پاسخ های تشریحی آزمون هفتگی شماره ۲ – قسمت ۲

۸ آبان ۹۳- درس ریاضی تجربی

سوال ۴۱:

گزینه‌ی «۲»

$$a^2-a+1=1 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{a=1} 2a+\frac{1}{a}=3 \\ \xrightarrow{a=1} 4a+3=7 \end{cases} \Rightarrow [1,3]\cup[3,7]=[1,7]$$

$a=0$ قابل قبول نیست، چون در بازه‌ی $[a^2-a+1, 2a+\frac{1}{a}]$ مقدار $\frac{1}{a}$ قابل محاسبه نیست. بنابراین: $3a^2-1=3(1)^2-1=2$

سوال ۴۲:

گزینه‌ی «۲»

با فرض $x \neq \pm\sqrt{2}$ داریم:

$$\frac{4(x+\sqrt{2})+4(x-\sqrt{2})+2}{x^2-2}=0 \Rightarrow 8x+2=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1}{4} \neq \pm\sqrt{2} \text{ قق} \Rightarrow 4x^2+2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

سوال ۴۳:

گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم برای تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول، ابتدا باید ریشه‌یابی کنیم. پس:

$$A=(a-3)x+b-2=0 \Rightarrow (a-3)x=2-b \Rightarrow x=\frac{2-b}{a-3}$$

با توجه به جواب نامعادله، یعنی $[1,+\infty)$ داریم:

$$\frac{2-b}{a-3}=1 \Rightarrow 2-b=a-3 \Rightarrow a+b=5$$

سوال ۴۴:

گزینه‌ی «۴»

$$(1): \frac{-x^2-x+2}{|x+1|} \geq 0 \Rightarrow \frac{-(x-1)(x+2)}{|x+1|} \geq 0$$

$\Rightarrow$

x		-2		-1		1	
کسر	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

$\Rightarrow (1)$ جواب $: x \in [-2,1]-\{-1\}$

$(2): \frac{1}{x^2} \geq 0 \Rightarrow (2)$ جواب $: IR-\{0\}$

اشتراک جواب‌های ۱ و ۲ $: [-2,1]-\{-1,0\}$

با توجه به گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی «۴» بخشی از جواب است.

سوال ۴۵:

گزینه‌ی «۴»

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-3}{x+2}<0$$

$$\frac{x^2+3x+2-x^2+4x-3}{(x-1)(x+2)}<0 \Rightarrow \frac{7x-1}{(x-1)(x+2)}<0$$

مخرج کسر برای اعداد صحیح مثبت مخالف یک، مثبت است پس باید $7x-1<0$ که برای هیچ عدد صحیح مثبتی برقرار نیست.

سوال ۴۶:

گزینه‌ی «۲»

$$\frac{\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{4}\cos(\frac{-3\pi}{4})+\sin\frac{5\pi}{4}\sin(\frac{-3\pi}{4})}=\frac{\sin(\frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})}{\cos(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{4})}$$

$$=\frac{\sin 2\pi}{\cos 2\pi}=\tan 2\pi=0$$

سوال ۴۷:

گزینه‌ی «۳»

$$\frac{\cos 2\alpha(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}$$

$$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}$$

$$\underset{\sin\alpha \neq -\cos\alpha}{=} \cos\alpha-\sin\alpha$$

سوال ۴۸:

گزینه‌ی «۱»

$$\frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x}}=\sin 2x$$

سوال ۴۹:

گزینه‌ی «۳»

کم‌ترین مقدار بازه‌ی حاصل از اشتراک $[-3,a+2]$ و $[a,b]$، برابر با (-2) است، یعنی $a=-2$، با جای‌گذاری این مقدار در رابطه‌ی مفروض سؤال داریم:

$$[-2,b]\cap[-3,0]=[-2,-1] \Rightarrow b=-1 \Rightarrow a.b=2$$

سوال ۵۰:

گزینه‌ی «۳»

به هر سه قسمت نامعادله، عبارت $(۱-x)$ را اضافه می‌کنیم، داریم:

$$(۱-x)+x-m \le ۲x-۱+(۱-x) \le x+m+(۱-x)$$
$$\Rightarrow ۱-m \le x \le ۱+m \Rightarrow x\in[۱-m,۱+m]$$

پس با توجه به فرض سؤال که مجموعه‌ی جواب این نامعادله‌ها بازه‌ی $[-۱,۳]$ است، داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱-m=-۱ \Rightarrow m=۲ \\ ۱+m=۳ \Rightarrow m=۲ \end{cases}$$

سوال ۵۱:

گزینه‌ی «۱»

$$\frac{x^۲+۲x+۲}{x^۲+۲x}-\frac{x+۳}{x+۲}=\frac{x+۱}{x} \Rightarrow \frac{x^۲+۲x+۲}{x^۲+۲x}=\frac{x+۱}{x}+\frac{x+۳}{x+۲}$$

$$\frac{x^۲+۲x+۲}{x^۲+۲x}=\frac{x^۲+۳x+x^۲+۳x+۲}{x^۲+۲x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲+۲x+۲}{x^۲+۲x}=\frac{۲x^۲+۶x+۲}{x^۲+۲x}$$

$$\xrightarrow{x\neq ۰,-۲} x^۲+۲x+۲=۲x^۲+۶x+۲ \Rightarrow x^۲+۴x=۰$$

$$\Rightarrow x(x+۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \ \text{غ‌ق‌ق} \\ x=-۴ \end{cases}$$

سوال ۵۲:

گزینه‌ی «۱»

باید ۳ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه انتخاب شود، پس داریم:

$$\text{احتمال مورد نظر}: P=\frac{\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۳}}{\binom{۸}{۶}}=\frac{۴\times۴}{\frac{۸\times۷}{۲}}=\frac{۴}{۷}$$

سوال ۵۳:

گزینه‌ی «۳»

با توجه به فرض مسأله، برای نفر اول، تولد در هر ۱۲ ماه امکان‌پذیر است و برای نفر دوم هر ماهی به جز ماه تولد نفر اول و برای نفر سوم هر ماهی، به جز ماه‌های تولد نفر اول و نفر دوم و به همین ترتیب برای نفر چهارم هر ماهی به جز ماه‌های تولد نفرات اول، دوم و سوم امکان‌پذیر است، بنابراین:

$$\text{احتمال مورد نظر}: P=\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}=\frac{۵۵}{۹۶}$$

سوال ۵۴:

گزینه‌ی «۴»

$$\begin{cases} A: \text{پیشامد آن‌که فرد انتخاب شده فوتبالیست باشد.} \\ B: \text{پیشامد آن‌که فرد انتخاب شده ۱۷ ساله باشد.} \end{cases}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

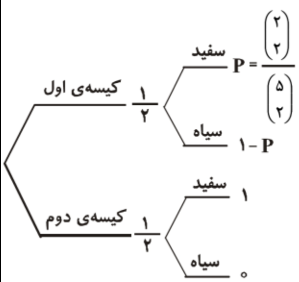
از طرفی A و B مستقل هستند، پس داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\%۳۰\times\%۹۰=\%۲۷$$
$$\Rightarrow P(A\cup B)=\%۳۰+\%۹۰-\%۲۷=\%۹۳$$

سوال ۵۵:

گزینه‌ی «۱»

با توجه به نمودار درختی زیر مسأله را حل می‌کنیم:



$$P(\text{هر دو سفید})=\frac{۱}{۲}\times\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times۱=\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۲}=\frac{۱۱}{۲۰}=۰/۵۵$$

سوال ۵۶:

گزینه‌ی «۲»

با طرفین وسطین کردن داریم: $x^۲-tx=۱ \Rightarrow tx=x^۲-۱$

$$t=\frac{x^۲-۱}{x}\xrightarrow{x=۱+\sqrt{۲}} t=\frac{(۱+\sqrt{۲})^۲-۱}{۱+\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{۱+۲+۲\sqrt{۲}-۱}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{۲+۲\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=۲(\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}})=۲$$

سوال ۵۷:

گزینه‌ی «۴»

$$\frac{x^۲-x+۱+x^۲+x+۱}{(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)}=\frac{۲x^۲+۲}{x^۴+x^۲+۱}=\frac{x^۲+۳}{x^۴+x^۲+۱}$$

$$\Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \Rightarrow x_۱+x_۲=۱+(-۱)=۰$$

توجه: $x=\pm۱$ مخرج کسرها را صفر نمی‌کنند، پس هردو قابل قبول هستند.

سوال ۵۸:

گزینه‌ی «۳»

می‌دانیم برای تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول، ابتدا باید ریشه‌یابی کنیم. پس:

$$A=(a-3)x+b-2=0 \Rightarrow (a-3)x=2-b \Rightarrow x=\frac{2-b}{a-3}$$

با توجه به جواب نامعادله یعنی $[1,+\infty)$ داریم:

$$\frac{2-b}{a-3}=1 \Rightarrow 2-b=a-3 \Rightarrow a+b=5$$

سوال ۵۹:

گزینه‌ی «۲»

با توجه به مثبت بودن عبارت x^2+x+1، طرفین نامعادله را در عبارت x^2+x+1 ضرب می‌کنیم، داریم:

$$x^5+x-2<(x^2+x+1)(x^3-x^2)$$

$$\Rightarrow x^5+x-2<x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2$$

$$\Rightarrow x^2+x-2<0 \Rightarrow -2<x<1$$

سوال ٦۰:

گزینه‌ی «۲»

ابتدا طرفین نامعادله‌ی مضاعف را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$-2\le\frac{x-2}{2}\le 2 \overset{\times 2}{\Longrightarrow} -4\le x-2\le 4$$

حال به سه عبارت نامعادله دو واحد می‌افزاییم:

$$-4\le x-2\le 4 \overset{+2}{\Longrightarrow} -2\le x\le 6$$

بنابراین بازه‌ی $[-2,6]$، مجموعه جواب نامعادله‌ی مضاعف داده شده است.
