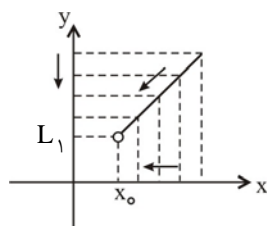


فرض کنید L_1 یک عدد حقیقی باشد:

۱) اگر $f(x)$ در مجاورت x_0 به ازای $x > x_0$ تعریف شده باشد به طوری که وقتی x به x_0 میل می کند $f(x)$ به هر میزان دلخواه به L_1

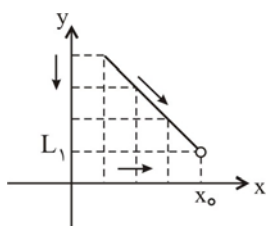
نزدیک شود، می گوییم حد راست $f(x)$ وقتی x به x_0 میل می کند، L_1 است و می نویسیم:



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1$$

۲) اگر $f(x)$ در مجاورت x_0 به ازای $x < x_0$ تعریف شده باشد به طوری که وقتی x به x_0 میل می کند $f(x)$ به هر میزان دلخواه به L_1

نزدیک شود، می گوییم حد چپ $f(x)$ وقتی x به x_0 میل می کند، L_1 است و می نویسیم:



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1$$

تعریف حد : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ است اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ (هر دو موجود و مساوی باشند).

قضایای حد (محاسبات حد در نقطه)

قضایای حد در یک نقطه

۱) حد تابع ثابت $f(x) = k$ (k عددی است حقیقی و ثابت) وقتی x به سمت a میل می کند همان مقدار ثابت k است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} k = k$$

به عنوان مثال اگر $f(x) = 4$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

۲) حد تابع همانی $f(x) = x$ هنگامی که x به سمت x_0 میل می کند برابر با x_0 است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x = \sqrt{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

۳) اگر دو تابع f و g در نقطه x_0 حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$۱) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \pm L_2 \quad (\text{یعنی حد مجموع دو تابع برابر مجموع حدهای آنهاست})$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (\text{یعنی حد حاصل ضرب دو تابع برابر حاصل ضرب حدهای آنهاست})$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$$

یعنی حد خارج قسمت دو تابع، به شرط صفر نبودن حد مخرج، برابر است با خارج قسمت حدهای آن دو تابع.

⚡ تذکره: حد مجموع چند تابع برابر است با مجموع حدهای آنها.

حد حاصل ضرب چند تابع برابر است با حاصل ضرب حدهای آنها.

⚡ تذکره: حد تابع $f(x) = x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) وقتی x به سمت x_0 میل می کند، برابر است با x_0^n . یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

❖ نتیجه: حد تابع چند جمله‌ای $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + L$ (n عددی صحیح و مثبت) در نقطه‌ی x_0 مساوی مقدار تابع در آن نقطه است:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

۴ اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ باشد آنگاه:

۱) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = L^n$ (n صحیح و مثبت) مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 1)^3 = (3 - 1)^3 = 8$

۲) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{L} & , \text{ فرد } n \\ \sqrt[n]{L} \ (L \geq 0) & , \text{ زوج } n \end{cases}$ مثال: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{0+1} = 1$

اما $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1}$ وجود ندارد، زیرا دامنه‌ی تعریف تابع $x \geq 1$ است که $x \rightarrow 1^-$ در آن وجود ندارد به طوری غیر رسمی این مسأله را به صورت

زیر حل می‌کنیم: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} = \sqrt{1^- - 1} = \sqrt{0^-}$ (رادیکال تعریف نمی‌شود).

اما $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$ وجود دارد و برابر صفر است. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0}$

۵ اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$.

۶ حد تابع گویای کسری به صورت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (f و g دو چندجمله‌ای هستند) در نقطه‌ی $x = x_0$ برابر با مقدار آن در نقطه‌ی x_0 است (به شرط آن که x_0 ریشه‌ی مخرج نباشد).

به عنوان مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + x - 1}{x^3 + x} = \frac{2 + 1 - 1}{1 + 1} = 1$

۷ برای محاسبه‌ی حد توابع مثلثاتی از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

۱) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$

۲) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$

۳) $\lim_{x \rightarrow x_0 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}} \tan x = \tan x_0$

۴) $\lim_{x \rightarrow x_0 \neq k\pi} \cot x = \cot x_0$

محاسبه‌ی حد چپ و راست

۱- در توابع شامل جزء صحیح

الف - محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} [x]$

با توجه به نمودار تابع به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] = \begin{cases} a \notin \mathbb{Z} \rightarrow \text{حد} = [a] \\ a \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} \text{حد راست} = a \\ \text{حد چپ} = a - 1 \end{cases} \end{cases}$$

به عنوان مثال $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x] = \left[\frac{1}{2} \right] = 0$.

ب- استفاده از نقاط نزدیک به نقطه در توابع شامل جزء صحیح

به عنوان مثال در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [2x] = 0$ ، می‌توانیم از عدد 0.49 استفاده کنیم و برای محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [2x] = 1$ می‌توانیم از عدد 0.51 استفاده کنیم.

اما در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow 0.51} [2x + 0.01]$ اگر عدد را همان 0.49 در نظر بگیریم، حد تابع صفر درمی‌آید. در حالی که حد تابع (۱) است.

۲- در توابع دوطرفه‌ای: به شکل زیر، برای محاسبه‌ی حد راست در a ، از ضابطه‌ی بالا و برای محاسبه‌ی حد چپ در a ، از $(x < a)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x > a \\ f_2(x) & , x < a \end{cases}$$

🔍 **توجه:** تابع‌های دو ضابطه‌ای به شکل $f(x) = \begin{cases} h(x), & x > a \\ g(x), & x < a \end{cases}$ زمانی در $x = a$ حد دارند که در a حد چپ و راست آن‌ها برابر باشد.

یعنی $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$

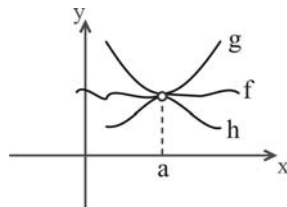
قضیه فشردگی

این قضیه راجع به رفتار حدی تابعی است که بین دو تابع دیگر، که هر دو در یک نقطه داده شده حد مساوی دارند، قرار دارد.

هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a (جز احتمالاً در خود a)، $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ و نیز $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ،

قضیه

آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



■ **مثال:** نشان دهید $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

🔍 **حل:** از آنجایی که $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ ، برای مقادیر مثبت x داریم $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$ و برای مقادیر منفی x ، $x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq -x$ ، حد توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در $x = 0$ برابر صفر است، پس $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ است.

قضیه کران‌داری

اگر $g(x)$ تابعی کران‌دار در همسایگی محذوف a باشد و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ است.



رفع ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع جبری

در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه از قضیه‌ی حدی و جای‌گذاری مستقیم برای محاسبه‌ی حد، نمی‌توانیم استفاده کنیم زیرا با جانشینی مستقیم، به کسر بی‌معنی $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، این نوع عبارت‌ها را صورت مبهم می‌نامیم. وقتی در محاسبه‌ی یک حد به این صورت برمی‌خورید، به یاد داشته باشید که باید کسر را طوری بنویسید که مخرج یا صورت کسر جدید، حد صفر نداشته باشد، برای رسیدن به این هدف از روش‌های زیر استفاده می‌کنیم.

حذف عوامل صفر شونده از صورت و مخرج

اگر صورت و مخرج، دو جمله‌ای باشند، آنگاه آن‌ها را به عوامل اول تجزیه کرده و با حذف عامل صفر شونده‌ی یکسان از صورت و مخرج،

حد تابع را می‌یابیم، دقت کنید که در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، $(x - a)$ را عامل صفر شونده گوئیم.

■ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ را بیابید.

🔍 **حل:** $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-2)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-2) = -5$

🔍 **تذکره (۱):** در صورتی که صورت و مخرج یا هر دو، از عبارت‌های اصم (گنگ) تشکیل شده باشند، آن‌ها را گویا می‌کنیم و سپس حد را با حذف عامل صفر شونده‌ی یکسان می‌یابیم.

■ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ را بیابید.

🔍 **حل:** صورت کسر را گویا می‌کنیم: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{2}$

◀ **تذکره (۲):** در بعضی از موارد با انتقال حد به نقطه‌ی صفر می‌توانیم مسأله را راحت‌تر حل کنیم، در این حالت برای محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ با فرض $x - a = t$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t)}{g(a+t)}$$

■ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} + (x-1)^2}{\sqrt[3]{x-1} + (x-1)^3}$ را بیابید.

◀ **حل:** با فرض $x-1 = t$ داریم:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t} + t^2}{\sqrt[3]{t} + t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t}(1+t^{\frac{2}{3}})}{\sqrt[3]{t}(1+t^{\frac{3}{3}})} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

◀ **تذکره (۳):** در رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$ ، باید قدر مطلق را در مجاورت نقطه‌ی $x = a$ تعیین علامت و جزء صحیح را در آن نقطه تعیین مقدار کنیم.

■ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|[x]}{|x|-2}$ را بیابید.

◀ **حل:** وقتی $2 < x < 3$ ، $[x] = 2$ و $|2-x| = x-2$ و $|x| = x$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(2)}{x-2} = 2$$

(قاعده هوییتال) خارج کتاب درسی یکی از روش‌های رفع ابهام $\frac{0}{0}$ استفاده از قاعده‌ی هوییتال است در این حالت از صورت و مخرج به طور جداگانه مشتق گرفته تا به کسر جدیدی برسیم و سپس از آن حد می‌گیریم.

📌 **توجه:** به طور غیر رسمی در رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ، هوییتال یک تابع کسری، کسری است که صورت آن مشتق صورت و مخرج آن مشتق مخرج است.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

◀ **تذکره (۴):** به جدول مشتق توابع توجه کنید:

مثال	مشتق	تابع
$y = (x^2 + x)^3 \rightarrow y' = 3(2x+1)(x^2+x)^2$	$y' = nu' \times u^{n-1}$	$y = u^n$
$y = \sqrt{x^3 + 5} \rightarrow y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 5}}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{u}$
$y = \sqrt[3]{x^2 + x} \rightarrow y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x)^2}}$	$y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y = \sqrt[m]{u}$
$y = \frac{\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+5} \rightarrow y' = \frac{5-6}{(3\sqrt{x}+5)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} \times u'$	$y = \frac{au+b}{cu+d}$
$y = \sin(x^2 + 1) \rightarrow y' = 2x \cos(x^2 + 1)$	$y' = u' \times \cos u$	$y = \sin u$
$y = \cos \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$	$y' = -u' \times \sin u$	$y = \cos u$
$y = \tan(\sin x) \rightarrow y' = \cos x(1 + \tan^2(\sin x))$	$y' = u'(1 + \tan^2 u)$	$y = \tan u$
$y = \cot(x^2 - 1) \rightarrow y' = -2x(1 + \cot^2(x^2 - 1))$	$y' = -u'(1 + \cot^2 u)$	$y = \cot u$

■ **مثال:** حدود زیر را بیابید:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^2 + 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2x} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(۲) \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{(x^۲ - ۴)\sqrt{x^۲ + x + ۱}}{x^۳ - ۸} = \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{(x^۲ - ۴)\sqrt{۷}}{x^۳ - ۸} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow ۲} \frac{(۲x)\sqrt{۷}}{۳x^۲} = \frac{۴\sqrt{۷}}{۱۲}$$

استفاده از هم‌ارزی‌ها

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ، که ابهام $\frac{0}{0}$ دارد نمی‌توانیم با ساده‌سازی معمولی حد را بیابیم؛ برای محاسبه‌ی حد این تابع با استفاده از قضیه‌ی فشردگی، دایره‌ی مثلثاتی، مساحت قطاع و مثلث، می‌توان ثابت کرد که برای هر x در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$ ، نامساوی $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq ۱$ برقرار است و از آنجا بر طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ۱$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ۱$ است.

در محاسبه‌ی حد توابع مثلثاتی داریم:

$$(۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

$$(۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ۱$$

تعریف دو تابع هم‌ارز: دو تابع f و g را وقتی $x \rightarrow a$ هم‌ارز گویند هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$$

به عنوان مثال دو تابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ در $x = 0$ هم‌ارزند زیرا $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ۱$.

هم‌ارزی‌های مثلثاتی

به هم‌ارزی‌های مهم زیر توجه کنید:

$$(۱) \sin ax \approx ax \quad x \rightarrow 0$$

$$(۲) \tan ax \approx ax \quad x \rightarrow 0$$

$$(۳) \sin u \approx u \quad u \rightarrow 0$$

$$(۴) \tan u \approx u \quad u \rightarrow 0$$

$$(۵) ۱ - \cos u \approx \frac{u^۲}{۲} \quad u \rightarrow 0$$

■ مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۱۲}} \frac{\sin(۲x - \frac{\pi}{۶})}{\tan(x - \frac{\pi}{۱۲})}$ را بیابید.

◀ حل: از آنجا که $۲x - \frac{\pi}{۶}$ و $x - \frac{\pi}{۱۲}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{۱۲}$ هر دو به صفر میل می‌کنند و ابهام از نوع $\frac{0}{0}$ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۱۲}} \frac{\sin(۲x - \frac{\pi}{۶})}{\tan(x - \frac{\pi}{۱۲})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{۱۲}} \frac{۲(x - \frac{\pi}{۱۲})}{x - \frac{\pi}{۱۲}} = ۲$$

توابع جبری

حد یک چندجمله‌ای وقتی $x \rightarrow 0$ برابر حد کوچک‌ترین درجه‌ی آن چند جمله‌ای است.

$$(۱) x^۳ - x^۲ - ۲x \approx -۲x \quad x \rightarrow 0$$

$$(۲) x + \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۴]{x} \approx \sqrt[۴]{x} \quad x \rightarrow 0^+$$

به عنوان مثال:

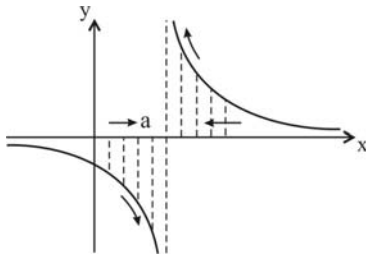
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[۳]{x} - x}{\sqrt[۴]{x} + ۲x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۴]{x}} = ۱$$

قضیه‌ها و محاسبات

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

حد بی‌نهایت

اگر f را تابعی فرض کنیم که نمودارش در شکل زیر رسم شده است، وقتی x از راست به a میل می کند، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی بزرگ و بزرگ تر می شود، لذا به هیچ عدد متناهی ثابتی میل نمی کند، در نتیجه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ وجود ندارد و می نویسیم:



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad (۱)$$

دقت کنید که نماد ∞ نشانگر این نوع رفتار تابع است و عدد حقیقی نیست.

وقتی x از سمت چپ a به a میل می کند، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی در جهت منفی، کوچک و کوچک تر می شود، لذا به هیچ عدد متناهی ثابتی میل نمی کند، پس $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ نیز وجود ندارد و در این حالت می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad (۲)$$

❖ نتیجه: به حدود زیر توجه کنید: « n عددی طبیعی است »

$$۱) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & x \rightarrow a^+ \\ -\infty & x \rightarrow a^- \end{cases} \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \quad ۲) \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & x \rightarrow a^+ \\ +\infty & x \rightarrow a^- \end{cases} \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}$$

به عنوان مثال:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{و} \quad ۲) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{و} \quad ۴) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

و به طور کلی:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و همواره $f(x) > 0$ (یعنی $f(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند)، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و همواره $f(x) < 0$ (یعنی $f(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند)، آنگاه:

$$\left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{ رفع ابهام ها}$$

حد بی نهایت و حد در بی نهایت

حد در بی نهایت

تابع f را که برای هر $x > x_0$ تعریف شده است در نظر بگیرید. اگر بخواهیم بدون هیچ محدودیتی افزایش یابد، در این صورت می نویسیم $x \rightarrow +\infty$ (بخوانید x به سمت مثبت بی نهایت میل می کند) و اگر تابع f به ازای هر $x < x_0$ تعریف شده باشد، اگر بخواهیم بدون هیچ محدودیتی کاهش یابد می نویسیم $x \rightarrow -\infty$ (بخوانید x به سمت منهای بی نهایت میل می کند)، در این صورت $f(x)$ به عدد L یا $+\infty$ یا $-\infty$ میل می نماید.

چند قضیه در محاسبات حد در بی نهایت:

۱- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه:

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(۲ + \frac{1}{x} + \frac{۲}{x^۲} \right) = ۲ + 0 + 0 = ۲$$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۲x-۱}{۵x+۲} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(۲-\frac{1}{x})}{x(۵+\frac{۲}{x})} = \frac{۲-0}{۵+0} = \frac{۲}{۵}$$

۲- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه:

$$\text{الف - اگر } n \text{ زوج باشد } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\text{ب - اگر } n \text{ فرد باشد } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

توجه: برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$ ، با توجه به علامت a ($a \neq 0$) و زوج یا فرد بودن n ، می‌توانیم حد را بیابیم.

۳- در محاسبه‌ی حد چندجمله‌ای‌ها وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ خواهیم داشت: (n عددی صحیح و مثبت است)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + L) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n \left(1 + \frac{b}{ax} + \dots + \frac{L}{ax^n} \right)$$

چون حد $\frac{b}{ax}$ و ... تا $\frac{L}{ax^n}$ وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ صفر است پس:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + L) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

یعنی حد چندجمله‌ای وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، مساوی حد جمله‌ای است که دارای بزرگ‌ترین درجه است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (۳x^۳ - x^۲ + ۲) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ۳x^۳ = -\infty$$

به عنوان مثال:

رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

الف) برای محاسبه‌ی حد کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشند، وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots}{a'x^n + b'x^{n-1} + c'x^{n-2} + \dots} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m}{a'x^n}$$

برای محاسبه‌ی حد این کسر وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ خواهیم داشت:

$$۱) m < n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۲x+۱}{۳x^۲+۲} = 0$$

$$۲) m = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{a'}$$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۲x+۵}{۳x+۷} = \frac{۲}{۳}$$

$$۳) m > n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ یا } -\infty \text{ یا } \pm\infty$$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{۲x^۳ - x^۲ + ۱}{x^۲ + ۷} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{۲x^۳}{x^۲} = -\infty$$

$$\sqrt{x^۲ + ax + b} = \sqrt{\left(x + \frac{a}{۲}\right)^۲ - \frac{a^۲}{۴} + b}$$

ب) در توابع رادیکالی با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\sqrt{\left(x + \frac{a}{۲}\right)^۲ - \frac{a^۲}{۴} + b} \simeq \left| x + \frac{a}{۲} \right|$$

چون $x \rightarrow \pm\infty$ پس عبارت هم ارز آن برابر است با:

لذا می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$۱) \sqrt{x^۲ + a} \simeq |x|$$

$$۲) \sqrt{x^۲ + ax + b} \simeq \left| x + \frac{a}{۲} \right|$$

$$۳) \sqrt{ax^۲ + bx + c} \simeq \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{۲a} \right|, a > 0$$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + |x|}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{\sqrt{x^2 + x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \left|x + \frac{1}{2}\right|}{\left|x + \frac{1}{2}\right|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = 4$$

پیوستگی در نقطه

پیوستگی در نقطه

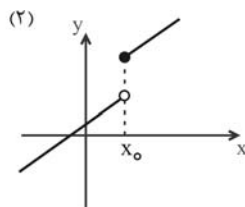
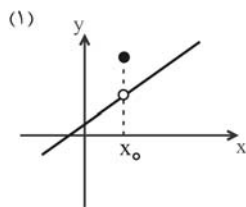
تعریف: تابع f که در بازه I تعریف شده است در نقطه x_0 از دامنه I را پیوسته گویند، هرگاه:

۱- تابع در $x = x_0$ حد داشته باشد.

۲- حد تابع در $x = x_0$ با مقدار تابع در x_0 برابر باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه I آن، دست کم یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد، در آن نقطه ناپیوسته است.



در شکل (۱)، حد تابع در x_0 وجود دارد ولی با مقدار تابع برابر نیست و در شکل (۲) تابع در x_0 حد ندارد، پس هر دو شکل نمایش تابعی ناپیوسته در x_0 خواهند بود.

نکته

برای تابع $f(x) = [ax]$ در x_0 دو حالت در نظر می گیریم:

الف- اگر $ax_0 = k \notin \mathbb{Z}$ ، تابع در x_0 پیوسته است.

ب- اگر $ax_0 = k \in \mathbb{Z}$ ، تابع در x_0 ناپیوسته است.