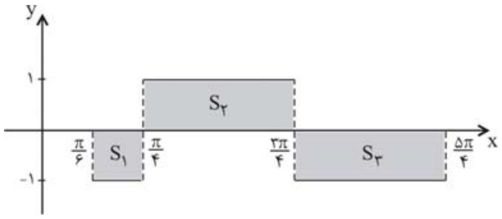
قضایای انتگرال معین

رابطه‌ی انتگرال معین و مساحت

انتگرال معین تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ برابر مساحت علامت‌دار محصوربین تابع f با محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ است، یعنی در هر بازه‌ای که تابع f بالای محور x هاست، حاصل انتگرال‌معین با مساحت درآن بازه برابر و در هر بازه‌ای که تابع f پایین محور x هاست، حاصل انتگرال‌معین با قرینه‌ی مساحت درآن بازه برابراست.



به عنوان مثال اگر نمودار تابع f در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۴}\right]$ شکل مقابل باشد، آنگاه

حاصل $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۴}} f(x)\,dx$ برابراست با:

$$\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۴}} f(x)\,dx=-S_۱+S_۲-S_۳=-\left(\frac{\pi}{۱۲}\times ۱\right)+\left(\frac{\pi}{۲}\times ۱\right)-\left(\frac{\pi}{۲}\times ۱\right)=\frac{-\pi}{۱۲}$$

ویژگی‌های اولیه (قضایای اولیه)

قضیه اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیردر بازه‌ی $[a\,,\,b]$ باشند آنگاه:

(۱) $\int_a^a f(x)\,dx=۰$

(۲) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

(۳) $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

(۴) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(u)\,du$

(۵) $\int_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

(۶) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

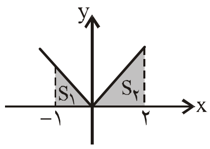
(۷) اگر $f(x)\le g(x)\ \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

انتگرال معین توابع شامل قدر مطلق

برای محاسبه‌ی انتگرال توابع شامل قدر مطلق، باید قدر مطلق را در فاصله‌ی بین حدود انتگرال و ریشه‌های داخل قدر مطلق تعیین علامت کنیم و سپس تک تک انتگرال‌ها را محاسبه کنیم.

(۱) $\int_{-۱}^{۲}|x|\,dx=\int_{-۱}^{۰}(-x)\,dx+\int_{۰}^{۲}(x)\,dx=-(۰-\frac{۱}{۲})+(۲-۰)=\frac{۵}{۲}$

➢ **تذکر (۱):** در بعضی از موارد اگر نمودار قدرمطلقی از پاره‌خط‌های شکسته تشکیل شده باشد می‌توانیم با رسم نمودار حاصل انتگرال را بیابیم.



(۲) $\int_{-۱}^{۲}|x|\,dx=S_۱+S_۲=\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۵}{۲}$

انتگرال معین توابع شامل جزء صحیح

در محاسبه‌ی این‌گونه انتگرال‌ها باید حدود انتگرال را به گونه‌ای در نظر بگیریم که برای تابع‌تحت انتگرال در هر یک از فاصله‌ها تنها یک مقدار صحیح بدست آید.

(۱) $\int_{۰}^{۱}[۲x]\,dx=$

$$۰<x<۱\rightarrow\ ۰<۲x<۲\ \Rightarrow\begin{cases}۰<۲x<۱\rightarrow[۲x]=۰\rightarrow ۰<x<\frac{۱}{۲}\\ ۱<۲x<۲\rightarrow[۲x]=۱\rightarrow\frac{۱}{۲}<x<۱\end{cases}$$

و $\int_{۰}^{۱}[۲x]\,dx=\int_{۰}^{\frac{۱}{۲}}(۰)\,dx+\int_{\frac{۱}{۲}}^{۱}(۱)\,dx=۰+(۱-\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}$

➢ **تذکر (۲):** در بعضی از موارد که رسم تابع $y=[f(x)]$ ساده باشد، با رسم نمودار حاصل انتگرال را می‌یابیم.

توجه: در محاسبه‌ی انتگرال معین توابع دارای قدر مطلق و جزء صحیح روش کتاب درسی، رسم نمودار است. اما روش ساده‌تر (در اکثر موارد) این است که از انتگرال‌گیری (قضیه‌ی بنیادی دوم) استفاده کرد.

تابع اولیه و انتگرال نامعین

- تابع اولیه به عنوان ضدمشتق و فرمول‌های اولیه
- ساده‌سازی و انتگرال‌گیری

عمل انتگرال‌گیری (یافتن تابع اولیه) ضد عمل مشتق‌گیری است. به عبارت دیگر اگر $F(x)$ را تابع اولیه (ضد مشتق) $f(x)$ در نظر بگیریم، آنگاه $F'(x)=f(x)$ و می‌نویسیم:

$$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+c \quad \text{یا} \quad \int f'(x)\,dx=f(x)+c}$$

❖ **نتیجه‌ی [۱]:** مشتق انتگرال نامعین هر تابع، تابع تحت انتگرال (داخل انتگرال) را می‌دهد. به عبارت دیگر:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x=f(x)$$

■ **مثال:** اگر $\int f(x)\,dx=\tan x+c$، آنگاه $f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ کدام است؟

◀ **حل:** مشتق عبارت سمت راست عبارت داخل انتگرال را می‌دهد بدون dx.

$$f(x)=۱+\tan^۲ x\to f'(x)=۲\tan x(۱+\tan^۲ x)\to f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)=۲(۱)(۲)=۴$$

■ **مثال:** اگر $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^۲+۱}}=A(x^۲+۱)^k+c$ باشد، A و k را بیابید.

◀ **حل:** مشتق عبارت سمت راست عبارت داخل انتگرال را می‌دهد، پس ازسمت راست مشتق گرفته و با عبارت داخل انتگرال بدون dx برابر قرار می‌دهیم:

$$Ak(۲x)(x^۲+۱)^{k-۱}=x(x^۲+۱)^{\frac{-۱}{۲}}\Rightarrow k-۱=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow k=\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲Ak=۱\Rightarrow A=۱$$

❖ **نتیجه‌ی [۲]:** هر تابع دارای بی‌شمار تابع اولیه است که اختلاف آنها در یک عدد ثابت است.

به عنوان مثال اگر $x^۲+۴x$ یک تابع اولیه‌ی تابع $f(x)$ باشد آنگاه $(x+۲)^۲$ نیز یک تابع اولیه‌ی $f(x)$ است زیرا تفاضل آن‌ها عدد ثابت ۴ است.

❖ **نتیجه‌ی [۳]:** ازآنجایی که $(F(ax+b))'=aF'(ax+b)$ با فرض $F'(x)=f(x)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx=\frac{۱}{a}F(ax+b)+c}$$

فرمول‌های اولیه

با استفاده از فرمول‌های مشتق میتوانیم فرمول‌های اولیه‌ی انتگرال را بیابیم، به جدول زیر توجه کنید:

	فرمول	مثال
۱	$\int dx=x+c$	
۲	$\int x^n dx=\frac{x^{n+۱}}{n+۱}+c$ ، $n\neq-۱$	$\int\frac{dx}{x^۲}=\int x^{-۲}dx=-x^{-۱}+c=\frac{-۱}{x}+c$ $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{\frac{-۱}{۲}}dx=\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+c=۲\sqrt{x}+c$ $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{۱}{۲}}dx=\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}+c=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}+c$
۳	$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$	$\int ۳x^۲dx=۳\frac{x^۳}{۳}+c=x^۳+c$
۴	$\int(f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$	$\int(\sqrt{x}+۲x)\,dx=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}+x^۲+c$

	فرمول	مثال
۵	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad ، \quad n \neq -1$	$\int (3x-4)^4 dx = \frac{(3x-4)^5}{3\times 5} + c$
۶	$\int \sin ax\, dx = \frac{-1}{a}\cos ax + c$	$\int \sin 3x\, dx = \frac{-1}{3}\cos 3x + c$
۷	$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$	$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$
۸	$\int (1+\tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$	$\int (1+\tan^2 7x)dx = \frac{1}{7}\tan 7x + c$
۹	$\int (1+\cot^2 ax)dx = \frac{-1}{a}\cot ax + c$	$\int (1+\cot^2 4x)dx = \frac{-1}{4}\cot 4x + c$
۱۰	$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{Ln}\lvert x \rvert + c$	
۱۱	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\mathrm{Ln}\lvert ax+b \rvert + c$	$\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\lvert 2x-1 \rvert + c$
۱۲	$\int e^x dx = e^x + c$	
۱۳	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$\int e^{3x+6} dx = \frac{1}{3}e^{3x+6} + c$

ساده‌سازی و انتگرال‌گیری

الف– با استفاده از اتحادها، گویا کردن مخرج کسر و تفکیک کسر می‌توانیم بعضی از انتگرال‌ها را ساده کرده و سپس حاصل انتگرال را بیابیم.

مثال : $\int \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^5}dx$ **حل :** $\int \frac{x^6-1}{x^5}dx = \int x\,dx - \int x^{-5}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-4}}{-4} + c$

مثال : $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx$ **حل :** $\int \frac{(x+1)+1}{\sqrt{x+1}}dx = \int \sqrt{x+1}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} + c$

ب– با استفاده از اتحادهای مثلثاتی می‌توانیم بعضی از انتگرال‌ها را ساده نمود و سپس حاصل را به‌دست آورد.

مثال : $\int \frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}dx$ **حل :** $\int \frac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x}dx = \int dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = x - \frac{1}{2}\tan x + c$

تابع اولیه و انتگرال نامعین — **قضیه‌ی تعویض متغیر**

قضیه‌ی تغییر متغیر (خارج از کتاب درسی)

می‌دانیم $(u^{n+1})' = (n+1)u'.u^n$ و یا $u'.u^n = \frac{(u^{n+1})'}{n+1}$ پس:

$$\boxed{\int u'.u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \ ، \ n \neq -1}$$

باید عامل u را به ترتیبی در نظر بگیریم که مشتق آن در کنارش ظاهر شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

۱) $\int x^2(x^3+1)^3 dx$

با فرض $u = x^3+1$ آنگاه $u' = 3x^2$، کافی است (۳) را در داخل انتگرال ضرب کرده و $\frac{1}{3}$ را بیرون نگه داریم.

$$= \frac{1}{3}\int (3x^2)(x^3+1)^3 dx = \frac{1}{3}\int u'.u^3 dx = \frac{1}{3}.\frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{12}(x^3+1)^4 + c$$

۲) $\int \sin^3 x.\cos x\, dx$

با فرض $u = \sin x$، $u' = \cos x$ پس:

$$\int u'.u^{3}dx=\frac{u^{4}}{4}+c=\frac{\sin^{4}x}{4}+c$$

➢ **تذکر (۵):** به فرمول‌های زیر دقت کنید:

$1)\int u'\cos u\,dx=\sin u+c$	**مثال:** $\int x^{2}\cos x^{3}dx=\frac{1}{3}\sin x^{3}+c$
$2)\int u'\sin u\,dx=-\cos u+c$	**مثال:** $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=-2\cos\sqrt{x}+c$
$3)\int u'(1+\tan^{2}u)dx=\tan u+c$	**مثال:** $\int \frac{1}{x^{2}}(1+\tan^{2}\frac{1}{x})dx=-\tan\frac{1}{x}+c$
$4)\int u'(1+\cot^{2}u)dx=-\cot u+c$	**مثال:** $\int \cos x(1+\cot^{2}(\sin x))dx=-\cot(\sin x)+c$

توجه: قضیه‌ی تغییر متغیر و مثال‌های مرتبط با آن در کتاب درسی نظام جدید عنوان نشده است. اما چون در سؤالات دانشگاه آزاد آمده است، در اینجا به آن اشاره کرده‌ایم.

قضایای بنیادی انتگرال

قضیه‌ی بنیادی اول: اگر تابع f روی بازه‌ی بسته I پیوسته و $a\in I$ و برای هر $x\in I$ داشته باشیم:

$$F(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt$$

آنگاه $F'(x)=f(x)$.

■ **مثال:** اگر $F(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1+t^{2}}\,dt$ آنگاه، $F'(x)$ را بیابید.

◂ **حل:**

$$F'(x)=\sqrt{1+x^{2}}$$

قضیه بنیادی دوم

اگر f در بازه‌ی بسته $[a\,,b]$ پیوسته باشد و تابع g به گونه‌ای باشد که برای هر x در بازه‌ی $[a\,,b]$ داشته باشیم $g'(x)=f(x)$، آنگاه:

$$\int_{a}^{b}f(t)\,dt=g(b)-g(a)$$

به عبارت دیگراز تابع انتگرال گرفته و سپس اختلاف حد پایین و بالا را می‌یابیم یعنی:

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=F(x)\Big]_{a}^{b}=F(b)-F(a)$$

($F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ است)

■ **مثال:** حاصل $\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}dx$ را بیابید.

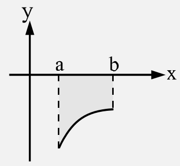
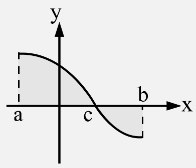
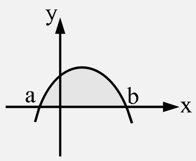
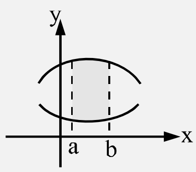
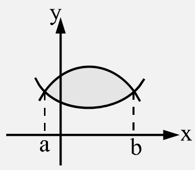
◂ **حل:**

$$\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\,dx=\int_{-1}^{2}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_{-1}^{2}=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\Big]_{-1}^{2}=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$$

کاربردهای انتگرال معین

محاسبه‌ی سطح زیر نمودار

در محاسبه‌ی سطح محصور حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

نوع حالت	شکل	فرمول مورد استفاده
حالت (۱): سطح محصور بین یک منحنی و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$، اگر f در یک طرف محور x ها باشد.		$S = \left\| \int_a^b f(x)dx \right\|$
حالت (۲): سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$، اگر تابع f در بازه‌ی $[a , b]$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول c قطع کند.		$S = \left\| \int_a^c f(x)dx \right\| + \left\| \int_c^b f(x)dx \right\|$
حالت (۳): سطح محصور بین یک منحنی با محور x ها. منحنی را با محور x ها قطع می‌دهیم تا a و b را بیابیم.		$S = \left\| \int_a^b f(x)dx \right\|$
حالت (۴): سطح محصور بین دو تابع در فاصله‌ی $x = a$ و $x = b$.		$S = \left\| \int_a^b (y_2 - y_1)dx \right\|$
حالت (۵): سطح محصور بین دو منحنی: ابتدا دو منحنی را با هم تلاقی داده، طول‌های نقاط تلاقی حدود انتگرال را می‌دهد.		$S = \left\| \int_a^b (y_2 - y_1)dx \right\|$

نکته

۱- هر طاق تابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ به مساحت (۲) است.

۲- هر طاق تابع $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ به مساحت $\frac{2}{|a|}$ است.