به نام خدا

محاسبه میدان ناشی از مسطیل باردار یکنواخت بر روی محور تقارن عمودی آن

سید محمد جواد طباطبایی یزدی

مسئله این است که مستطیلی به ابعاد معلوم با چگالی بار سطحی یکتواخت در اختیار داریم و می خواهیم میدان الکتریکی را روی محور عمود بر صفحه مستطیل گذرنده از مرکز آن محاسبه کنیم .

روش عادی حل این مسئله تقسیم مستطیل به نوارهای باریک ، محاسبه میدان هر نوار و انتگرال گیری از آن است . با توجه به تقارن ، می بایست میدان در راستای محور باشد پس انتگرال گیری محدود به محاسبه مولفه در راستای محور میدان می شود .

اما روش دومی نیز در این جا مطرح میشود که بدون نیاز به انتگرال گیری با محاسبه شار الکتریکی گذرنده از مستطیل به کمک هندسه کروی انجام میشود .

روش اول : انتگرال گیری

میدان الکتریکی ناشی از یک پاره خط به طول a روی عمود منصف آن از انتگرال گیری بدست می آید :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R\sqrt{\frac{a^2}{4} + R^2}}$$

که R فاصله تا پاره خط است . حال با تعریف متغیری به عنون فاصله نوار از مرکز مستطیل و بدست آوردن R و dq بر حسب آن متغیر و دیفرانسیلش و با انتگرال گیری از فقط مولفه عمود موازی محور میدان به جواب نهایی خواهیم رسید :

$$E = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} Sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 + 4\frac{h^2}{a^2}\right)\left(1 + 4\frac{h^2}{b^2}\right)}}\right)$$

که در آن h فاصله نقطه اندازه گیری میدان از مرکز مستطیل ، a و b ابعاد مستطیل و σ چگالی بار سطحی مستطیل است . در حد h/b و h/a به سمت بی نهایت جواب به صورت $E = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} Sin^{-1}(1) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ خواهد شد که با قانون گوس نیز چنین نتیجه میشود .

اگر فقط یکی از اضلاع به بی نهایت میل کند نیز می توان میدان را به سادگی باز از روش شار که در قسمت بعدی توضیح خواهیم داد به دست آورد .

روش دوم : شار

در روش شار به اینگونه عمل می کنیم :

۱. یک بار نقطه ای در مکانی که می خواهیم میدان را در آن اندازه بگیریم قرار می دهیم .
۲. فرض می کنیم که روی مستطیل باری وجود ندارد . (برای اینکه در چند قسمت بعد ابهامی وجود نیاید)
۳. کره ای فرضی در نظر می گیریم که مرکزش بار نقطه ای باشد و شعاعش برابر با فاصله بار از صفحه مستطیل باشد و در مرکز مستطیل بر صفحه مستطیل مماس باشد .
۴. تصویر مستطیل را بر روی کره می یابیم . این تصویر ناحیه محصور شده توسط چند دایره عظیمه کره است .

۵. نسبت مساحت تصویر مستطیل روی کره به کل مساحت کره را می یابیم . چون تنها بار موجود بار نقطه ای واقع در مرکز کره است (فرض قسمت ۲) می توانیم بگوییم که شار الکتریکی روی خطوط شعاعی به طور یکنواخت در فضا پخش می شود ، و به این ترتیب با داشتن نسبت گفته شده می توان شار گذرنده از تصویر مستطیل روی کره را یافت .

۶. چون شار جهتگیری شعاعی دارد پس شار گذرنده از تصویر مستطیل روی کره همان شار گذرنده از خود مستطیل . حال با توجه به این فرض که شار گذرنده از سطح مستطیل انتگرال سطحی مولفه میدان عمود بر سطح روی کل سطح مستطیل است ، پس اگر بر روی سطح چگالی بار سطحی یکنواختی وجود داشته باشد ، نیروی وارد از بار نقطه ای به سطح مستطیل (که با توجه به تقارن عمود بر صفحه مستطیل است) همان چگالی بار سطحی ضربدر شار گذرنده است . اثبات دقیق این مطلب در طی حل مسئله آورده شده است .

۷. حال که نیروی وارد از بار نقطه ای به مستطیل با چگالی بار سطحی یکنواخت را یافتیم با توجه به قانون ۳ نیوتون این نیروی برابر و در جهت قرینه نیرویی است که صحفه مستطیلی به بار نقطه ای وارد می کند .

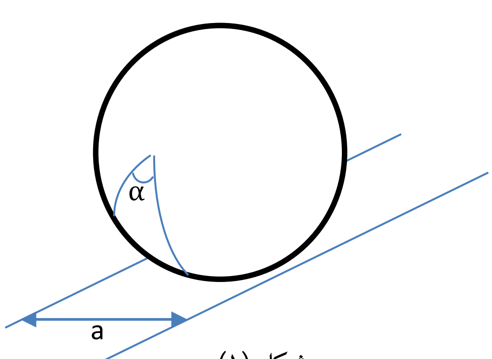
۸. نیروی وارد به بار نقطه ای از طرف مستطیل همان میدان ناشی از مستطیل در مکان بار نقطه ای ضربدر اندازه بار است . و خواسته مسئله با تقسیم نیروی بدست آمده به اندازه بار نقطه ای پیدا میشود .

حال که قدم های حل مسئله مشخص اند واضح است که مهم ترین بخش حل مسئله یافتن مساحت تصویر مستطیل روی کره است .

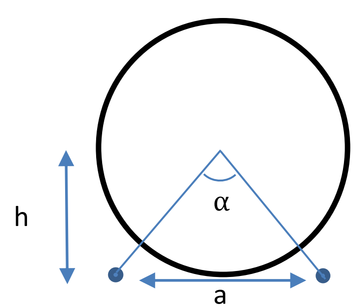
ابتدا مسئله ساده تری را که در قسمت قبل گفتیم بدون انتگرال گیری و از روش شار حل می کنیم . فرض می کنیم یکی از اضلاع مستطیل نسبت به بقیه طول های موجود در مسئله (فاصله نقطه اندازه گیری میدان تا صفحه مستطیل و ضلع دیگر مستطیل) بسیار بزرگتر است . باتوجه به پاسخ ارائه شده در قسمت قبل ، جواب را پیش بینی می کنیم (a ضلع کوچک مستطیل است) :

$$E = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} Sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1+4\frac{h^2}{a^2}\right)}}\right) = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} tan^{-1}\left(\frac{a}{2h}\right)$$

مطابق شکل مرز های مستطیل دو خط بی نهایت هستند که تصویر آنها روی کره (منظور در اینجا کره ای است که در قدم ۳ معرفی شد) یک ۲ ضلعی (کروی است) که در واقع محل برخورد دو دایره عظیمه این کره است . به زاویه این دو دایره عظیمه با هم در محل تقاطعشان ، زاویه ۲ ضلعی می گوییم و در اینجا α می نامیم . می دانیم مساحت یک ۲ ضلعی روی کره : $2\alpha R^2$ است . برای یافتن زاویه α از صفحه موازی عرض a و عمود بر ضلع بی نهایت مستطیل به دو ضلعی نگاه می کنیم که شکل ۲ را می بینیم .



شکل (۱)



شکل (۲)

زاویه آلفا بدست می آید: $\alpha = 2\arctan(\frac{a}{2h})$. پس مساحت تصویر نوار روی صفحه میشود :

$$s = 4\arctan(\frac{a}{2h})h^2$$

و با توجه به یکنواخت بودن شار ناشی از بار q در مرکز کره روی سطح کره ، شار گذرنده از مستطیل ϕ داریم :

$$\frac{\phi}{\frac{q}{\epsilon_0}} = \frac{s}{4\pi h^2} \rightarrow \phi = \frac{q}{\epsilon_0}\frac{\arctan(\frac{a}{2h})}{\pi}$$

از طرفی شار گذرنده از مستطیل عبارت است از :

$$\phi = \int \vec{E}.\overrightarrow{da}$$

که انتگرال فوق روی کل سطح مستطیل گرفته میشود . از طرفی اگر محور z را عمود بر صفحه بگیریم ، داریم :

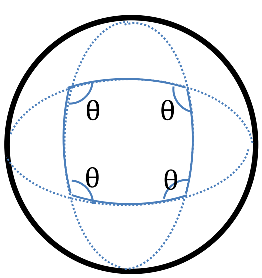
$$\phi = \int E_z\, da \qquad \longrightarrow \qquad \sigma\phi = \int \sigma E_z\, da = \int E_z\, dq = \int dF = F$$

که F نیروی وارد از بار q به مستطیل باردار با چگالی یکنواخت σ است . نیروی ناشی از مستطیل به بار q نیز هم اندازه F است . پس F تقسیم بر q میدان ناشی از مستطیل در مکان بار را می دهد . که خواسته مسئله است :

$$E = \frac{F}{q} = \frac{\sigma\phi}{q} = \frac{\sigma \arctan(\frac{a}{2h})}{\pi\epsilon_0}$$

معادله فوق میدان ناشی از یک نوار باریک به عرض a در ارتفاع h بالای مرکز آن است ، نوار با چگالی بار سطحی σ باردار شده است .

حال به حل مسئله اصلی می پردازیم . ابتدا s را می یابیم که مساحت چهار ضلعی (کروی) تصویر مستطیل روی کره است . شکل ۳ را در نظر بگیرید . تصویر مستطیل روی کره در شکل مقابل نمایش داده شده . اگر زاویه θ مشخص شده در شکل ۳ را داشته باشیم ،



شکل (۳)

با توجه به اینکه مساحت یک مثلث روی کره برابر $R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$ است که آلفا و بتا و گاما زوایای مثلث اند ، و از آنجایی که مستطیل مقابل برابر دو مثلث است پس مساحت آن عبارت است از : $s = h^2(4\theta - 2\pi)$

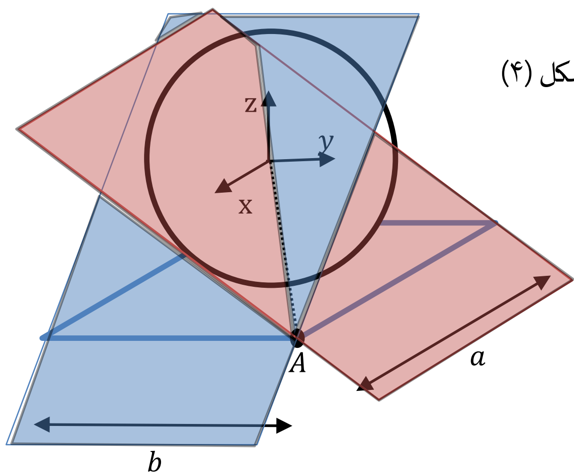
برای یافتن تتا ، به این طریق عمل می کنیم :

شکل ۴ را در نظر بگیرید . دو صفحه تعریف می کنیم : یک صفحه گذرنه از ضلع موازی محور x و مرکز کره و یک صفحه گذرنده از ضلع موازی محور y و مرکز کره . محل تقاطع هر کدام از این دو صفحه با سطح کره همان تصویر اضلاع مستطیل روی کره است . از طرفی در مکان تصویر راس مستطیل روی کره ، دو صفحه نیز با هم تلاقی دارند . این دو صفحه چون از مرکز کره می گذرند در هر نقطه ای از برخورد با سطح کره بر آن عمودند . حال در نقطه

مذکور (تلاقی دو صفحه و سطح کره) نیز دو صفحه با هم زاویه θ و با سطح مماس بر کره زاویه عمود می سازند . پس زاویه بین این دوصفحه همان زاویه تتا است . برای یافتن زاویه بین این دو صفحه از بردار یکه های عمود بر این دو صفحه استفاده می کنیم :

$$\hat{n}_1 = \frac{(h)\hat{y} + \left(\frac{b}{2}\right)\hat{z}}{\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}}$$

$$\hat{n}_2 = \frac{(h)\hat{x} + \left(\frac{a}{2}\right)\hat{z}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}}$$



شکل (۴)

زاویه تتا مکمل زاویه بین ۲ بردار یکه مذکور است :

$$\theta = \pi - cos^{-1}(\hat{n}_1.\hat{n}_2) = \pi - cos^{-1}\left(\frac{\frac{ab}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{b^2}{4}}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}\right) = \pi - cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{h^2}{b^2}}\sqrt{1+4\frac{h^2}{a^2}}}\right)$$

حال مساحت تصویر مستطیل بدست می آید :

$$s = h^2(4\theta - 2\pi) = h^2\left(2\pi - 4cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{h^2}{b^2}}\sqrt{1+4\frac{h^2}{a^2}}}\right)\right) = 4h^2\left(\frac{\pi}{2} - cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{h^2}{b^2}}\sqrt{1+4\frac{h^2}{a^2}}}\right)\right) = 4h^2\left(sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{h^2}{b^2}}\sqrt{1+4\frac{h^2}{a^2}}}\right)\right).$$

شار گذرنده از مستطیل اگر در مرکز کره یک بار q باشد عبارت است از ϕ که از تناسب مقابل بدست می اید :

$$\frac{s}{4\pi h^2} = \frac{\phi}{\frac{q}{\varepsilon_0}} \xrightarrow{yields} \phi = \frac{q}{\pi\varepsilon_0} sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{h^2}{b^2}}\sqrt{1+4\frac{h^2}{a^2}}}\right)$$

اگر صفحه مستطیل چگالی بار سطحی سیگما داشته باشد نیروی عمود بر سطح وارد بر کل آن از طرف بار q می شود :

$$F = \sigma\, \phi = \frac{\sigma q}{\pi\varepsilon_0} sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{h^2}{b^2}}\sqrt{1+4\frac{h^2}{a^2}}}\right)$$

با توجه به قانون3 نیوتون نیروی وارد از صفحه به بار نیز به همین اندازه و در جهت مخالف است . پس میدان ناشی از صفحه مستطیلی در مکان بار یعنی همان مرکز کره ، همان میدانی که مطلوب بود عبارت است از :

$$E = \frac{F}{q} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4\frac{h^2}{b^2}}\sqrt{1+4\frac{h^2}{a^2}}}\right).$$

که دقیقا همان نتیجه بدست آمده بوسیله انتگرال گیری است .