کلاس

دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D=\mathbb{Z})$

ب) $۱۵x^۲-۷x-۸=۰$ $(D=\mathbb{R})$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\})=\frac{۱}{۶}$. $(D=\{۱,۲,....,۶\})$



ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

به جمله‌های زیر دقت کنید و به سؤال‌ها پاسخ دهید.

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است.
- عدد ۲ زوج است یا عدد ۵ مضرب ۳ است.
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است.
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد.
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس.

۱ هریک از این جمله‌ها از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به‌کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند.

در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و معرفی ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به‌صورت $\sim p$ نوشته می شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره p درست باشد در این‌صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت «~» ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال : نقیض گزاره «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد» یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش[1] برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به‌صورت روبه‌رو است :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۱ــ Truth table

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است، در این حالت می‌گوییم دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ **هم‌ارز منطقی** هستند و می‌نویسیم : $\sim(\sim p) \equiv p$.

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب «$\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p یا q» را که به‌صورت «$p\vee q$» می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی «$\vee$» فاصل گفته می‌شود. گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید :

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید **یا** مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید.»

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزاره مرکب بالا درست است. چنانچه مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین ارزش گزاره مرکب $p\vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دوی p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p\vee q$ درست است. جدول ارزش گزاره $p\vee q$ به صورت روبه‌رو است.

p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $a\times b=۰$ در این صورت $a=۰$ یا $b=۰$ یعنی :

$$a,b\in\mathbb{R}\ ,\ a\times b=۰ \Rightarrow (a=۰)\vee(b=۰)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله‌ها استفاده می‌کنیم :

$$x^{۲}+۷x=۰ \Rightarrow x(x+۷)=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x+۷=۰ \Rightarrow x=-۷$$

در نتیجه $x=۰$ یا $x=-۷$ ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+۷x=۰$ هستند.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p \wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی «$\wedge$» عاطف گفته می‌شود.

فعالیت

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

- آیا ارزش این گزارهٔ مرکب درست است؟

فرض کنید p : سوگند فارغ‌التحصیل شد و q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

- چنانچه ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟
- چنانچه ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟
- هرگاه ارزش دو گزاره p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟
- هرگاه ارزش دو گزاره p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دوی p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p \wedge q$ به‌صورت روبه‌رو است :

$p \wedge q$	q	p
د	د	د
ن	ن	د
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.				
....	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن			
۲ عددی اول است	....		ن		
....	....	ن	ن		
(۷−) اول است	....			د	

۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن		ن	
د	ن	د	ن		د	
ن	د	د		د		ن
ن	ن	ن		د		د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزاره $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان هستند پس $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ به این هم‌ارزی قانون دمورگان در منطق ریاضی گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\wedge\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$

مثال: مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم

$$(2x-y)^2+(x-1)^2=0$$

حل: چون $(x-1)^2\geq 0$ و $(2x-y)^2\geq 0$ بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$(2x-y)^2=0\wedge(x-1)^2=0 \quad\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow y=2\end{cases}$$

شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

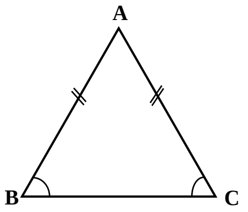
خواندنی

گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» را به‌صورت‌های «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است» می‌خوانیم.

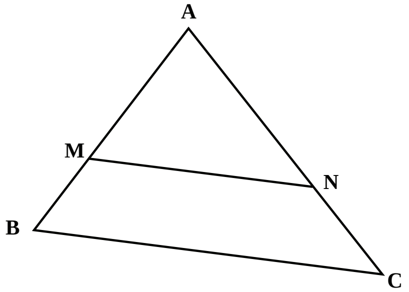
تا به‌حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.

۱ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویه مجاور به قاعده برابرند.

$$\overset{\Delta}{ABC} : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$



۲ اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم $MN \| BC$ آن‌گاه $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.



۳ $a^۲ \leq b^۲ \Rightarrow (a \leq b) \wedge (a \geq -b)$

۴ $a^۲ \geq b^۲ \Rightarrow (a \geq b) \vee (a \leq -b)$

۵ اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد آن‌گاه $A \subset S$.

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به‌صورت زیر است :

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» درست است. در این حالت می‌گویند ارزش «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی هستند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د		
د	ن	ن		
ن	ن	د		
ن	د	د		

۲ گزاره «$q \Rightarrow p$» **عکس ترکیب شرطی** «$p \Rightarrow q$» و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ است.

با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید :

الف) قانون ادخال فاصل : $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

ب) قانون حذف عاطف : $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

الف)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

ب)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

مثال : ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $a^۲$ عددی فرد باشد آن‌گاه a عددی فرد است.

حل : به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

($a^۲$ عددی زوج است $\Leftarrow$ a عددی زوج است) $\equiv$ (a عددی فرد است $\Leftarrow$ $a^۲$ عددی فرد است)

چنانچه a عددی زوج باشد، یعنی $a = ۲k$، خواهیم داشت :

$$a^۲ = (۲k)^۲ = ۴k^۲ = ۲\underbrace{(۲k^۲)}_{k' \in \mathbb{Z}'} = ۲k'$$

در نتیجه $a^۲$ عددی زوج است.

دو شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p\Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره «$p\Leftrightarrow q$» را به‌صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

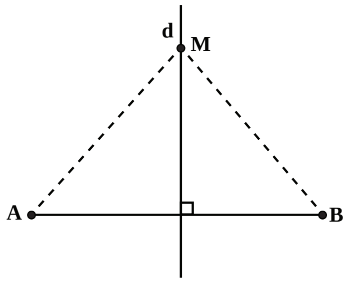
مثال: گزاره های زیر، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

الف) $x=۲ \Leftrightarrow ۲x=۴$

ب) $x>۳ \Leftrightarrow ۲x-۵>۱$

پ) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای آن‌که احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.



$[M\in d$ (عمود منصف پاره‌خط AB) $] \Leftrightarrow MA=MB$

کار در کلاس

با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزارۀ مرکب «$p\Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

با توجه به اینکه $(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ ، جدول ارزش گزاره $p\Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است:

p	q	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

هم‌ارزی‌های منطقی بین گزاره‌های مرکب

کار در کلاس

با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

۱ قوانین جابه‌جایی

$p\vee q\equiv q\vee p$

$p\wedge q\equiv q\wedge p$

۲ قوانین شرکت‌پذیری

$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

۳ قوانین توزیع‌پذیری

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید :

همهٔ دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند. هر گردو، گرد است. هر مربع یک مستطیل است. هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین است. بعضی از تیم‌های دستهٔ یک به دسته برتر صعود می‌کنند.

بعضی از اعداد اول، زوج هستند. بعضی از متوازی‌الاضلاع‌ها، مستطیل هستند.

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

خواندنی

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به‌کار رفته در گزاره‌نماها، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$ [1] و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ [2] استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2\geq 0$	$\forall\ x\in \mathrm{R}: x^2\geq 0$
	$\forall\ a\in \mathrm{E}: a=2k\ (k\in z)$
	$\exists\ p\in \mathrm{P}: p=2k\ (k\in z)$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	

مجموعه اعداد زوج را با E، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش می‌دهند.

گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد. برای مثال عبارت زیر:

$\forall\ x\in \mathbb{R}: x^2\geq x$

نادرست است، زیرا $x=\frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند.

الف) $\forall\ x\in \mathbb{Z}: x(x+1)=2k$ ب) $\forall\ x\in \mathbb{R}: tanx\times cotx=1$

حل الف) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است بنابراین برای هر عضو از دامنه متغیر ($\mathbb{Z}$) گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱ــ نماد $\forall$ از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲ــ نماد $\exists$ از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است، زیرا $x=\frac{\pi}{2}$ ، گزاره نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. برای مثال عبارت زیر:

$\exists x \in \mathbb{Z} : |x|-1<0$

درست است، زیرا حداقل یک عضو $x=0$ وجود دارد که به ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند :

الف) $\exists x \in P : x=2k$ ب) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2+1=0$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعهٔ جواب گزاره‌نما $\{2\}$ و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه تهی است.

کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است.

ب) $\exists x \in N : 2x^2+3x+1=0$

پ) $\exists x \in Z : 2x^2+3x+1=0$

ت) هر عدد زوج غیر اول است.

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است.

ج) در احتمال؛ هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است.

چ) در فضای نمونه S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A)>1$.

ح) طول هر پاره خط عدد حقیقی است.

نقیض سورها

گزاره «**علی به مدرسه رفت**» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید.

....

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.

هر آسیایی، ایرانی است.

....

در زبان طبیعی معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض گزاره

بالا، فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند :

هر آسیایی، ایرانی نیست.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش دو گزاره بالا نادرست هستند و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین جمله دوم نمی‌تواند نقیض جمله اول باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A : p(x)$ بیان می‌شود.

چون ارزش این گزاره «$\forall x \in A : P(x)$» نادرست است، پس ارزش گزاره نقیض آن یعنی $\sim (\forall x \in A : P(x))$ باید درست باشد. از آن‌جا که ارزش گزاره $(\forall x \in A : P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به‌طوری که $P(x)$ نادرست است و لذا ارزش $\sim P(x)$ درست می‌باشد، در نتیجه ارزش گزارهٔ $\exists x \in A :\sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ $\sim (\forall x \in A : P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم :

$$\sim (\forall x : P(x)) \equiv \exists x :\sim P(x)$$

در این صورت نقیض گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به‌صورت زیر است :

«بعضی از آسیایی‌ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می‌توان نقیض گزاره‌ای را که دارای سور وجودی است، به صورت زیر نوشت :

$$\sim (\exists x : P(x)) \equiv \forall x :\sim P(x)$$

مثال : نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید و ارزش آنها را تعیین کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ > ۰$ ب) $\exists y \in \mathbb{R} : y < ۰ \wedge y^۲ \leq ۱$

حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است، چون $x=۰$، مثالی نقض برای آن است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ > ۰) \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^۲ \not> ۰ \equiv \exists x \in \mathbb{R} : x^۲ \leq ۰$$

ب) درست است، زیرا $y=-۱$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R} : y < ۰ \wedge y^۲ \leq ۱) \equiv \forall y \in \mathbb{R} :\sim (y < ۰ \wedge y^۲ \leq ۱)$$
$$\equiv \forall y \in \mathbb{R} : y \geq ۰ \vee y^۲ > ۱$$

تمرین

۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است و ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است.

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است.

پ) $۳+۵>۶$

ت) تخته سیاه را پاک کنید.

ث) $\{۱\} \in \{۱,۲,۳,۴\}$

ج) چه باران شدیدی می‌آید.

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است.

ح) $\varnothing \not\subset \mathbb{R}$

خ) $\sqrt{-۱} \notin \mathbb{Z}$

د) عدد $۵^{۹}+۸$ عددی اول است.

ذ) به امید کامیابی شما.

ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-۷ \times \square = -۷$

ب) $۵+\square \notin \mathbb{Z}$

پ) $\frac{۸ \times \square}{۴} \in \left\{۲, \frac{۱}{۳}\right\}$

ت) $۳ \times ۵ \square \frac{۱۰ \times ۹}{۳}$

ث) $\square \times \sqrt{۲} = ۰$

ج) $۱ \square \{۱\}$

چ) $۵(\square - ۳) = ۲۰$

ح) $۷(\square - ۳) = ۳۵$

۳ دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

پ) $- \leq \frac{۱ \qquad ۲}{\qquad}$

ت) $\{n(n+۱) | n \in W\}$

۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $۳ \leq ۴$

ب) ابولوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی است.

پ) $a \in \{b, c, d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویا است.

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

ج) اگر a زوج باشد آن‌گاه $a+۱$ فرد است.

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲<۳) \wedge (۴+۳=۱۰)$

ب) $(۵>۳) \vee (x^{۲}+۱=۰)$

پ) $(\frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۶}) \vee (۱ \in \{۲,۳,۴\})$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) در متوازی‌الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند.

ج) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

چ) $۲>۳ \Leftrightarrow -۲<-۳$

ح) اگر $a \in \{b\}$ آن‌گاه $a=b$ وبر عکس.

۶ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p\Rightarrow q)$	ارزش $(p\wedge q)$
عدد ۲ زوج است.					د
	$۱\nless ۲$			ن	
$۲\in\{۱,۲\}$					ن
	عدد ۷ اول است.			د	

۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p\wedge\sim q$

ب) $\sim p\wedge p$

پ) $\sim p\vee p$

ت) $(p\vee q)\wedge\sim p$

ث) $(p\vee q)\Leftrightarrow q$

ج) $\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که :

الف) $p\Rightarrow p\equiv T$

ب) $p\vee F\equiv p$

پ) $p\wedge T\equiv p$

ت) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

ث) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$

ج) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

چ) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

ح) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Rightarrow q$

۹ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall,\exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم $a^۲<۰$.

پ) همه اعداد اول فرد هستند.

ت) وجود دارد عدد صحیح مثبتی مانند x به‌طوری که $۱-۲x>۵$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

ج) به‌ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۳=x$.

۱۱ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۰<x\leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x\in A: x+۴=۱۰$

ب) $\forall x\in A: x+۲\leq ۹$

پ) $\exists x\in A: x+۳\leq ۴$

ت) $\forall x\in A: x+۱\geq ۶$

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R}: \dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}: (۲^{۲^n}+۱)\in p$

پ) $\forall x\in(-\infty,۰): x-\dfrac{۱}{x}\leq -۲$

ت) $\exists y\in\mathbb{R}: \dfrac{x-۳}{۵}=۰$

۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

یادآوری : در سال های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید، برای مثال مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به صورت زیر است :

$A=\{۲, ۳, ۵, ۷\}$

می‌توان این مجموعه را با زبان نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x \in P \mid x<۱۰\}$ نوشت که در آن P مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه A است، می‌نویسیم $۲\in A$ از طرفی واضح است که $۶\notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعه A تعلق ندارد.

کار در کلاس

۱ فرض کنید $A=\{a , b\}$، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\} \in A$ ب) $\varnothing\in A$

پ) $\{a\} \subset A$ ت) $b\subset A$

ث) $a \in A$ ج) $\{a , b\} \subset A$

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی هستند؟

الف) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x^۲=۹$ و $۲x=۴\}$ ب) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x+۸=۸\}$

پ) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x \neq x\}$ ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^۲=۷x\}$

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$A=\{x \in\mathbb{Z} \mid |x| \leq۲\}$

$B = \{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳ = m\}$

$C =\{k\in \mathbb{R} \mid k^۲-۱=۰\}$

$D =\{a\in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}$

۴ با توجه به مجموعه‌های قسمت‌های قبل درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$A\cap D\subset C$ $B\subset A$ $B\in A$

$B-D\subset A$ $C\not\subset A$ $B\subset C\cup A$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فعالیت

مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b , c\} \subset A$ را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم، چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و b و $c \in B$، متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه $\{a\} \subset A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیه زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اول

۴ فرض کنید $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم چهارم　　رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اول

۵ اگر $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n\}$ در این صورت با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم nام　　…　　رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اول

فرض کنید A یک زیرمجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

مثال : مجموعه $A=\{a , \{a\} , \varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های A را در یک مجموعه بنویسید.

خواندنی

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.
چنانچه A دارای n عضو باشد در این صورت $P(A)$ دارای 2^n عضو است.
اگر $A \subset B$ به‌طوری که $A \neq B$ آن‌گاه A زیرمجموعه محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل : فرض کنیم A دارای n عضو باشد، پس دارای ۲^n زیرمجموعه است، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه شود در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، یعنی در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $۲^n+۴۸$ است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید برابر است با $۲^{n+۲}$ است، بنابراین داریم :

$$۲^n+۴۸ = ۲^{n+۲}= ۲^n \times ۲^۲ =۴\times ۲^n$$

$$\Rightarrow ۲^n +۴۸=۴\times ۲^n \Rightarrow ۴\times ۲^n-۲^n =۴۸$$

$$\Rightarrow ۳\times ۲^n =۴۸ \Rightarrow ۲^n =۱۶= ۲^۴ \Rightarrow n=۴$$

در نتیجه مجموعه A، چهار عضوی است.

افراز یک مجموعه

فعالیت

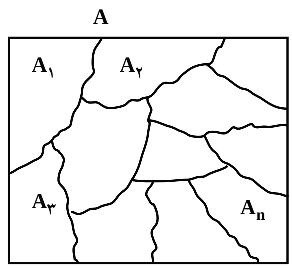
۱ مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید، تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از $\varnothing$ را بنویسید.

۲ از بین زیر مجموعه‌های A دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با A شود.

۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به‌دست آورید.

۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با A شود؟

فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_۱ , A_۲ , \dots , A_n$ زیر مجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه $A_۱ , A_۲ , \dots , A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.



I) $\forall\ ۱ \leq i\leq n :\ A_i\neq\varnothing$

II) $\forall i \neq j\ :\ A_i \cap A_j = \varnothing$

III) $A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$

کار در کلاس

مجموعهٔ $A=\{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

۱ $\{۴,۸,۹\}$ و $\{۲,۶\}$ و $\{۱,۳,۵\}$

۲ $\{۵,۷,۹\}$ و $\{۲,۴,۶,۸\}$ و $\{۱,۳,۵\}$

۳ $\{۷,۹\}$ و $\{۲,۴,۶,۸\}$ و $\{۱,۳,۵\}$

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

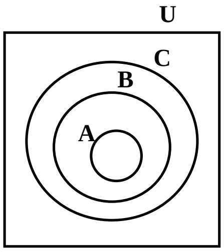
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B باشد در این صورت A را زیرمجموعهٔ B نامیده و می‌نویسند $A\subset B$. چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A\not\subset B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subset B$ و $A\not\subset B$ را به صورت زیر نوشت :

$$A\subset B \Leftrightarrow \forall x\in A \Rightarrow x\in B$$

$$A\not\subset B \Leftrightarrow \exists x\in A \wedge x\notin B$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subset B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کرده، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subset B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



ویژگی ۱ــ فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A\subset B$ و $B\subset C$ ثابت کنید $A\subset C$.

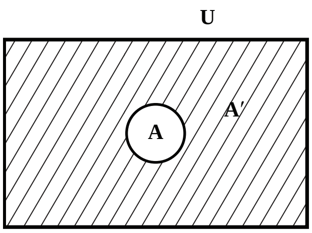
برهان : برای اثبات $A\subset C$، باید ثابت کنیم که : $\forall x\in A \Rightarrow x\in C$

برای این منظور از فرض‌های قضیه یعنی $A\subset B$ و $B\subset C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\in A \overset{A\subset B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subset C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم :

$$(\forall x\in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A\subset C$$



ویژگی ۲ــ فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید $B'\subset A'$.

(A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند). قبل از اثبات این قضیه، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعه A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

اثبات ویژگی ۲ــ برای اینکه ثابت کنیم $B'\subset A'$ باید نشان دهیم که : $\forall x\in B' \Rightarrow x\in A'$ بنابراین داریم :

$$\forall x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subset B}{\Rightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in A'$$

در نتیجه داریم :

$$(\forall x\in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subset A'$$

ویژگی ۳ــ برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید : $\varnothing\subset A$.

اثبات : برای اثبات $\varnothing\subset A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $(\forall x\in\varnothing \Rightarrow x\in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی ارزش مقدم یعنی $x\in\varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing\subseteq A$.

کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A\subset A\cup B$.

اثبات :

$$\forall x\in A\Rightarrow x\in A \text{ یا } x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$$

بنابراین داریم : $(\forall x\in A\Rightarrow x\in A\cup B)\Rightarrow A\subset A\cup B$

درستی استدلال بالا را توجیه کنید.

۲ فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subset B$ و $C\subset D$ آن‌گاه $A\cup C\subset B\cup D$.

اثبات : جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x\in(A\cup C)\Rightarrow\begin{cases}x\in A\Rightarrow\cdots & (\text{زیرا } A\subset B\ )\\ \vee & \vee\\ \cdots\ \Rightarrow\ x\in D & (\text{زیرا } C\subset D)\end{cases}\Rightarrow x\in B\ \vee\ x\in D\Rightarrow\ldots\ldots$$

بنابراین داریم :

$$[\forall x\in(A\cup C)\Rightarrow x\in(B\cup D)]\Rightarrow\cdots\cdots$$

۳ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند ثابت کنید اگر $A\subset C$ و $B\subset C$ آن‌گاه $(A\cup B)\subset C$.

راهنمایی : از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ یعنی $A\subset B$ و $B\subset A$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت :

$$A=B\Leftrightarrow[(A\subset B)\wedge(B\subset A)]$$

کار در کلاس

فرض کنید $A=\{۱,۲\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکردلیل).

الف) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^۲-۳x+۲=۰\}$ ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid ۱\leq x\leq ۲\}$

پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$ ت) $\{x\in\mathbb{N}\mid ۱\leq x\leq ۲\}$

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید $A\cap B=B\cap A$. (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

اثبات : برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subset B\cap A \quad (۱) \;؛\quad B\cap A\subset A\cap B$$

اثبات (۱) :

$$\forall x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B\wedge x\in A$$ (طبق خاصیت جابه‌جایی $\wedge$)

$$\Rightarrow x\in B\cap A$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطه (۲) را نشان داد.

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subset B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$.

اثبات :

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

$$=\{x\in U \mid x\in B\wedge x\notin B\}$$ (زیرا $A\subset B$)

$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$C=\{x \mid$ یک لوزی است $x\}$ $A=\{x \mid$ یک چهارضلعی است $x\}$

$D=\{x \mid$ یک مربع است $x\}$ $B=\{x \mid$ یک مستطیل است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D\subset C$ ب) $B\subset D$

پ) $A\subset B$ ت) $D\subset A$

۲ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D=\{۳,۴,۵\}$ و $E=\{۳,۵\}$.

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

الف) X و B عضو مشترکی ندارند.   ب) $X\subset A$ ولی $X\not\subset C$

پ) $X\subset D$ ولی $X\not\subset B$ ت) $X\subset C$ ولی $X\not\subset A$

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\varnothing=\{\varnothing\}$ ب) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$

پ) $\varnothing\notin\{\varnothing\}$ ت) $\{\{\varnothing\}$ و $\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing$ و $\{\varnothing$ و $\{\varnothing\}\}$ و $\{\varnothing\}\}$

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^۳=x\}$ $A=\{m\in\mathbb{Z} \mid |m|<۲\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۲\leq ۱\}$ $C=\{y\in\mathbb{Z} \mid y^۲\leq ۲y\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳+۲m=۳m^۲\}$

۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$

پ) $A\in B$ و $A\subset B$

۶ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

۷ اگر $A=\{۲ , x+۲y ,۴\}$ و $B=\{۴ ,۵ , x-y\}$ و $A=B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

۸ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم : $A-B\subseteq A$.

۹ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subset B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subset B\cup C$ ب) $A\cap C\subset B\cap C$

۱۰ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید اگر $A\subset B$ و $C\subset D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subset B\cap D$ ب) $A\cap C\subset B\cup D$

۱۱ الف) فرض کنید $A\subset\varnothing$ ثابت کنید $A=\varnothing$. ب) فرض کنید $U\subset A$ ثابت کنید $A=U$.

۱۲ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$ ب) $A-B=A$

۱۳ فرض کنید $X=\{a ,b ,c ,d ,e ,f ,g\}$، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای X محسوب می‌شود.

الف) $\{d ,g\}$ و $\{b\}$ و $\{a ,c ,e\}$ ب) $\{b ,e ,f\}$ و $\{c ,d\}$ و $\{a ,e ,g\}$

پ) $\{d ,f\}$ و $\{c\}$ و $\{a ,b ,e ,g\}$ ت) $\{a ,b ,c ,d ,e ,f ,g\}$

ث) $\{e\}$ و $\{f ,g\}$ و $\{d\}$ و $\{b ,c\}$ و $\{a\}$

۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

در این درس می‌خواهیم قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک را بررسی کنیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیریِ ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید یعنی می‌دانیم :

خاصیت جابه‌جایی $\quad \text{I)}\forall\ a,b\in IR\ ;\ a+b=b+a$

خاصیت شرکت‌پذیری $\quad \text{II)}\forall\ a,b,c\in IR\ ;\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c \end{cases}$

خاصیت توزیع‌پذیری × نسبت به + $\quad \text{III)}\forall\ a,b,c\in IR;\ \ a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

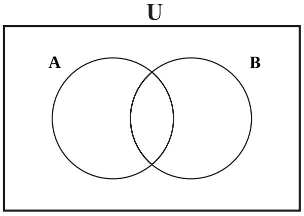
در مجموعه‌ها دو عمل $\cup$ و $\cap$ خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب (۷) و (۸) بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (د) از دو رنگ استفاده کنید).

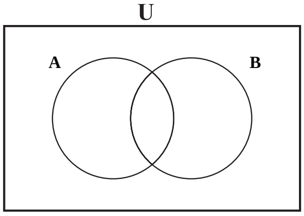
الف)

U



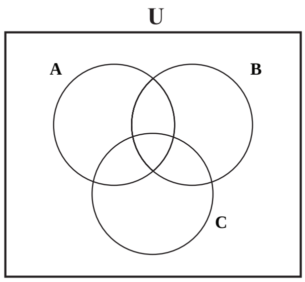
$A\cup B$

U

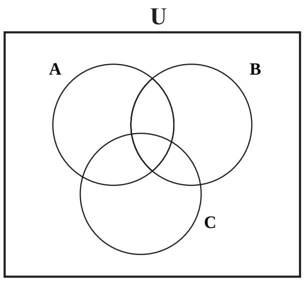


$B\cup A$

ب)

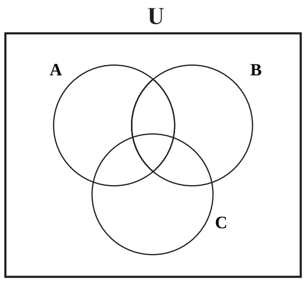


$A\cup(B\cup C)$

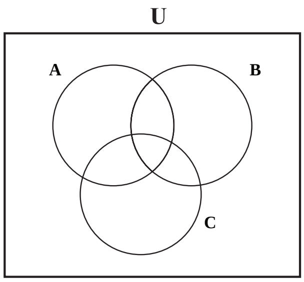


$(A\cup B)\cup C$

ج)

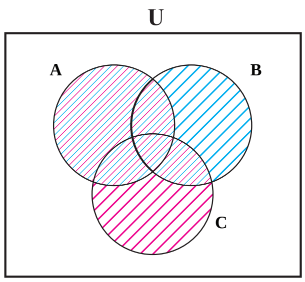


$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

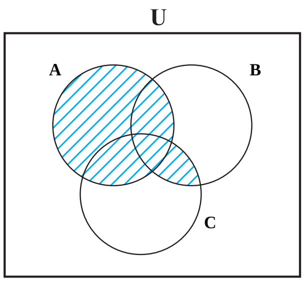


$A\cap(B\cup C)$

د)



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



$A\cup(B\cap C)$

۲ با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

یادآوری : برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$.

کار در کلاس

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای $\cup$ و $\cap$ اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید :

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$(A\cup B)=(B\cup A)$

$(A\cup B)=\{x\in U|\ x\in A\vee \ldots\}$ تعریف اجتماع

$(B\cup A)=\{x\in U|\ x\in B\vee \ldots\}$ جابه‌جایی $\vee$ تعریف اجتماع

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B، C از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U|\ \ldots\vee x\in(B\quad C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|x\in A\vee(x\in B\vee\ldots)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|(\ldots\vee x\in B)\vee x\in C\}$ شرکت‌پذیری $\vee$

$=\{x\in U|x\in(\ldots)\vee x\in C\}$ تعریف اجتماع

$=(A\cup B)\cup C$ تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه خاصیت توزیع‌پذیری $\cup$ نسبت به $\cap$ را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

[فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$]

$[x\in A\ \vee\ (x\in\ldots]$ تعریف اجتماع

$[(x\in A\vee(x\in B\wedge x\in\ldots)]$ تعریف اشتراک

$[x\in A\ \vee\ldots)\wedge(\ldots\vee x\in C)]$ توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$

$[x\in\ldots\wedge x\in\ldots]$ تعریف $\cup$

$x\in[(A\cup B)\cap\ldots]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq\ldots$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A\cup B)\cap(B\cup C)\subseteq\ldots$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که عکس خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنی فاکتورگیری از $A\cup$ است.)

تذکر : با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند :

۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A\cap A'=\varnothing$

۳) $A\cup U=U$ ۴) $A\cap U=A$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است).

الف) $(A\cup B)\cap (B'\cup A)=A$ ب) $(C\cap A)\cup (A'\cap C)=C$

پ) $A\cup (B\cup A')=U$ ت) $A-B=A\cap B'$

الف) $(A\cup B)\cap (B'\cup A)$ جابه‌جایی

$=(A\cup B)\cap (A\cup B')$

$=A\cup (B\cap B')$ فاکتورگیری (عکس خاصیت توزیع‌پذیری)

$=A\cup \varnothing$

$=A$

ب) $(C\cap A)\cup (A'\cap C)=(C\cap A)\cup (C\cap A')$ جابه‌جایی

$=C\cap (A\cup A')=C\cap U=C$ فاکتورگیری

پ) $A\cup (B\cup A')=A\cup (A'\cup B)$ جابه‌جایی

$=(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$ شرکت‌پذیری

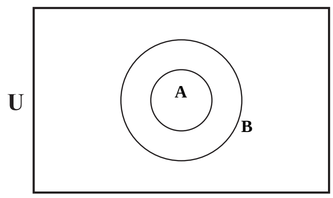
ت) $A-B=\{x\in U|x\in A \wedge x\notin B\}=\{x\in U|x\in A \wedge x\in B\}$ تعریف متمم

$=A\cap B'$ تعریف اشتراک

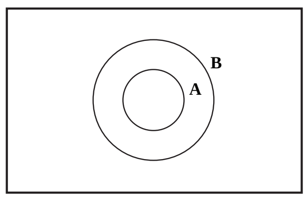
قضیه : برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U داریم :

الف) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$ ب) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

برهان :قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$ را هاشور بزنید.



$(A\cup B)$



$(A\cap B)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر یک از حالت‌های الف و ب،قضیه‌هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $A\cup B=B$ برای این منظور باید ثابت کنیم $(A\cup B)\subseteq B$ و $B\subseteq (A\cup B)$، رابطهٔ $B\subseteq (A\cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین به اثبات رابطه $(A\cup B)\subseteq B$ می‌پردازیم :

می‌دانیم: $B\subseteq B$
طبق فرض: $A\subseteq B$
$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq (B\cup B)\Rightarrow (A\cup B)\subseteq B$ (۲)

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cup B=B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow (A\cup B)=B$$

حال فرض کنیم $A\cup B=B$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq(A\cup B)\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cup B=B} A\subseteq B$

ب) ابتدا فرض کنیم $A\subseteq B$، تساوی $A\cap B=A$ را اثبات می‌کنیم:

(۱) با توجه به تعریف اشتراک داریم: $(A\cap B)\subseteq A$

(۲)
می‌دانیم : $A\subseteq A$
طبق فرض : $A\subseteq B$
$\Rightarrow (A\cap A)\subseteq(A\cap B)\Rightarrow A\subseteq(A\cap B)$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cap B=A$، به‌دست می‌آید)

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow (A\cap B)=A$$

حال فرض می‌کنیم $A\cap B=A$، ثابت می‌کنیم : $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq B\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cap B=A} A\subseteq B$

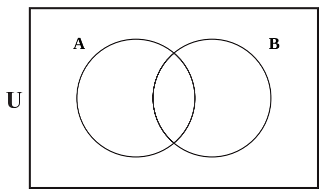
کار در کلاس

(قوانین جذب یا هم‌پوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند را با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم :

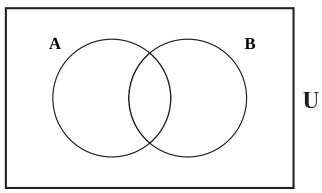
الف) $A\cup (A\cap B)=A$

ب) $A\cap (A\cup B)=A$

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید :



A∪(A∩B)



A∩(A∪B)

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C\subseteq D$ در این صورت $(C\cup D)=D$ و $(C\cap D)=C$ است.

اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq A \xRightarrow{\text{قضیه}} A\cup (\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq (A\cup B)\xRightarrow{\text{قضیه}} A\cap (\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

روش دیگری نیز برای اثبات قوانین جذب وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A \quad B)$

$=A\cap(\ldots\ldots)$ فاکتورگیری

$=A\cap\ldots\ldots=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\ldots\ldots)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\ldots\ldots\ldots)$ فاکتورگیری

$=A\cup\ldots\ldots\ldots=A$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{\text{جذب}}])=(A\cap B)\cup[\underbrace{(B\cup C)\cap\ldots\ldots}_{\text{جذب}}]$

$=\underbrace{(A\cap B)\cup\ldots\ldots}_{\text{جذب}}=\ldots\ldots$

ب) $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$

$(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]=(\underbrace{A\cup B'}_{C})\cap[(\underbrace{B\cap C}_{D})\cup(\underbrace{A\cup B'}_{C})]$ جابه‌جایی

$=(\underbrace{A\cup B'}_{C})$ جذب

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

حل :

الف) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\Rightarrow(X\cap X)\subseteq(A\cap A')\Rightarrow X\subseteq\ldots\ldots\ldots$ (۱)

از طرفی می‌دانیم $\varnothing\subseteq X$ و بنابراین $X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')$

$=[(A\cap B')\cap B]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(B'\cap B)]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=(A\cap\varnothing)\cap A'$ تعریف متمم

$=\varnothing\cap A'=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$

توزیع‌پذیری $\cap$ در $\cup$	$=(A\cap C')\cup(B\cap C')$
تبدیل اشتراک به تفاضل	$=(A-C)\cup(B-C)$

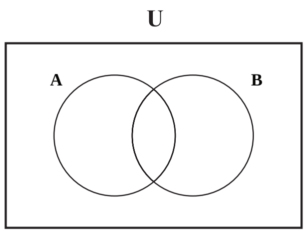
ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

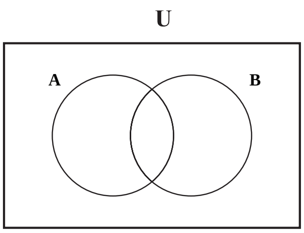
شرکت‌پذیری اجتماع	$=[(A-B)\cup(A\cap B)]\cup(B-A)$
تبدیل تفاضل به اشتراک	$=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B\cap A')$
عکس عمل توزیع‌پذیری	$=[A\cap(\ldots\ldots\cup\ldots\ldots)]\cup(B\cap A')$
تعریف متمم	$=(A\cap U)\cup(B\cap A')$
تعریف مرجع	$=A\cup(B\cap A')$
توزیع‌پذیری	$=(A\cup\ldots\ldots)\ \ldots\ldots\ (A\cup\ldots\ldots)$
تعریف متمم	$=(A\cup B)\cap U$
تعریف مرجع	$=A\cup B$

قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند،روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟





۲ اگر فرض کنیم $U=\{1$ و ۲ و .... و $10\}$ و $A=\{$۲و۳و۵و۸$\}$ و $B=\{$۳و۴و۶و۸$\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A' \quad B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند :

الف) $(A\cup B)'=(A'\cap B')$

ب) $(A\cap B)'=(A'\cup B')$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه وتعریف تساوی بین دو مجموعه،تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید. (باید ثابت کنید، $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$

$[x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow\ldots\ldots\wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A'\wedge\ldots\ldots\Rightarrow x\in(A'\cap B')]\Rightarrow(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$

روابط صفحه قبل برگشت‌پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$ که در این صورت تساوی الف اثبات می‌شود.

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(A-B)'=(A'\cup B)$ ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$

پ) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

مثال : با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$ ت) اگر $(A\cup B)=(A\cap B)$ آنگاه $A=B$

حل :

الف) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(A\cap B')]\cap C'$ جابه‌جایی

$=[(A\cap A)\cap B']\cap C'$ ....

$=(A\cap B')\cap C'$ $A\cap A=A$

$=A\cap(B'\cap C')$ شرکت‌پذیری

$=A-(B'\cap C')'$ تبدیل اشتراک به تفاضل

$=A-(B\cup C)$ قانون ....

ب) $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$ قانون دمورگان

$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$ توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$ قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$=(\varnothing\cap B)\cup[A\cap(B-C)]$ تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم

$=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$

$=A\cap(B-C)$

پ) با کمی تأمل متوجه می‌شویم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر دچار مشکل شده و این کار انجام نمی‌شود ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم :

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲,........,۱۰\}$

$A-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۵\}$

$(A-B)-C=\{۱,۲\}-\{۵,۶,۷\}=$..............

ت) وقتی می‌نویسیم $C=D$ یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی تساوی بین مجموعه‌ها به کار می‌بریم می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع و یا اشتراک بگیریم یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود $A\cup C=A\cup D$ و $A\cap C=A\cap D$

$$A\cup B=A\cap B \Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B \qquad (۱)$$

$$(A\cup B)=(A\cap B)\Rightarrow A\cup(A\cup B)=\dots\dots\cup(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xRightarrow{\text{قضیه}} \dots\dots\subseteq\dots\dots \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow A=B$

روش دوم : دربارهٔ روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم‌کلاسی خود گفتگو کرده و توضیح دهید :

$$A\subseteq(A\cup B)=(A\cap B)\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود $B\subseteq A$ و نتیجه می‌شود $A=B$.

کار در کلاس

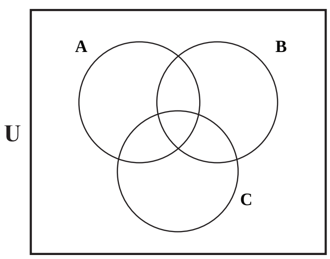
۱ اگر $U=\{1,2,\dots,20\}$ و $B=\{5,6,\dots,15\}$ و $A=\{1,2,\dots,10\}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)$

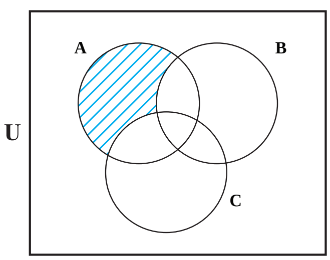
ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])$

(راهنمایی : ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.



الف) اعضایی که فقط در A باشند.



ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه هستند.

پ) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند.

ت) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبلاً با تعریف زوج مرتب آشنا شده‌اید و می‌دانید که «هر دو شیئی مانند x و y تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود و با نماد (x,y) نشان می‌دهیم» و البته می‌دانیم که $(x,y)=(z,t)$ اگر و تنها اگر $x=z$ و $y=t$.

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعهٔ A و B این امکان را برای ما فراهم می‌سازد تا مجموعهٔ جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب بوده و هر یک از این زوج‌های مرتب از اعضای A و B ساخته می‌شوند. بنابراین مجموعهٔ حاصل، دارای اعضایی از جنس زوج مرتب بوده و به‌اعضای A یا B شبیه نبوده و فقط اعضای A و B در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x,y) متعلق به $A\times B$، همواره مؤلفه یا مختصِ اول یعنی x باید از مجموعهٔ A و متناظراً مؤلفهٔ دوم یعنی y باید از مجموعهٔ B باشد.

مثال : اگر $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۴,۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$$(A\times B)=\{(۲,۴),(۲,۵),\ldots\ldots,\ldots\ldots,(۶,۴),\ldots\ldots\}$$

$$(B\times A)=\{(۴,۲),(۴,۴),\ldots\ldots,(۵,۲),\ldots\ldots,\ldots\ldots\}$$

واضح است که $A\times B\neq B\times A$ (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند، مثلاً $(۲,۴)\neq(۴,۲)$ و $(۲,۴)\in A\times B$ و $(۲,۴)\notin B\times A$).

کار در کلاس

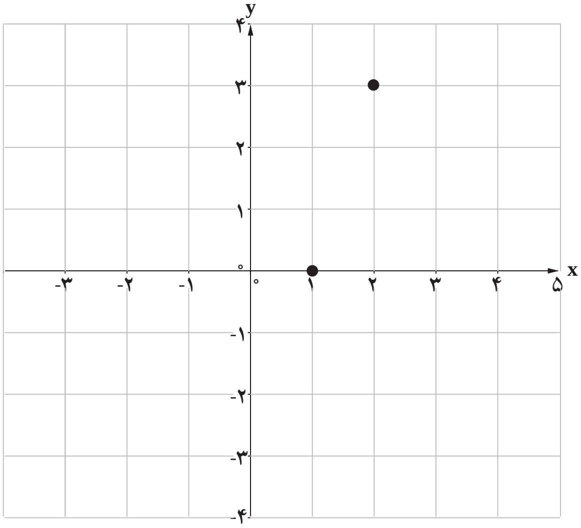
در مثال قبل دیدید که در مجموعهٔ $A\times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل ۶ زوج مرتب به‌وجود آمد حال اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و اصل ضرب نشان دهید، $n(A\times B)=mk$

فعالیت

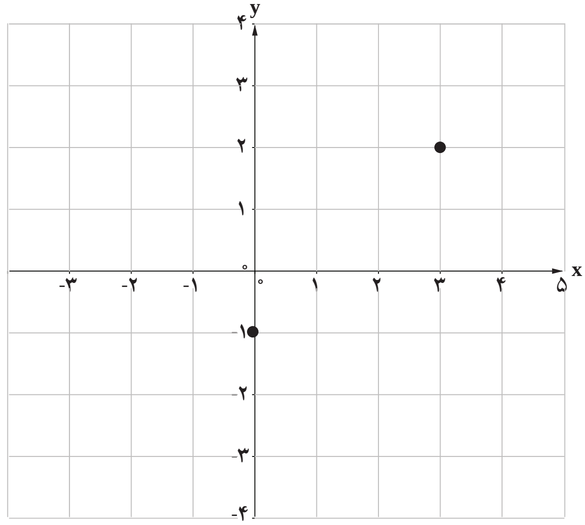
۱ اگر $A=\{۱,-۱,۲,-۲\}$ و $B=\{۰,۳,۴\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل داده و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A\times B=$

$B\times A=$



نمودار مختصاتی $A\times B$

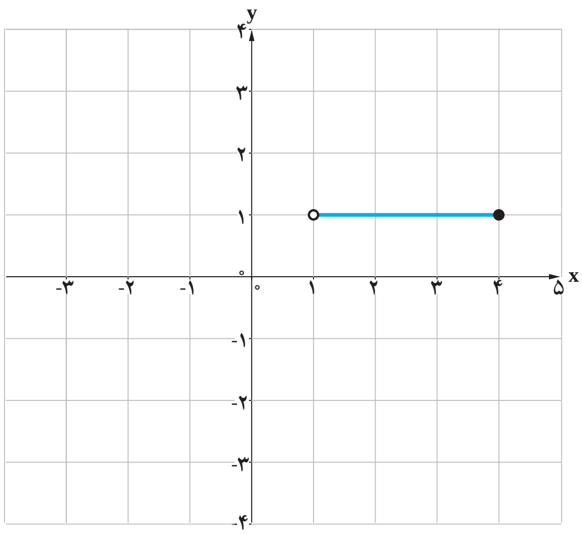


نمودار مختصاتی $B\times A$

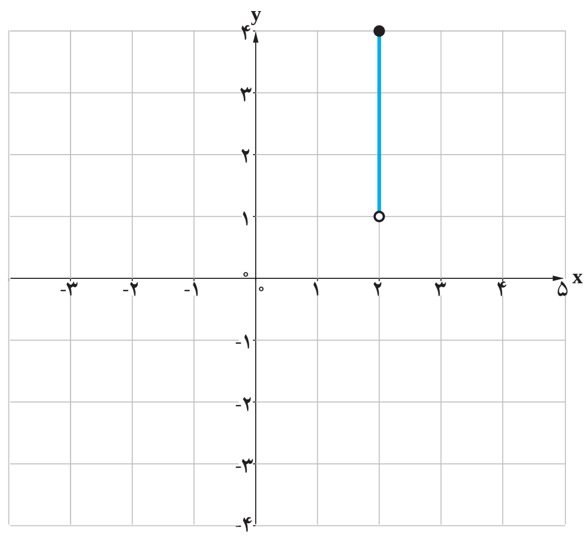
۲ اگر فرض کنیم $A=(۱,۴]$ و $B=\{۱,۲\}$ در این صورت نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A\times B=\{(x,y)|x\in(۱,۴)\wedge y\in B\}$$

$$B\times A=\{(x,y)|(x=۱\vee x=۲)\wedge ۱<y\leq ۴\}$$



نمودار $A\times B$

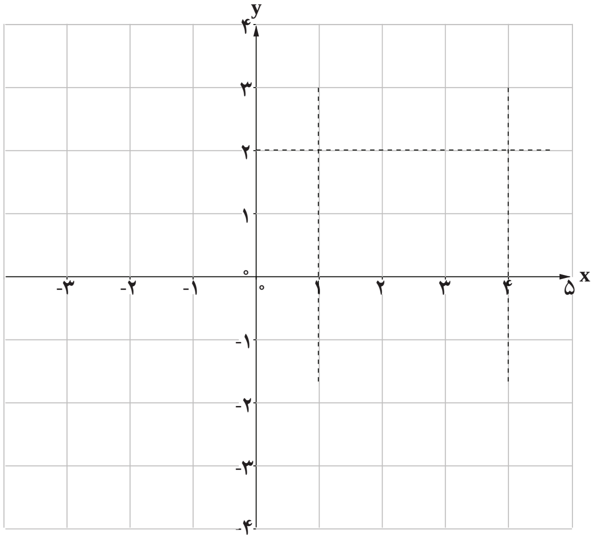


نمودار $B\times A$

۳ اگر فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۰,۱,۲\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.

۴ در صورتی که $A=[۱,۴]$ و $B=[۰,۲]$ در این صورت نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A\times B=\{(x,y)|۱\leq x\leq ۴\wedge ۰\leq y\leq ۲\}$$



۵ در صورتی که فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ در این صورت حاصل‌ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^۲$ را چگونه تعبیر می کنید؟

کار در کلاس

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند در این صورت :

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم :

فرض $A\times\varnothing\neq\varnothing$ کنیم (فرض خلف) در این صورت حداقل یک عضو مانند (x,y) در .... باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \cdots\cdots\cdots\wedge\underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف باطل شده و حکم بر قرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می‌کنیم $A=B$.

$$A\neq\varnothing, B\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in A\wedge\exists\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists(x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A}(x,y)\in\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge\cdots\cdots\Rightarrow\cdots\cdots\wedge B\subseteq A$$

$$\Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است)

تمرین

۱ با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\cap(B\cup A)$

ب) $(A\cup B)-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)\Rightarrow B=C$

۵ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}, B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$

پ) $A=[۲,۶], B=[۳,۸]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$

۴ پیشامدهای مستقل و وابسته

دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم، سرشار از وقایعی است که به یکدیگر وابسته‌اند. مثلاً سونامی‌های بزرگ پس از زلزله‌های عظیم در داخل دریا اتفاق می‌افتند. بسیاری از رفتارهای انسانی نیز به یکدیگر وابسته‌اند. به عنوان مثال، اخلاق نیکوی یک فرد و روابط اجتماعی او به یکدیگر وابسته‌اند. از سوی دیگر بعضی از رخدادها به یکدیگر وابسته نیستند و اصطلاحاً، مستقل از یکدیگرند. آیا گروه خونی شما به گروه خونی دوستتان وابسته است؟ البته تشخیص وابستگی و یا مستقل بودن خیلی از پیشامدها، واضح نیست و به ابزاری دقیق برای بررسی آن نیاز داریم.

فعالیت

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد.

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را بنویسید.

$S=\{(ر,۱), \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

$A=\{\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

$B=\{\dots, \dots\}$

$A\cap B=\{\cdots\cdots\}$

۲ احتمال وقوع پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را تعیین کنید.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \quad , \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \quad ,$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید، یعنی $P(A|B)$ را به دست آورید.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

۳ با مقایسه $P(A|B)$ و $P(A)$، آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A داشته است؟

۴ اگر $P(A|B)=P(A)$، چه رابطه‌ای بین $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cap B)$ برقرار است؟

۵ در تساوی $P(A|B)=P(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $P(B|A)=P(B)$ را نتیجه بگیرید.

پیشامدهای A و B را **مستقل** می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، **وابسته** نامیده می‌شوند.

اگر $P(A)$ و $P(B)$ ناصفر باشند، برقراری تساوی $P(A|B)=P(A)$ و یا تساوی $P(B|A)=P(B)$ نیز مستقل بودن A و B را نتیجه می‌دهد. در فعالیت بالا، $P(A|B)=P(A)$، بنابراین پیشامدهای A و B مستقل‌اند. مستقل بودن این دو پیشامد، یعنی رو آمدن سکه و ۶ آمدن تاس، بدون محاسبه احتمال‌ها نیز قابل مشاهده است ولی مستقل بودن از پیشامدها چندان واضح نیست.

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهده عدد ۳ در تاس اول و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن A و B را بررسی می‌کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد، بنابراین فضای نمونه‌ای این آزمایش $n(S)=۶\times۶=۳۶$ عضو دارد. اکنون پیشامدهای A، B و $A\cap B$ و احتمال های آنها را به دست می آوریم.

$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\ ,$$

$$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\ ,$$

$$A\cap B=\{(۳,۶)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس $P(A\cap B)=P(A)P(B)$، بنابراین پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند.

مستقل بودن بسیاری از پیشامدها نیاز به بررسی ندارد، به عنوان مثال، قبولی در یک درس برای دو نفر و یا جنسیت فرزندان یک خانواده مستقل از یکدیگرند. از استقلال این پیشامدها می‌توانیم در حل مسائل استفاده کنیم.

مثال ۲) احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰ درصد است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود، را به دست می‌آوریم.

اگر $P(A)$ احتمال قبولی زهرا و $P(B)$ احتمال قبولی ریحانه در این درس باشد، احتمال قبولی حداقل یکی از آنها، همان $P(A\cup B)$ است و می‌دانیم که :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

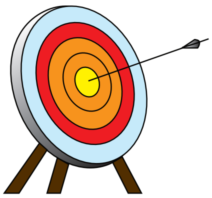
با توجه به مستقل بودن A و B، $P(A\cap B)=P(A)P(B)$، پس

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=۰/۹+۰/۷-۰/۶۳\\&=۰/۹۷\end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ سکه سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۲ در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل‌اند.



۳ در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری

مثال ۳) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است، دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد سفید بودن مهره اول و B پیشامد سیاه بودن دومین مهره باشد،

الف) احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

ب) پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا وابسته؟

حل) با توجه به رابطه $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ در احتمال شرطی داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

برای بررسی وابستگی یا استقلال این پیشامدها، $P(B)$ و $P(B|A)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

$P(B)=P$ (مهره دوم سیاه)

$=P$ [(مهره اول سفید و مهره دوم سیاه) یا (مهره اول سیاه و مهره دوم سیاه)]

$=P[(A\cap B)\cup(A'\cap B)]$ (A' متمم پیشامد A است.)

$$=P(A\cap B)+P(A'\cap B)$$

$$=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')$$

$$=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}$$

$$=\frac{۸}{۱۳}$$

تذکر: (باز کردن $P(B)=\frac{۸}{۱۲}$)

از سوی دیگر $P(B|A)=\frac{۸}{۱۲}$، پس $P(B|A)\neq P(B)$، بنابراین A و B وابسته‌اند.

کار در کلاس

در مثال صفحه قبل، اگر مهره دوم را پس از جای‌گذاری مهره اول در جعبه بیرون آوریم. با محاسبه $P(B)$ و $P(B|A)$، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید.

مستقل بودن پیشامدهای A و B در کار در کلاس بالا قابل حدس زدن است، زیرا با جای‌گذاری مهره اول انتخاب شده در جعبه، شرایط برای انتخاب مهره دوم، دقیقاً همانند انتخاب مهره اول است و در حقیقت آزمایش اول تکرار می‌شود. در حالت کلی، انتخاب‌هایی که با جای‌گذاری انجام می‌شوند، مستقل هستند.

مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می‌شود.

سه پیشامد A، B و C را مستقل می‌گوییم هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد $A_۱$، $A_۲$، …، A_n را مستقل می‌گوییم هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از آنها با حاصل‌ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال ۴) خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است.

الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل) فرض کنید A پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم:

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\text{دختر، دختر، دختر، دختر})\\&=P(\text{دختر})\,P(\text{دختر})\,P(\text{دختر})\,P(\text{دختر})\\&=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\\&=\frac{۱}{۱۶}\end{aligned}$$

مشابه بالا، اگر B پیشامد دختر بودن فقط فرزند اول و آخر این خانواده باشد، سپس:

$$\begin{aligned}P(B)&=P(\text{دختر، پسر، پسر، دختر})\\&=P(\text{دختر})\,P(\text{پسر})\,P(\text{پسر})\,P(\text{دختر})\\&=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\\&=\frac{۱}{۱۶}\end{aligned}$$

اکنون فرض کنید C پیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد، یکی از حالت‌ها به صورت زیر است :

فرزند اول	فرزند دوم	فرزند سوم	فرزند چهارم
دختر	پسر	دختر	پسر

و احتمال پیشامد بالا عبارت است از :

$$P(\text{دختر، پسر، دختر، پسر}) = P(\text{دختر})\ P(\text{پسر})\ P(\text{دختر})\ P(\text{پسر}) = \frac{۱}{۱۶}$$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به $\binom{۴}{۲} = ۶$ حالت میسر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان $\frac{۱}{۱۶}$ است، بنابراین :

$$P(C) = ۶ \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

مثال ۵) ۸۰ درصد افراد شهری با سواد هستند. ۵ نفر از این شهر انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی‌سواد باشند را به دست می‌آوریم. احتمال اینکه اولین نفر بی‌سواد باشد، ۲۰ درصد یا ۰/۲ است. با توجه به اینکه جای‌گذاری انجام نشده است، بی‌سواد بودن فرد دوم مستقل از بی‌سوادی فرد اول نیست ولی چون انتخاب از یک جامعه پر جمعیت انجام می‌شود، می‌توان فرض کرد که بی‌سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی‌سواد بودن هر کدام از آنها ۰/۲ است. پس :

$$P(\text{هر پنج نفر بی‌سواد}) = P(\text{نفر اول بی‌سواد})\ P(\text{نفر دوم بی‌سواد})\ P(\text{نفر سوم بی‌سواد})\ P(\text{نفر چهارم بی‌سواد})\ P(\text{نفر پنجم بی‌سواد})$$
$$= (۰/۲)^{۵}$$
$$= ۰/۰۰۰۳۲$$

تمرین

۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

۳ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

(i) A' و B

(ii) A' و B'

۴ در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۵ از مجموعه $\{۱، ۲، ۳، \ldots، ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام

شود، مطلوب است احتمال اینکه :

(i) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

(ii) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

(iii) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

۷ در یک امتحان چهار گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که :

(i) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح بدهد.

(ii) تنها به پنج سؤال اول پاسخ صحیح بدهد.

(iii) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح بدهد.

۸ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها سوخته است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

(i) هر سه لامپ معیوب باشند.

(ii) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۹ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همه افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟