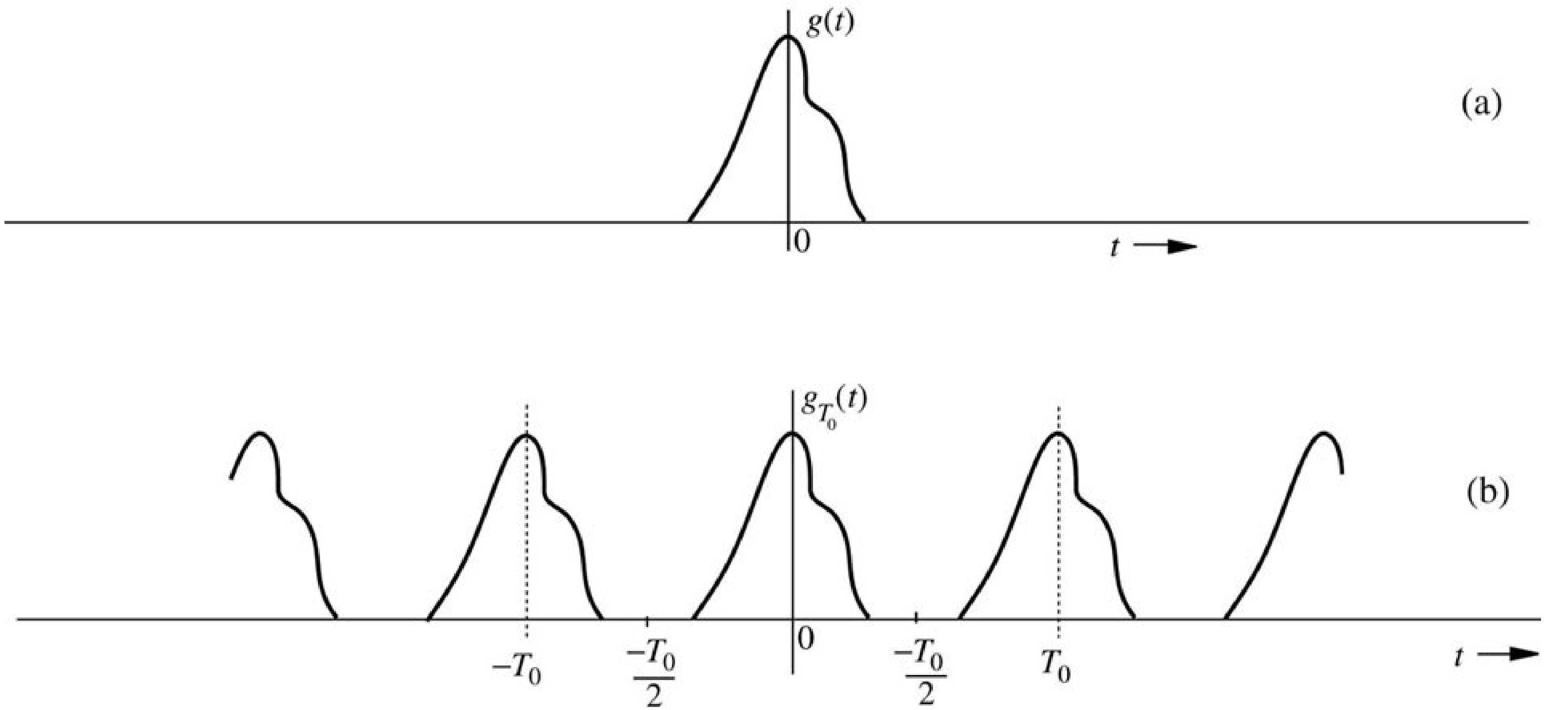
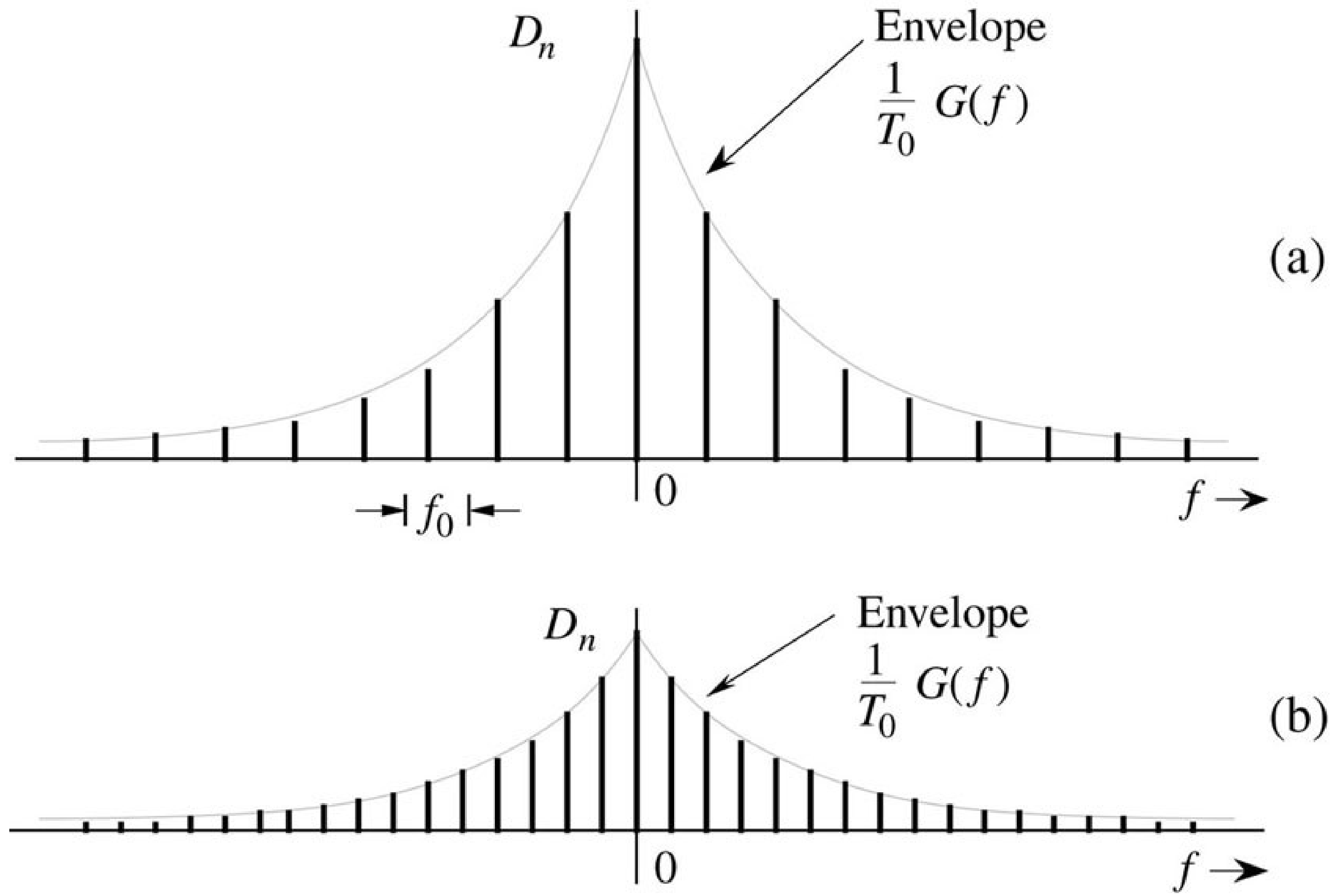
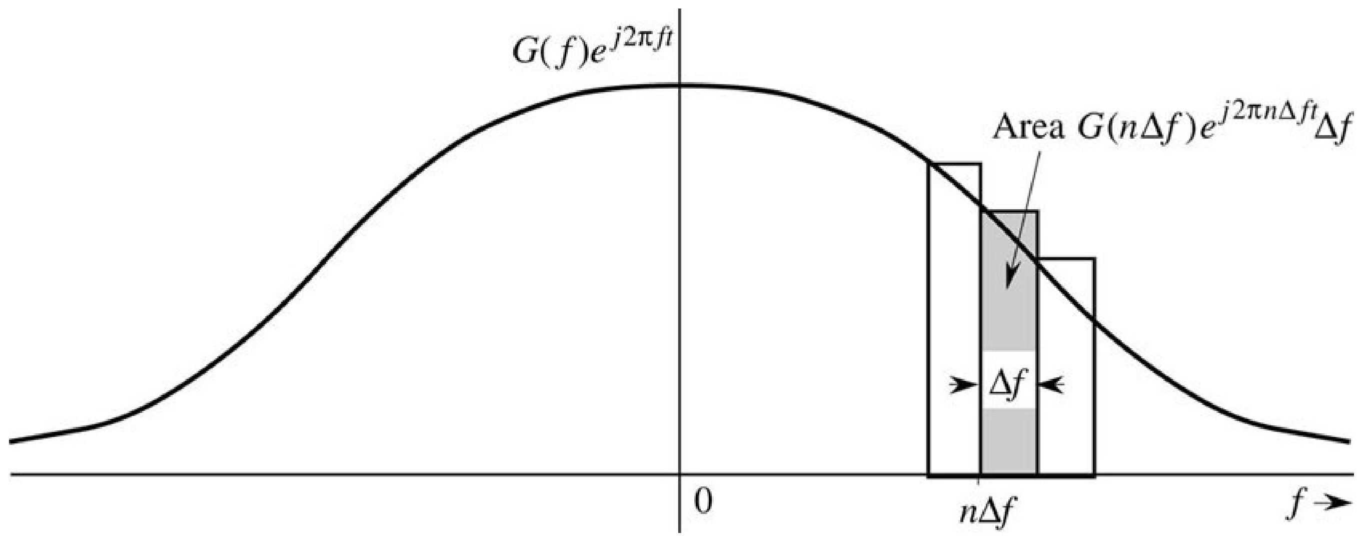
فصل سوّم: تحلیل و انتقال سیگنال‌ها

نمایش سیگنال‌های غیر متناوب با استفاده از انتگرال فوریه:



$\frac{1}{T_0}G(f)$ پوش (envelope) ضرایب سری فوریه تابع متناوب $g_{T0}(t)$ است.




$G(f)e^{j2\pi ft}$
Area $G(n\Delta f)e^{j2\pi n\Delta ft}\Delta f$
Δf
0
$n\Delta f$
f

نمایش انتگرال فوریه تابع غیر متناوب g(t):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\mathrm{e}^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

تبدیل مستقیم فوریه:

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

تبدیل معکوس فوریه:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\mathrm{e}^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$g(t) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} G(f)$$

تابع G(f) در حالت کلی تابعی مختلط از متغیر f است:

$$G(f) = |G(f)|\mathrm{e}^{j\theta_g(f)}$$

$|G(f)|$:G(f) (amplitude) اندازه

$\theta_g(f)$:G(f) (phase) زاویه یا فاز

یادآوری: تبدیل فوریه تابع g(t) یعنی G(f) توصیف و مشخصه حوزه فرکانس تابع g(t) است.

یادآوری: خاصیت تقارن مزدوج تبدیل فوریه **سیگنال‌های حقیقی**:

$$g(t)\,\text{real}: \quad G(-f) = G^*(f)$$

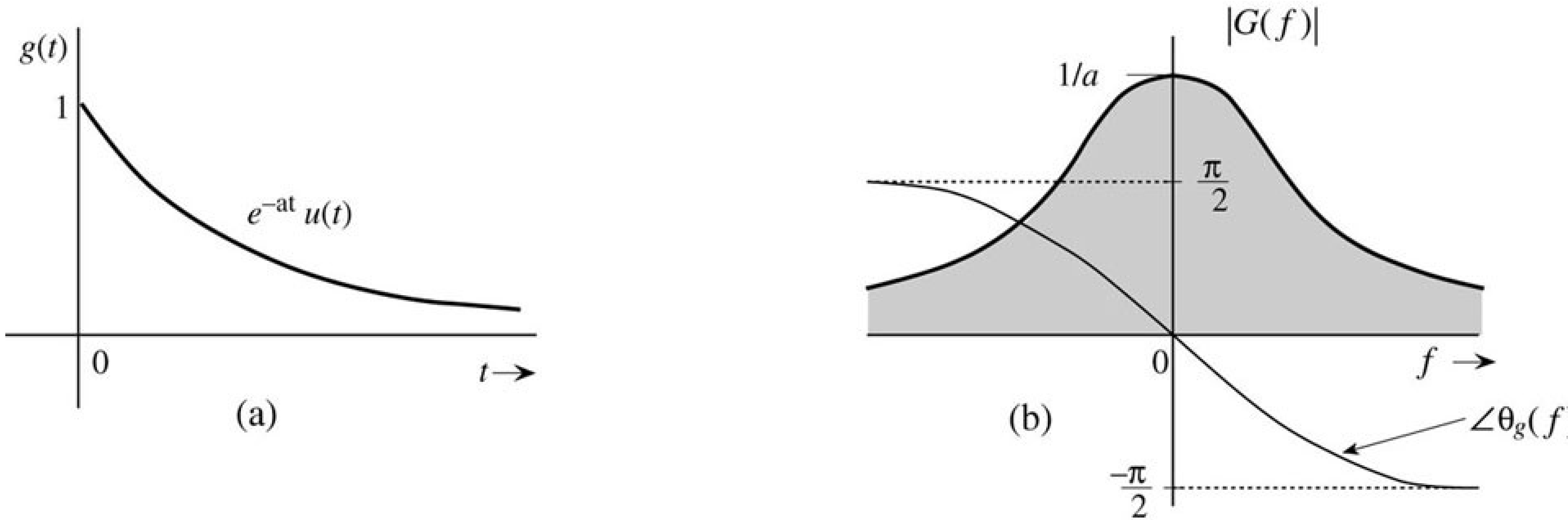
اندازه طیف، تابعی زوج است.

زاویه (فاز) طیف، تابعی فرد است.

$$\begin{cases} |G(f)| = |G(-f)| \\ \theta_g(-f) = -\theta_g(f) \end{cases}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $e^{-at}u(t)$ را بیابید.

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}, \quad \theta_g(f) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$



شرایط وجود تبدیل فوریه:

۱) اگر تابع g(t) مطلقاً انتگرال پذیر باشد: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \mathrm{d}t < \infty$

۲) و اگر تابع g(t) فقط تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد و همچنین تعداد محدودی نقطه ناپیوسته (که در آن‌ها هم حدهای چپ و راست متناهی باشند)

در اینصورت انتگرال فوریه تابع g(t) در نقاط پیوستگی به مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی به متوسط حدهای چپ و راست در آن نقطه، همگرا می‌شود.

اگر این شرایط برقرار باشد، انتگرال فوریه تابع حتماً همگراست، ولی توابعی هم هستند که این شرایط در موردشان نقض می‌شود، ولی تبدیل فوریه دارند.

مثل تابع $\dfrac{\sin(at)}{t}$

خاصیت خطی تبدیل فوریه (قضیه سوپر پوزیسیون)

$$\begin{cases} g_1(t) \Longleftrightarrow G_1(f) \\ g_2(t) \Longleftrightarrow G_2(f) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \Longleftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$$

که ضرایب a_1 و a_2 ثابتهای حقیقی یا مختلط دلخواهی هستند.

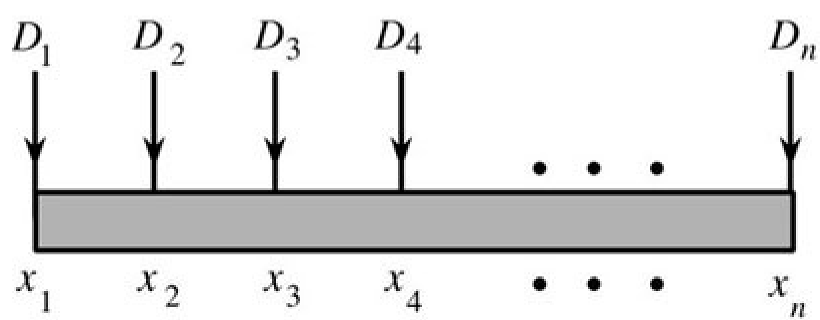
تعمیم:

$$\sum_k a_k g_k(t) \Longleftrightarrow \sum_k a_k G_k(f)$$

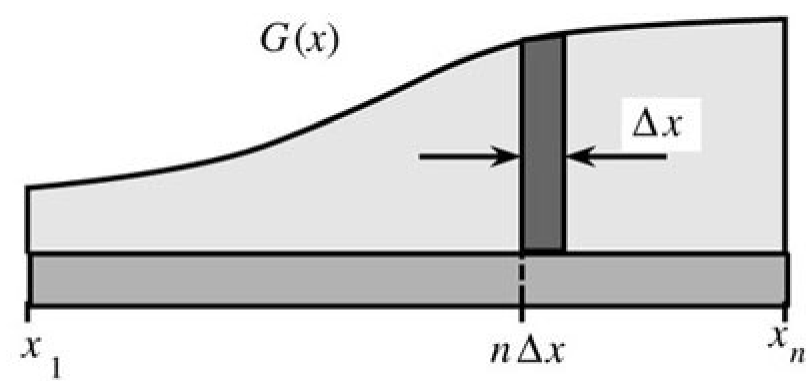
تبدیل فوریه یک سیگنال درواقع چگالی طیف بر واحد فرکانس است.

$$g(t) = \lim_{\Delta f \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f)\mathrm{e}^{(j2\pi f)t}\Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\mathrm{e}^{j2\pi f t}\mathrm{d}f$$

سهم اجزای تشکیل‌دهنده $g(t)$ در یک باند فرکانسی به اندازه df (با واحد هرتز) به اندازه $G(f)df$ است. پس $G(f)$ درواقع چگالی طیف سیگنال در واحد پهنای باند (فرکانس با واحد هرتز) است که به طور معمول چگالی را ذکر نمی‌کنند و به گفتن طیف یا طیف فوریه سیگنال اکتفا می‌کنند.



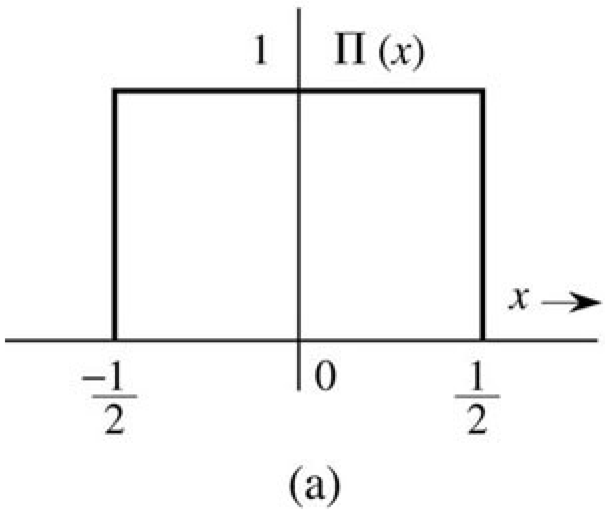
(a)

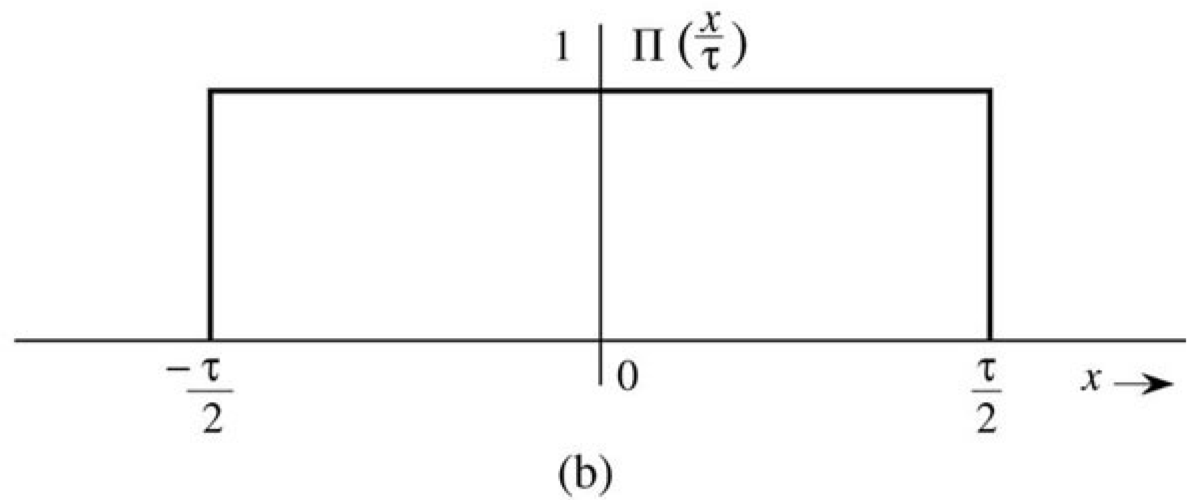


(b)

تبدیل فوریه توابع مهم و مفید

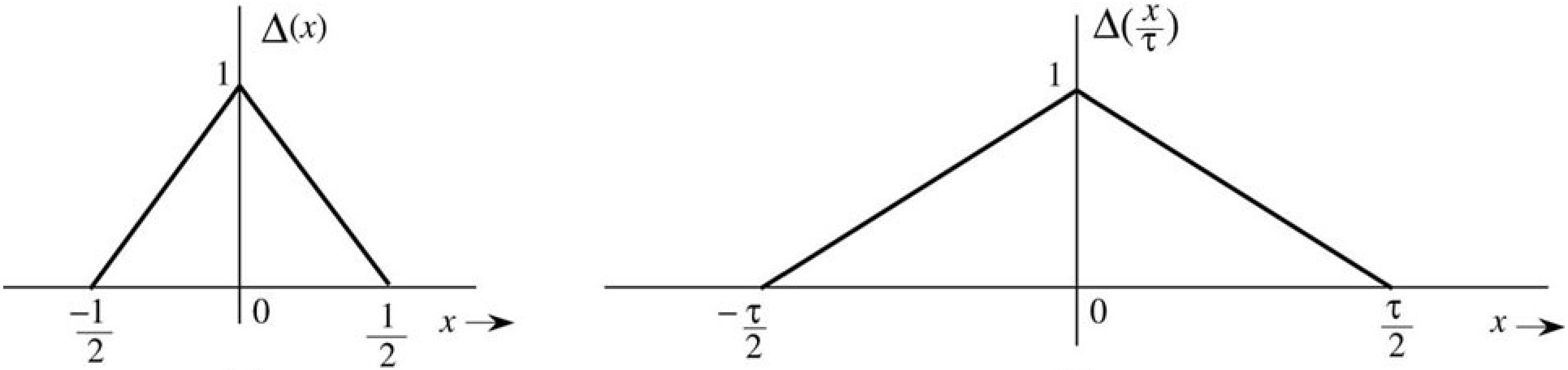
تابع مستطیلی واحد (Unit Rectangular Function): تابع پی (پای)





$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0.5 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

تابع مثلثی واحد (Unit Triangular Function):



(a) (b)

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

تابع سینک (Sinc):

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

خواص تابع سینک:

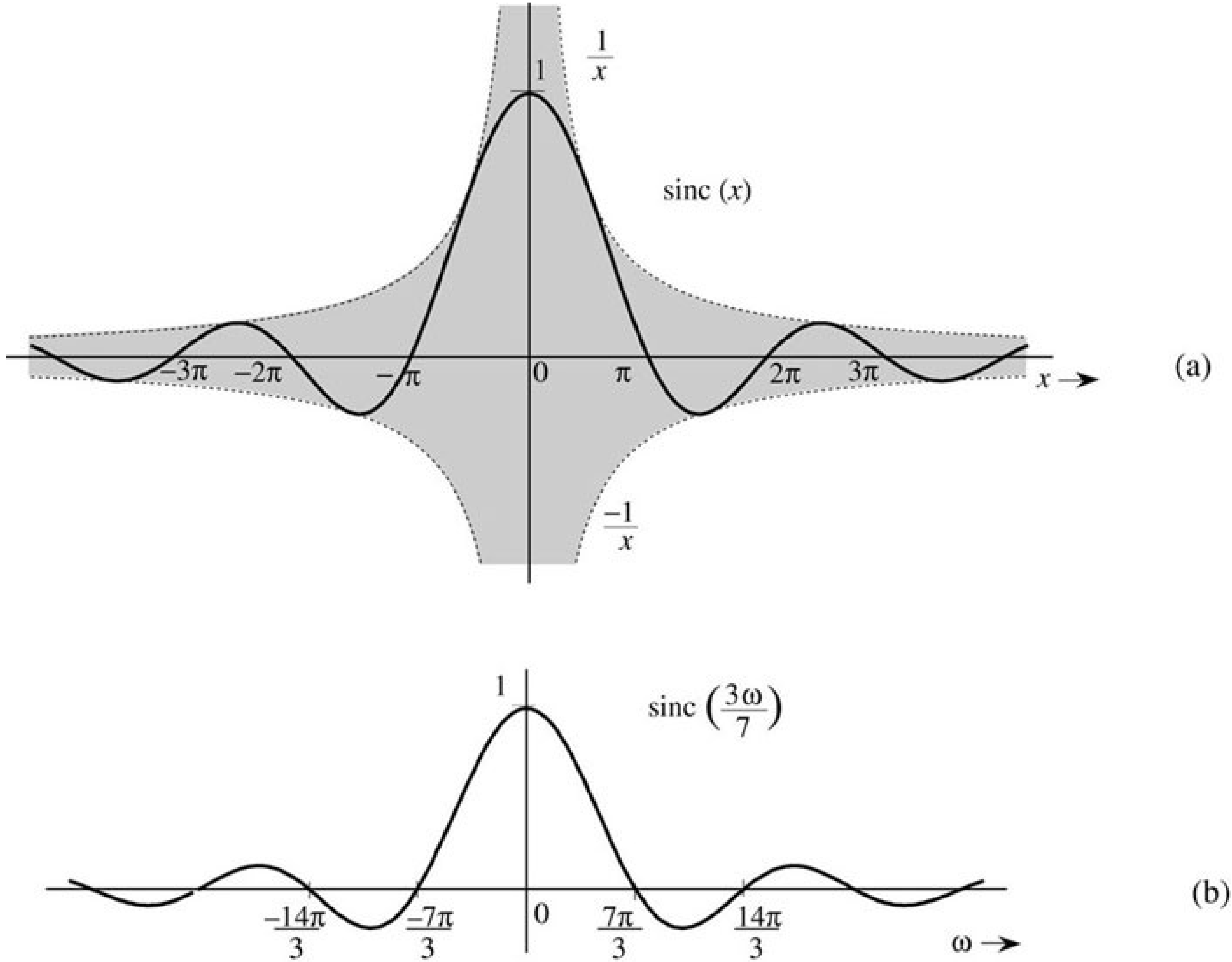
۱) تابع زوج است.

۲) در $x = 0$ مقدار یک دارد: $\mathrm{sinc}(0) = 1$

۳) به‌جز $x = 0$ هر جای دیگری که $\sin x$ صفر می‌شود، مقدارش صفر است. بنابراین در تمام ضرایب صحیح مثبت و منفی و غیر صفر π صفر می‌شود.

یعنی در $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

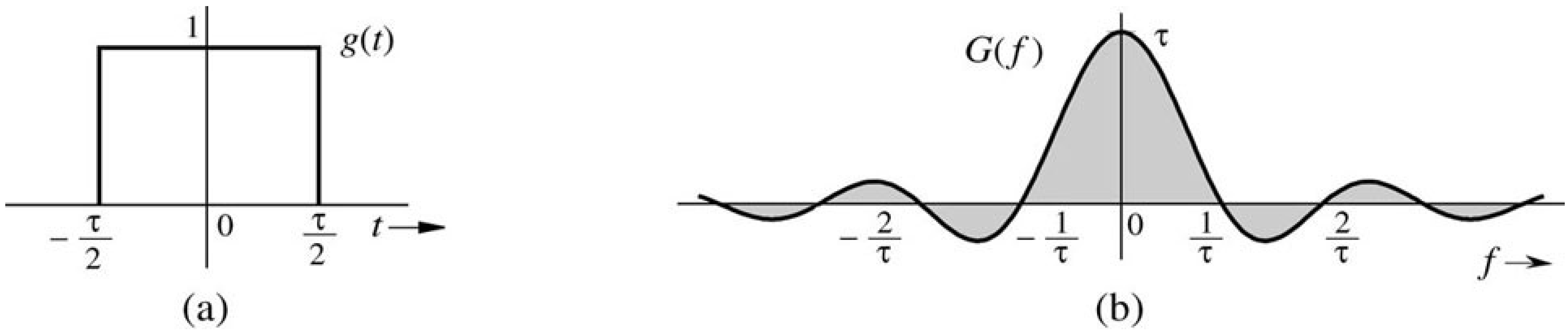
۴) رفتار نوسانی تابع $\sin x$ با دوره تناوب 2π را دارد که به‌دلیل ضرب شدن در تابع یکنوا نزولی $1/x$ ، اندازه این نوسانات مطابق تابع $1/x$ کاهش می‌یابد.



$\frac{1}{x}$
1
sinc (x)
-3π -2π $-\pi$ 0 π 2π 3π
$x \rightarrow$
(a)
$\frac{-1}{x}$
1
sinc $\left(\frac{3\omega}{7}\right)$
$\frac{-14\pi}{3}$ $\frac{-7\pi}{3}$ 0 $\frac{7\pi}{3}$ $\frac{14\pi}{3}$
$\omega \rightarrow$
(b)

مثال: تبدیل فوریه g(t)، تابع مستطیلی واحد زیر را به‌دست آورید:

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow G(f) = \tau\,\mathrm{sinc}(\pi\tau f)$$

تعریف پهنای باند Bandwidth

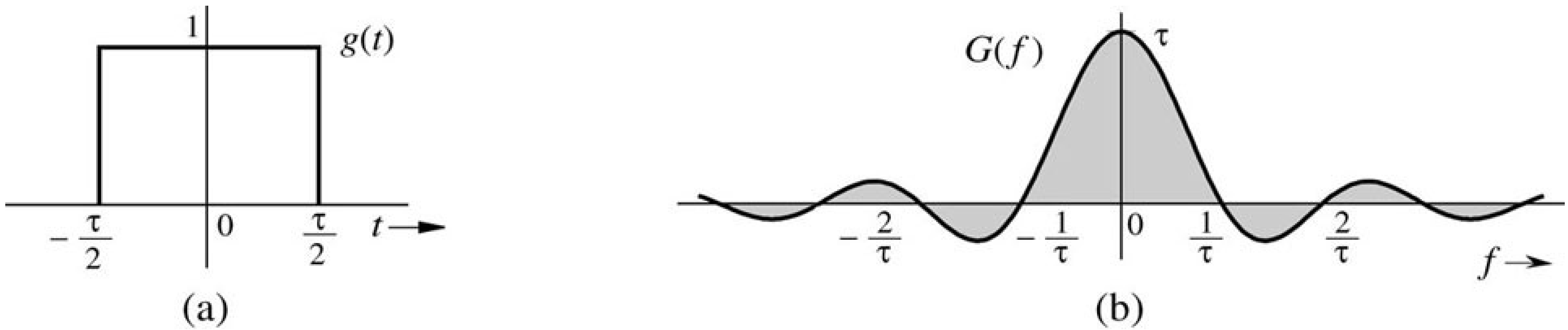
پهنای باند یک سیگنال عبارت است از اختلاف بین بیشترین (بالاترین) فرکانس و کمترین فرکانس موجود در طیف سیگنال.
از طرفی بیشتر سیگنال‌ها همه فرکانس‌ها از صفر تا بینهایت را در خود دارند.
بنابراین پهنای باند همه این سیگنال‌ها طبق تعریف بالا بینهایت می‌شود. پس تعریف را تغییر می‌دهیم تا هدف از تعریف برآورده شود:
پهنای باند یک سیگنال عبارت است از اختلاف بین بیشترین (بالاترین) *فرکانس با اهمیت و قابل ملاحظه* (*significant*) و کمترین *فرکانس با اهمیت و قابل ملاحظه* موجود در طیف سیگنال.

نکته ۱ : بسته به کاربرد و دقت مورد نیاز می‌توان «با اهمیت» را در هر مورد مشخص کرد.

مثلاً در یک مورد در طیف سیگنال فرکانسی را مهم فرض می‌کنند که اندازه در طیف از 2% بیشترین مقدار آن کمتر نباشد.

یا مثلاً در یک مورد دیگر در طیف سیگنالی را مهم فرض می‌کنند که زاویه در طیف سیگنال، حداکثر 5% بیشترین مقدار تأخیر را ایجاد کند.

نکته ۲ : در محاسبه پهنای باند فقط فرکانس فیزیکی (یعنی نیمه مثبت محور f در نظر گرفته می‌شود).

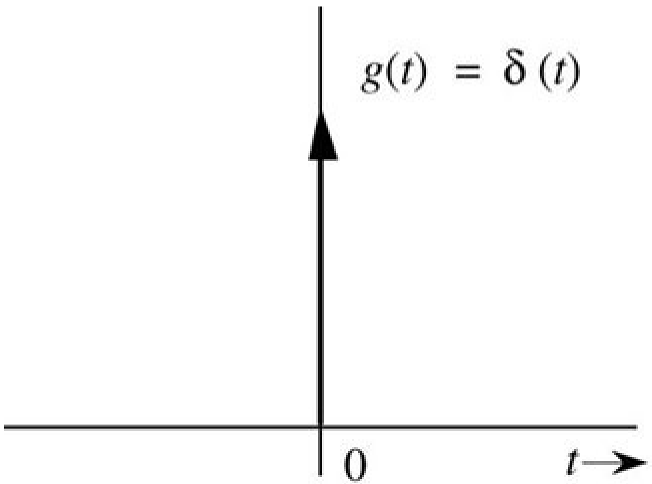


با یک تقریب نسبی قابل قبول برای بیشتر موارد عملی ، برای تابع $\Pi(t/\tau)$ ، بیشترین سهم طیف را در لُب (lobe) اول طیف قرار دارد، پس پهنای باند را با این تقریب $B = 1/\tau\,\mathrm{Hz}$ در نظر می‌گیریم.

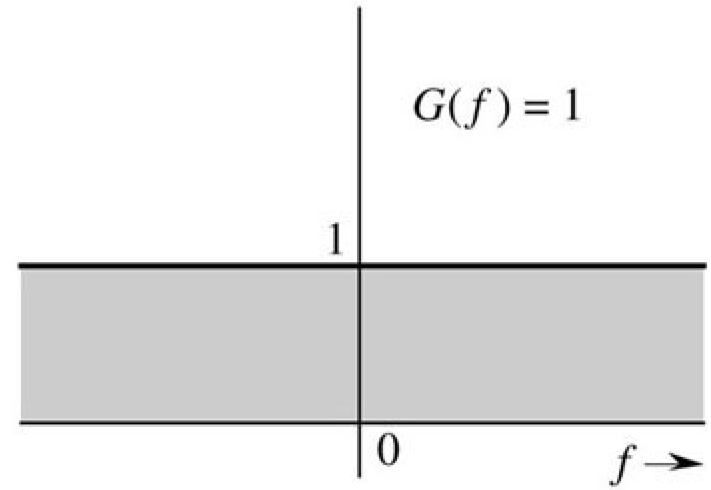
مسأله: یکبار با تقریب 5% و یکبار 1% بیشترین اندازه طیف، پهنای باند سیگنال $\Pi(t/\tau)$ را به‌دست آورید.

مثال: تبدیل فوریه تابع ضربه واحد:

$$g(t) = \delta(t) \Longleftrightarrow G(f) = 1$$



(a)



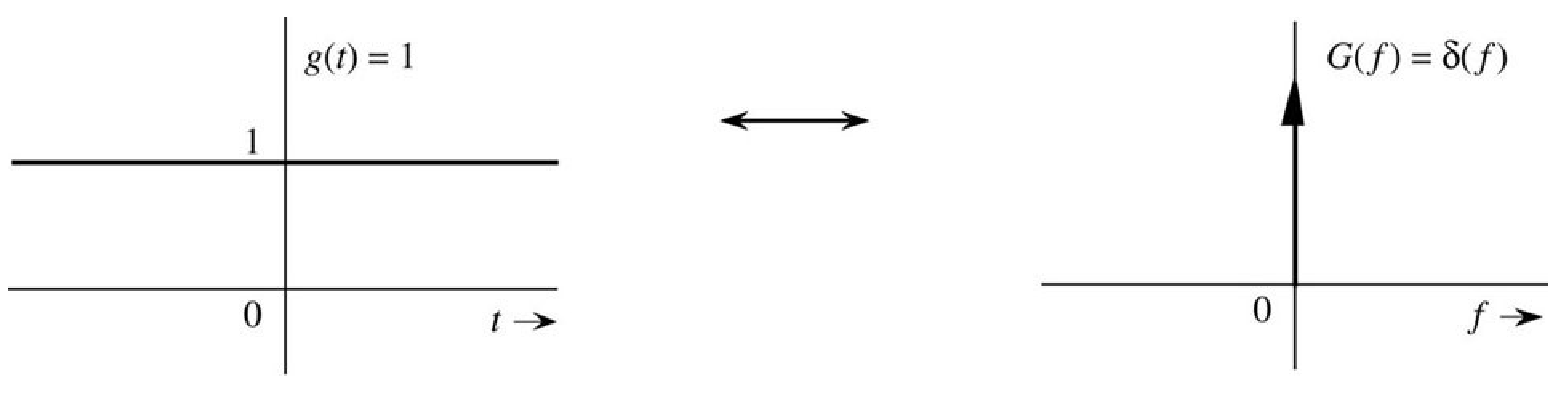
(b)

مثال: تبدیل معکوس تابع $G(f) = \delta(f)$ را پیدا کنید:

$$g(t) = 1 \Longleftrightarrow G(f) = \delta(f)$$

یا چون $\delta(2\pi f) = \frac{1}{2\pi}\delta(f)$ بنابراین:

$$g(t) = 1/2\pi \Longleftrightarrow G(f) = \delta(2\pi f)$$



(a) (b)

مثال: تبدیل فوریه معکوس $G(f) = \delta(f - f_0)$:

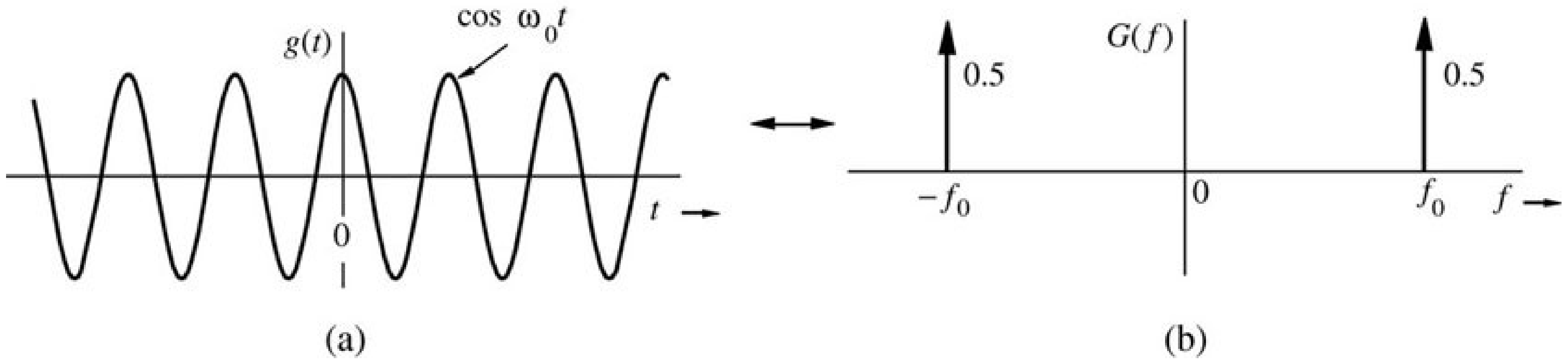
$$\boxed{g(t) = \mathrm{e}^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow G(f) = \delta(f - f_0)}$$

و بطور مشابه:

$$g(t) = \mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow G(f) = \delta(f + f_0)$$

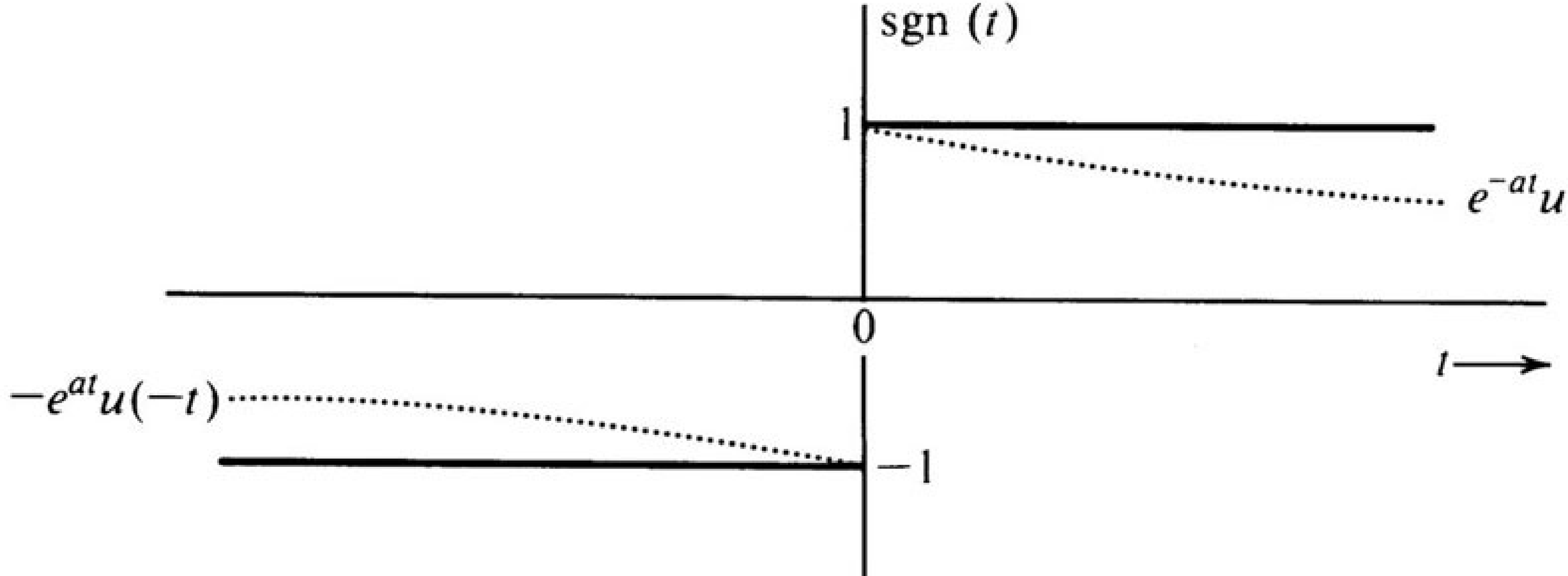
مثال: تابع سینوسی با فرکانس f_0، $\cos 2\pi f_0 t$:

$$\cos 2\pi f_0 t \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



مثال: تبدیل فوریه تابع $\mathrm{sgn}(t)$ تابع علامت(sign):

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



$$\boxed{\mathrm{sgn}(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}}$$

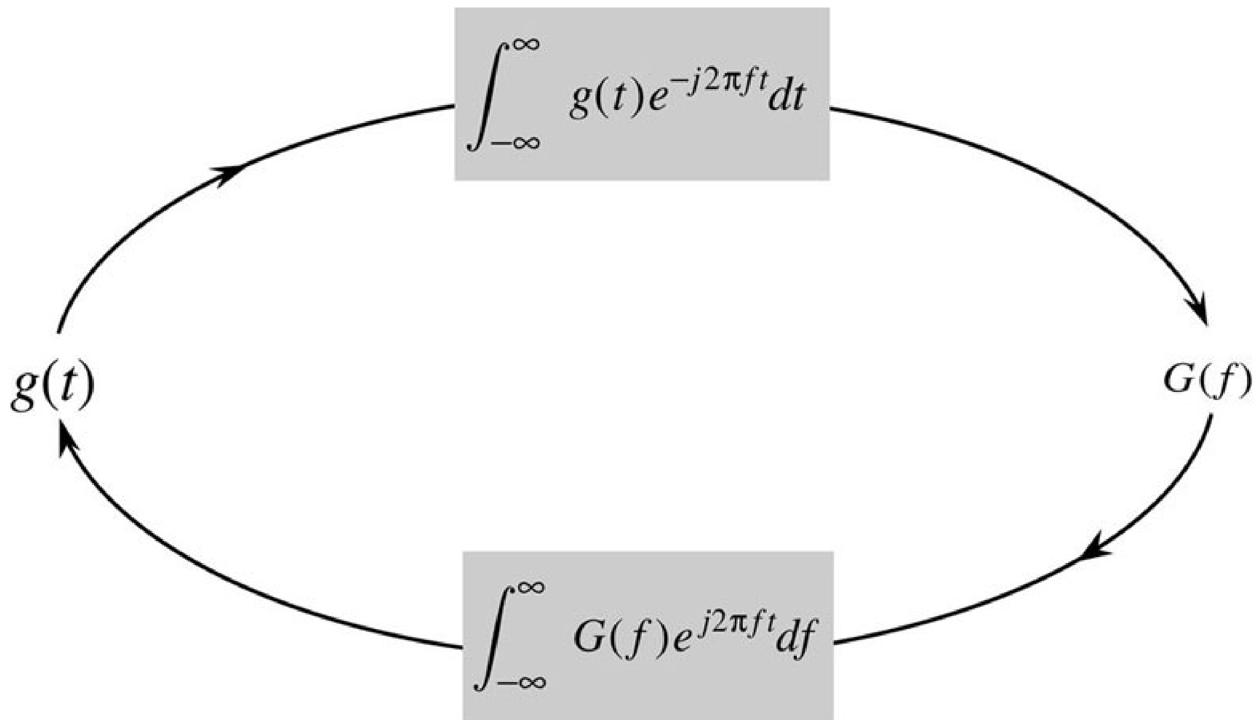
نتیجه: تبدیل فوریه تابع $u(t)$:

$$u(t) = (1/2)(\mathrm{sgn}(t) + 1)$$

$$\boxed{u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2j\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)}$$

بعضی خواص تبدیل فوریه

۱) رابطه حوزه زمان ـ فرکانس



۲) خاصیت دوگانی (Duality):

$$\boxed{\begin{array}{c} g(t) \Longleftrightarrow G(f) \\ \Downarrow \\ G(t) \Longleftrightarrow g(-f) \end{array}}$$

و با استفاده از خاصیت قرینه کردن زمان یا فرکانس که کمی بعد اثبات خواهد شد نتیجه می‌شود که:

$$\boxed{\begin{array}{c} \Downarrow \\ G(-t) \Longleftrightarrow g(f) \end{array}}$$

مثال:

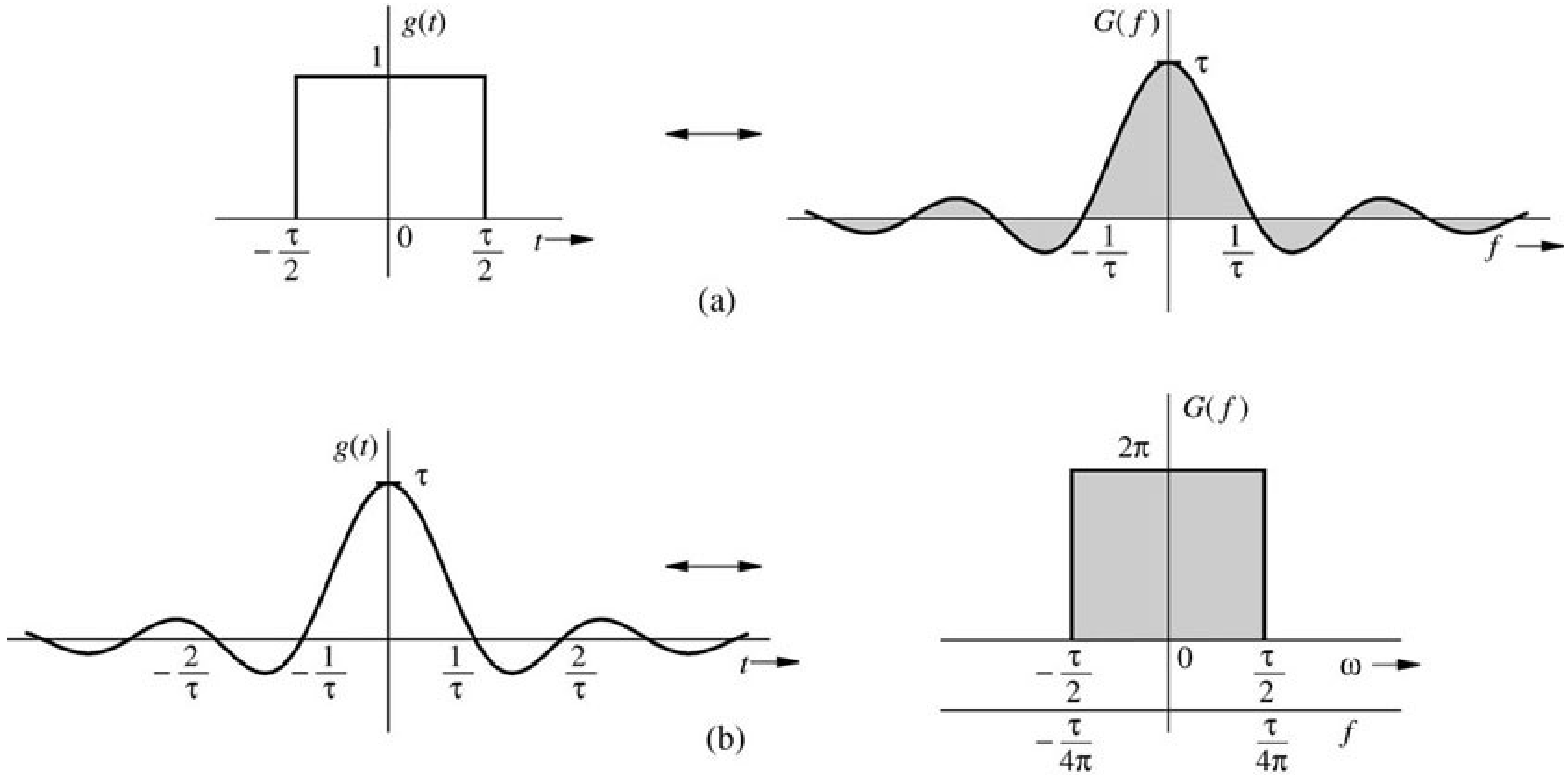
$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow \tau\,\mathrm{sinc}(\pi\tau f)$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha\,\mathrm{sinc}(\pi\alpha t) \Longleftrightarrow \Pi\left(\frac{-f}{\alpha}\right) = \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$2B\,\mathrm{sinc}(2\pi Bt) \Longleftrightarrow \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$



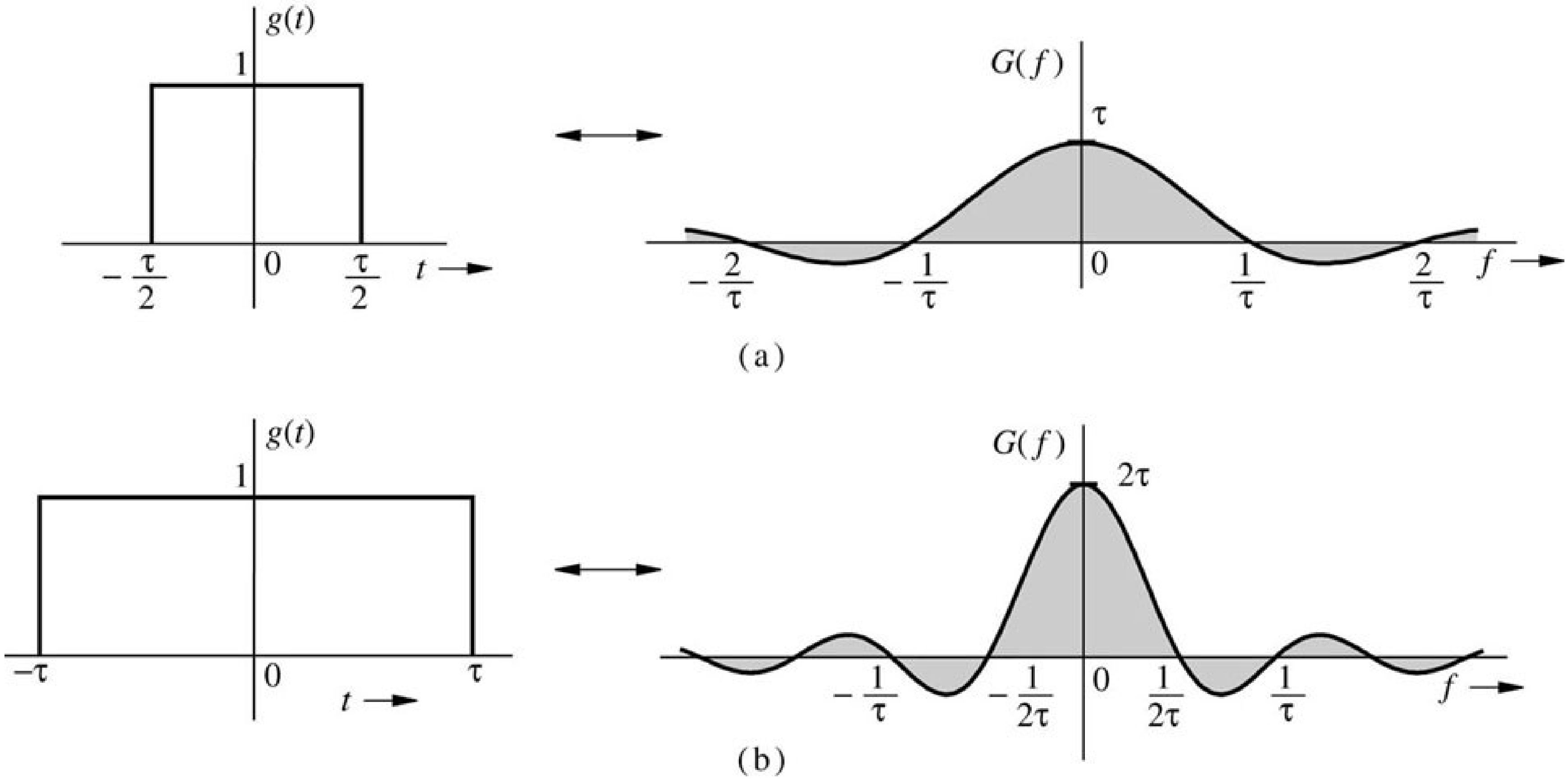
شکل را اصلاح کنید(!)و شکل جدید را بکشید.

خاصیت تغییر مقیاس زمان:

$$\boxed{\begin{gathered} g(t) \Longleftrightarrow G(f) \\ \Downarrow \\ g(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right) \end{gathered}}$$

نتیجه: اگر $a=-1$:

$$\boxed{g(-t) \Longleftrightarrow G(-f)}$$

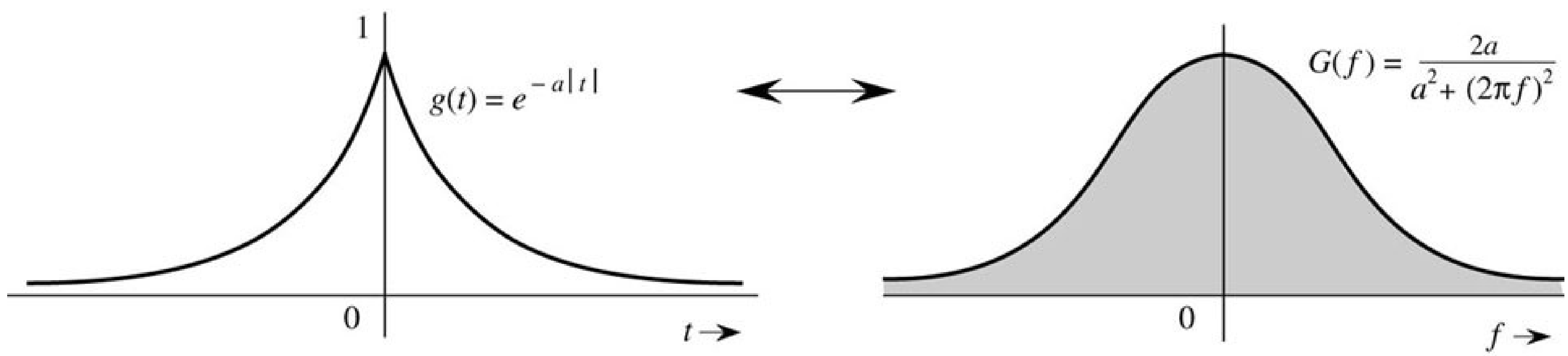


هرچه سیگنال در زمان پهن‌تر باشد در حوزه فرکانس باریک‌تر است و برعکس.
پهنای باند (bandwidth) سیگنال (با واحد هرتز) با عرض یا مدت زمان (duration) (با واحد ثانیه) نسبت عکس دارد.

مثال:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f} \quad \Rightarrow \quad e^{at}u(-t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a-j2\pi f}$$

$$e^{-a|t|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

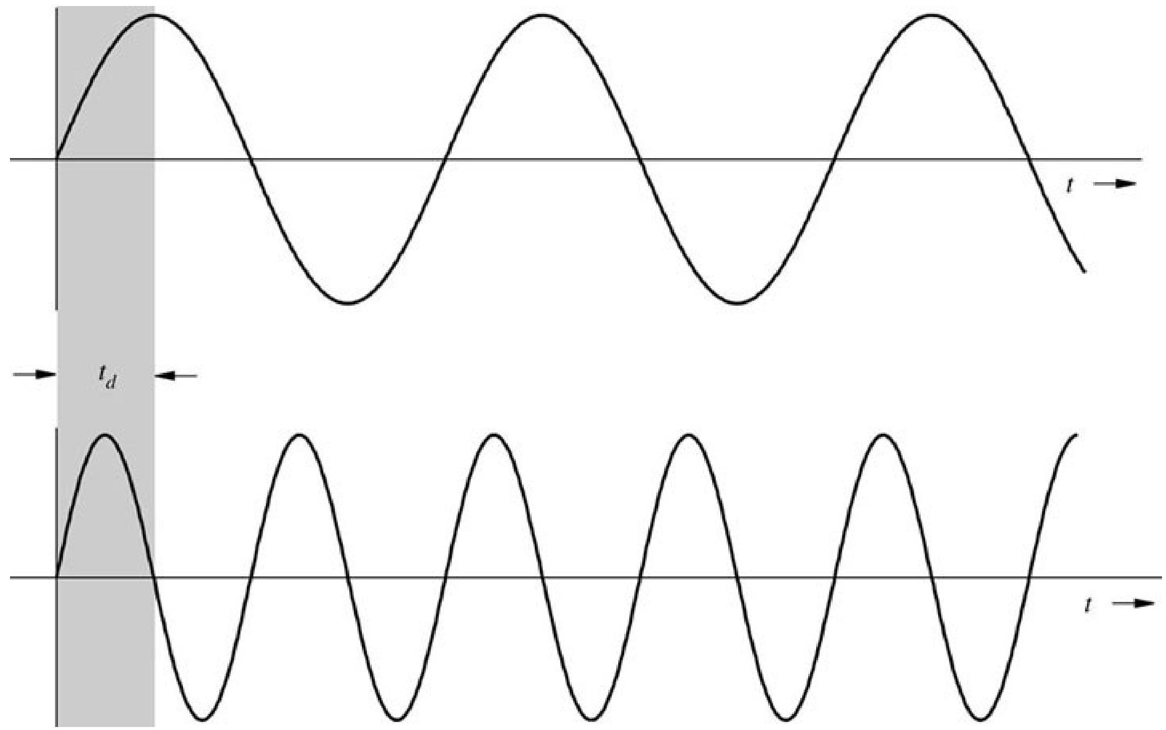


(a) (b)

خاصیت انتقال زمانی:

$$\begin{gathered} g(t) \Longleftrightarrow G(f) \\ \Downarrow \\ g(t-t_0) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-j2\pi f t_0} G(f) \end{gathered}$$

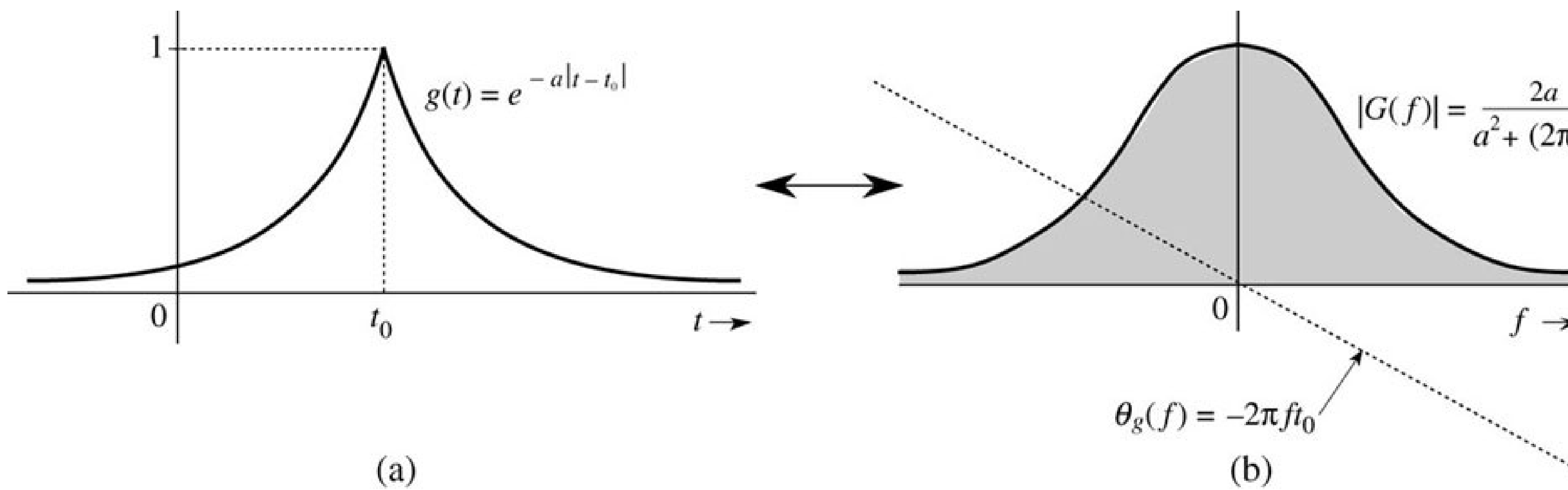
تأخیر در سیگنال به اندازه t_0 ، اندازه طیف سیگنال را تغییر نمی‌دهد و فاز آن را به اندازه $-j2\pi f t_0$ تغییر می‌دهد. این تغییر فاز تابعی خطی نسبت به f است. یعنی برای یک تأخیر مشخص در سیگنال، فرکانسهای بالاتر موجود در طیف در معرض تغییر فاز بیشتری قرار می‌گیرند تا فرکانس‌های کوچکتر.



تأخیر ثابت t_d برای سینوسی بالا معادل تغییر فاز $\pi/2$ و برای سینوسی پایین که فرکانسش دو برابر است معادل تغییر فاز π است.

مثال: تبدیل فوریه $e^{-a|t-t_0|}$ را بیابید.

$$e^{-a|t-t_0|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t_0}$$



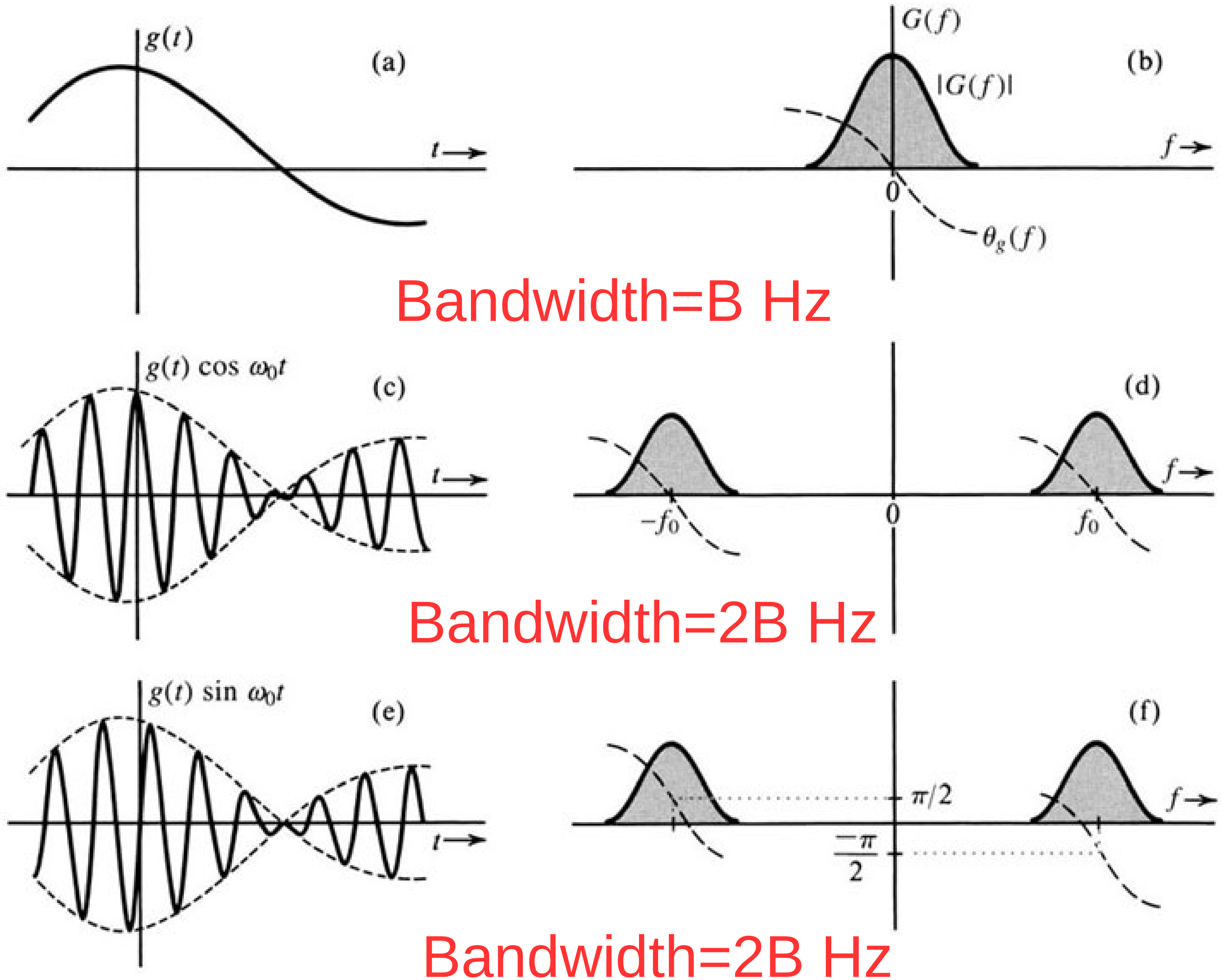
خاصیت انتقال فرکانسی:

$$g(t) \Longleftrightarrow G(f)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t} g(t) \Longleftrightarrow G(f-f_0)$$

تابع $\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}$ یک تابع حقیقی نیست و مقادیر آن مستقیماً قابل تولید نیست.
بنابراین عمل انتقال فرکانسی در عمل با ضرب کردن تابع در توابع سینوسی انجام می‌شود.

$$g(t)\cos 2\pi f_0 t \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)[G(f-f_0)+G(f+f_0)]$$

$$g(t)\sin 2\pi f_0 t \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\left[G(f-f_0)\mathrm{e}^{-j\pi/2}+G(f+f_0)\mathrm{e}^{j\pi/2}\right]$$


g(t)
(a)
t
G(f)
(b)
|G(f)|
f
0
θg(f)
Bandwidth=B Hz
g(t) cos ω0t
(c)
t
(d)
f
−f0
0
f0
Bandwidth=2B Hz
g(t) sin ω0t
(e)
t
(f)
π/2
f
−π/2
Bandwidth=2B Hz

تبدیل فوریه توابع متناوب:

یادآوری: $e^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow \delta(f-f_0)$

به فرض $g(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T_0 باشد:

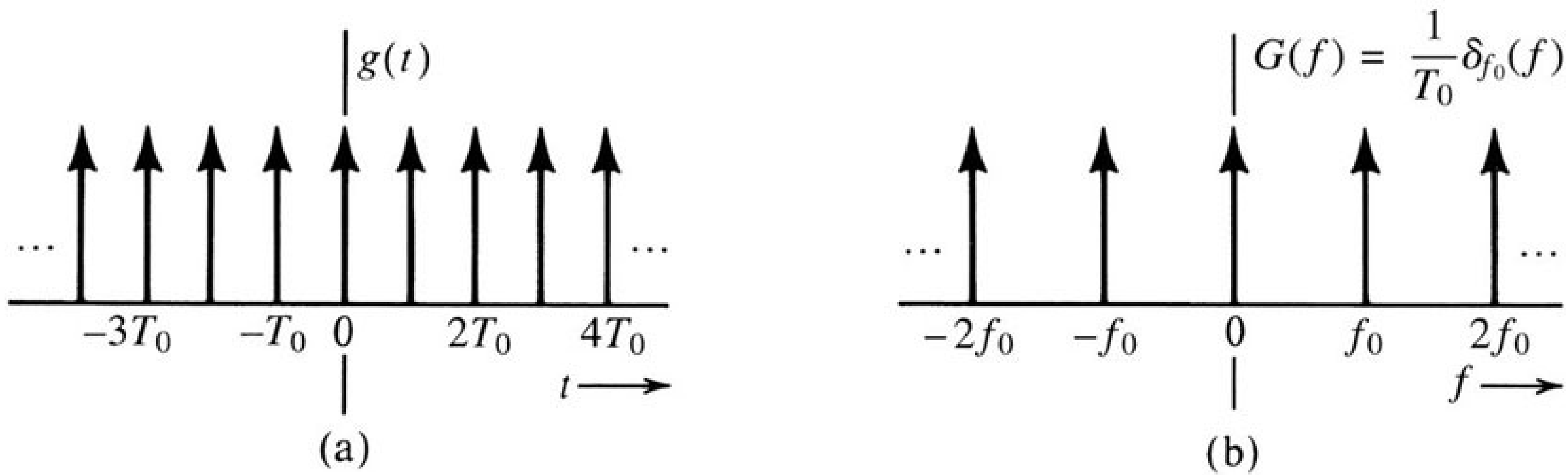
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2n\pi f_0 t}$$

$$\Downarrow$$

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(f - nf_0)$$

مثال: تبدیل فوریه قطار ضربه:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0) \quad , f_0 = \frac{1}{T_0}$$



قضیه کانولوشن

یادآوری : کانولوشن دو تابع $g(t)$ و $w(t)$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) w(t-\tau) \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) w(\tau) \mathrm{d}\tau$$

حال اگر:

$$g_1(t) \Longleftrightarrow G_1(f) \qquad g_2(t) \Longleftrightarrow G_2(f)$$

کانولوشن حوزه زمان

$$\boxed{g_1(t) * g_2(t) \Longleftrightarrow G_1(f).G_2(f)}$$

کانولوشن حوزه فرکانس
(ضرب در حوزه زمان)

$$\boxed{g_1(t).g_2(t) \Longleftrightarrow G_1(f) * G_2(f)}$$