۱-۱ درک شهودی (Intuitive)

شهود می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد.

نکات مهم و کاربردی

۱- نتایج حاصل از شهود نمی‌تواند صد در صد درست باشد.
۲- درک شهودی به ما کمک می‌کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدس‌های بهتری برای اثبات قسمت‌های مختلف بزنیم. یعنی ما را به سوی یک استدلال موقت رهنمون می‌کند.
۳- معمولاً استدلالی موقت بر مبنای قیاس و استقرا می‌باشد.

۲-۱ استدلال تمثیلی یا قیاسی (Analogy)

قیاس در واقع یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون می‌باشد، که در تمام سطوح مختلف قابل استفاده است.

نکات مهم و کاربردی

۱- نتایج حاصل از استدلال تمثیلی نمی‌تواند صد در صد درست باشد و دارای محدودیت می‌باشد.
۲- انواع تمثیل می‌توانند در ایجاد یک زمینه شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی کمک مؤثری باشند.

۳-۱ استدلال استقرایی (Inductive reasoning)

استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.

نکات مهم و کاربردی

۱- در علوم تجربی به این نوع استدلال، روش تجربی یا علمی گفته می‌شود.
۲- نتایج حاصل از استدلال استقرایی نمی‌تواند صد در صد درست باشد. زیرا که همیشه این امکان وجود دارد که شواهد بیشتری کشف شوند تا نادرستی نتیجه‌گیری کلی، بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را نشان دهند.

۴-۱ اصل استقرا

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره عدد طبیعی n باشد. اگر $P(1)$ درست باشد و از درستی $P(k)$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز صحیح است.

گام‌های اثبات یک حکم با استفاده از استقرا

۱- درستی حکم را برای $n=1$ نشان می‌دهیم؛
۲- فرض می‌کنیم حکم برای $n=k$ صحیح می‌باشد؛
۳- نشان می‌دهیم حکم برای $n=k+1$ برقرار است.

مثال ۱) در موارد زیر کدام مربوط به درک شهودی می‌باشد؟

الف) با چشیدن مزه یک میوه به میزان شیرینی آن پی می‌بریم. ☑

ب) با شنیدن صدای دزدگیر ماشین پی به حضور سارق ماشین می‌بریم. ☒

مثال ۲) ضرب المثل « مارگزیده، از ریسمان سیاه و سفید می‌ترسد. » به کدام استدلال اشاره دارد؟

جواب: در ضرب المثل « مارگزیده، از ریسمان سیاه و سفید می‌ترسد. »، اشاره می‌شود هر کسی که به دلیل گزیدگی مار دچار ناراحتی شده است، با مشاهده هر چیزی شبیه مار، مثلاً ریسمان سیاه و سفید، آن را با مار مقایسه می‌کند و خصوصیات مار را به آن نسبت می‌دهد و در نتیجه از آن می‌ترسد. بنابراین نوع استدلالی که در این ضرب المثل به کار رفته است، **استدلال قیاسی** است.

مثال ۳) استدلال استقرایی را تعریف نمایید.

جواب: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گویند.

مثال ۴) الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$۱۱^{۱} = ۱۱$

$۱۱^{۲} = ۱۲۱$

$۱۱^{۳} = ۱۳۳۱$

الف) بدون محاسبه، $۱۱^{۴}$ را حدس بزنید.

جواب: ۱۴۴۴۱

ب) با چه نوع استدلالی مقدار فوق را حدس زدید؟

جواب: استدلال استقرایی

پ) مقدار $۱۱^{۴}$ را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

جواب: ۱۴۶۴۱ . خیر

ت) با توجه به نمونه فوق، ایراد استدلال فوق را بیان کنید.

جواب: در استدلال استقرایی همیشه این امکان وجود دارد که شواهد بیشتری کشف شوند تا نادرستی نتیجه‌گیری کلی، بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را نشان دهند.

مثال ۵) با استفاده از استقرای ریاضی حکم‌های زیر را برای اعداد طبیعی اثبات نمایید.

الف) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

جواب:

$$P(1):\ 1=\frac{1(1+1)}{2}\Rightarrow 1=1$$

فرض استقرا : $P(k):\ 1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

حکم استقرا : $P(k+1):\ 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$P(k+1):\ 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

ب) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

جواب:

$$P(1):\ 1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2\Rightarrow 1=1$$

فرض استقرا : $P(k):\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2$

حکم استقرا : $P(k+1):\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$

$$P(k+1):\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2}{4}(k+1)^2+(k+1)^3$$
$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+(k+1)\right)=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=(k+1)^2\left(\frac{(k+2)^2}{4}\right)=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$
$$=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

پ) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

جواب: $P(1):\ \frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

فرض استقرا : $P(k):\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$

حکم استقرا : $P(k+1):\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}$

$$P(k+1):\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)=1-\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^k\times 2^1}\right)$$
$$=1-\left(\frac{2-1}{2^k\times 2^1}\right)=1-\frac{1}{2^{k+1}}$$

ت) $r\neq 1;\quad 1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

جواب: $P(1):\ 1+r=\frac{1-r^{1+1}}{1-r}\Rightarrow 1+r=\frac{1-r^2}{1-r}\Rightarrow 1+r=\frac{(1-r)(1+r)}{1-r}\Rightarrow 1+r=1+r$

!!! مواظب باش برای بررسی درستی $P(1)$ گول نخوری !!!

فرض استقرا : $P(k):\ 1+r+r^2+\cdots+r^k=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}$

حکم استقرا : $P(k+1):\ 1+r+r^2+\cdots+r^k+r^{k+1}=\frac{1-r^{k+2}}{1-r}$

$$P(k+1):\ 1+r+r^2+\cdots+r^k+\left(r^{k+1}\right)=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}+r^{k+1}=\frac{1-r^{k+1}+r^{k+1}(1-r)}{1-r}$$
$$=\frac{1-r^{k+1}+r^{k+1}-r^{k+2}}{1-r}=\frac{1-r^{k+2}}{1-r}$$

نکته: از قسمت (الف) مثال ۵ می‌توان دریافت که مجموع n عدد طبیعی متوالی، از رابطه $\frac{n(n+1)}{2}$ به دست می‌آید.

نکته: از قسمت (ب) مثال ۵ می‌توان دریافت که مجموع مکعب‌های n عدد طبیعی متوالی، برابر مربع مجموع آنهاست.

۱- با استفاده از استدلال تمثیلی مناسب نشان دهید حاصل‌ضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی مثبت است.

۲- تعیین کنید هر یک از موارد زیر مربوط به کدام نوع استدلال تمثیلی، استدلال استقرایی و یا درک شهودی می‌باشد.

الف) با شنیدن صدای رعد و برق می‌فهمیم که آسمان بارانی خواهد شد.

ب) با دیدن ردپایی بر برف متوجه می‌شویم که از آنجا جانداری گذشته است.

پ) نمرات دوست شما خوب است.

۳- الگوی روبه‌رو را در نظر بگیرید.

$۲^{۲} - ۱ = ۳ \times ۱$

$۳^{۲} - ۱ = ۴ \times ۲$

$۴^{۲} - ۱ = ۵ \times ۳$

الف) سطر بعدی الگو را حدس بزنید.

ب) حدس خود را آزمایش کنید. آیا درست است؟

پ) الگو را تا سه سطر دیگر ادامه دهید.

ت) با چه نوع استدلالی حدس زدید؟

ث) با استفاده از اتحاد مزدوج نشان دهید که الگوی فوق برای هر عدد صحیح درست است.

۴- با استفاده از اصل استقرا، درستی احکام داده شده در هر قسمت را برای اعداد طبیعی نشان دهید.

الف) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) $2+6+10+\cdots+(4n-2)=2n^2$

پ) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

ت) $\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۵^{۲}}+\frac{۴}{۵^{۳}}+\cdots+\frac{۴}{۵^{n}}=۱-\frac{۱}{۵^{n}}$

ث) $۱\times۲+۲\times۳+۳\times۴+\cdots+n(n+۱)=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$

ج) $\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{n}{n+۱}$

مثال ۵) با استفاده از اصل استقرای ریاضی، هر یک از قسمت‌های زیر را ثابت کنید ($n \in \mathbb{N}$).

الف) $۱+۱(۱!)+۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+n(n!)=(n+۱)!$

جواب: $P(۱):\ ۱+۱(۱!)=(۱+۱)! \Rightarrow ۱+۱\times۱=۲! \Rightarrow ۲=۲$

فرض استقرا: $P(k):\ ۱+۱(۱!)+۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+k(k!)=(k+۱)!$

حکم استقرا: $P(k+۱):\ ۱+۱(۱!)+۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+k(k!)+(k+۱)((k+۱)!)=(k+۲)!$

$$P(k+۱):\ ۱+۱(۱!)+۲(۲!)+۳(۳!)+\cdots+k(k!)+(k+۱)((k+۱)!)=(k+۱)!+(k+۱)((k+۱)!)$$
$$=(k+۱)![۱+(k+۱)]=(k+۱)!(k+۲)=(k+۲)(k+۱)!=(k+۲)!$$

ب) $x>۰;\qquad \log x^n=n\log x$

جواب: $P(۱):\ \log x^۱=۱\times\log x \Rightarrow \log x=\log x$

فرض استقرا: $P(k):\ \log x^k=k\log x$

حکم استقرا: $P(k+۱):\ \log x^{k+۱}=(k+۱)\log x$

$$P(k+۱):\ \log x^{k+۱}=\log\left(x^k\times x^۱\right)=\log x^k+\log x^۱=k\log x+\log x=(k+۱)\log x$$

پ) $a\ge -۱;\qquad (۱+a)^n\ge ۱+na$

جواب: $P(۱):\ (۱+a)^۱\ge ۱+۱\times a \Rightarrow ۱+a\ge ۱+a$

فرض استقرا: $P(k):\ (۱+a)^k\ge ۱+ka$

حکم استقرا: $P(k+۱):\ (۱+a)^{k+۱}\ge ۱+(k+۱)a$

$$P(k+۱):\ (۱+a)^{k+۱}=(۱+a)^k(۱+a)\xrightarrow{a\ge -۱\Rightarrow ۱+a\ge ۰}$$
$$P(k+۱):\ (۱+a)^k\ge ۱+ka\xrightarrow{a\ge -۱\Rightarrow ۱+a\ge ۰}(۱+a)^k(۱+a)\ge(۱+ka)(۱+a)$$
$$\Rightarrow (۱+a)^{k+۱}\ge ۱+ka+a+ka^۲=۱+(k+۱)a+ka^۲\ge ۱+(k+۱)a \Rightarrow (۱+a)^{k+۱}\ge ۱+(k+۱)a$$

ت) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$

جواب: $P(1):\left(1-\frac{1}{(1+1)^2}\right)=\frac{1+2}{2(1+1)}\Rightarrow 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{2\times 2}\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

فرض استقرا : $P(k):\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}$

حکم استقرا : $P(k+1):\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+3}{2(k+2)}$

$$P(k+1):\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}\times\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\times\left(\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}\times\left(\frac{k^2+4k+4-1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}\times\left(\frac{k^2+4k+3}{(k+2)^2}\right)$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\times\left(\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+3}{2(k+2)}$$

مثال ۶) به ازای هر عدد طبیعی n نشان دهید:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{bmatrix}$$

جواب: $P(1):\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}\cos 1\alpha & -\sin 1\alpha\\ \sin 1\alpha & \cos 1\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

فرض استقرا : $P(k):\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\cos k\alpha & -\sin k\alpha\\ \sin k\alpha & \cos k\alpha\end{bmatrix}$

حکم استقرا : $P(k+1):\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha\\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha\end{bmatrix}$

!!! ادامه حل به عهده خودتون (البته برای دانش آموزان حرفه‌ای) !!!

مثال ۷) با استفاده از استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید هر یک از نامساوی‌های زیر همواره برقرار است.

الف) $\left(1+\sqrt{3}\right)^n \geq 1+\sqrt{3}\,n$

جواب: $P(1):\ \left(1+\sqrt{3}\right)^1 \geq 1+\sqrt{3}\times 1 \Rightarrow 1+\sqrt{3} \geq 1+\sqrt{3}$

فرض استقرا : $P(k):\ \left(1+\sqrt{3}\right)^k \geq 1+\sqrt{3}\,k$

حکم استقرا : $P(k+1):\ \left(1+\sqrt{3}\right)^{k+1} \geq 1+\sqrt{3}\left(k+1\right)$

$$P(k+1):\ \left(1+\sqrt{3}\right)^k \geq 1+\sqrt{3}\,k \Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)^k \times \left(1+\sqrt{3}\right) \geq \left(1+\sqrt{3}\,k\right)\times\left(1+\sqrt{3}\right)$$
$$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)^{k+1} \geq 1+\sqrt{3}\,k+\sqrt{3}+3k \Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)^{k+1} \geq 1+\sqrt{3}\left(k+1\right)+3k \geq 1+\sqrt{3}\left(k+1\right)$$
$$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)^{k+1} \geq 1+\sqrt{3}\left(k+1\right)$$

ب) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

جواب: $P(1):\ 1 < 2\sqrt{1} \Rightarrow 1 < 2$

فرض استقرا : $P(k):\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$

حکم استقرا : $P(k+1):\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}$

$$P(k+1):\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} \Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

حال کافی است ثابت کنیم $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1}$. پس،

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{k} \leq 2\sqrt{k+1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 2\sqrt{k} \leq \frac{2\left(k+1\right)-1}{\sqrt{k+1}}$$
$$\xleftrightarrow{\sqrt{k+1}>0} 2\sqrt{k\left(k+1\right)} \leq 2k+1 \Leftrightarrow 4\left(k\left(k+1\right)\right) \leq \left(2k+1\right)^2 \Leftrightarrow 4k^2+4k \leq 4k^2+4k+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1$$

!!! البته به این نوع اثبات رابطه آخری، اثبات بازگشتی گفته می‌شود؛ که در بخش‌های آتی بررسی خواهد شد. !!!

۱- با استفاده از اصل استقرای ریاضی، هر یک از قسمت‌های زیر را ثابت کنید ($n \in \mathbb{N}$).

الف) $۳^n > ۲^n$

ب) $۲^n \geq n+۱$

پ) $۱+۲+۳+\cdots+n < \frac{۱}{۸}(۲n+۱)^۲$

ت) $\frac{۰}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{n-۱}{n!} = ۱-\frac{۱}{n!}$

❋ث) $۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + \cdots + (-۱)^{n-۱} n^۲ = (-۱)^{n-۱} \times \frac{n(n+۱)}{۲}$

❋ج) $۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}} > n!$

۲- نامساوی مثلث برای هر دو عدد حقیقی a و b به صورت $|a+b| \le |a| + |b|$ برقرار است. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید که برای هر n عدد حقیقی $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ داریم:

$$|x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n| \le |x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n|$$

۳- در رابطه $P(n) = ۱ + ۳ + \cdots + (۲n+۱)$ مقدار $P(۲)$ چه قدر است؟

مثال ۸) با استفاده از اصل استقرای ریاضی و برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید:

الف) عدد $۴^{۲n}-۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

جواب:

$$P(n):\ ۴^{۲n}-۱=۵r$$

$$P(۱):\ ۴^{۲\times ۱}-۱=۱۶-۱=۱۵=۵\times ۳$$

فرض استقرا : $P(k):\ ۴^{۲k}-۱=۵r$

حکم استقرا : $P(k+۱):\ ۴^{۲(k+۱)}-۱=۵r'$

$$P(k+۱):\ ۴^{۲k}-۱=۵r\Rightarrow \left(۴^{۲k}-۱\right)\times ۴^{۲}=۵r\times ۴^{۲}\Rightarrow ۴^{۲k+۲}-۱۶=۵r\times ۱۶\Rightarrow ۴^{۲(k+۱)}-۱-۱۵=۸۰r$$

$$\Rightarrow ۴^{۲(k+۱)}-۱=۱۵+۸۰r\Rightarrow ۴^{۲(k+۱)}-۱=۵(۳+۱۶r)\Rightarrow ۴^{۲(k+۱)}-۱=۵r'$$

ب) عدد $n^{۲}+n$ بر ۲ بخش‌پذیر است.

جواب:

$$P(n):\ n^{۲}+n=۲r$$

$$P(۱):\ (۱)^{۲}+(۱)=۱+۱=۲=۲\times ۱$$

فرض استقرا : $P(k):\ k^{۲}+k=۲r$

حکم استقرا : $P(k+۱):\ (k+۱)^{۲}+(k+۱)=۲r'$

$$P(k+۱):(k+۱)^{۲}+(k+۱)=k^{۲}+۲k+۱+k+۱=\left(k^{۲}+k\right)+۲k+۲=۲r+۲k+۲=۲(r+k+۱)=۲r'$$

پ) عدد $۵^{n}-۴n-۱$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

جواب:

$$P(n):\ ۵^{n}-۴n-۱=۱۶r \quad \text{و} \quad P(۱):\ ۵^{۱}-۴(۱)-۱=۰=۱۶\times ۰$$

فرض استقرا : $P(k):\ ۵^{k}-۴k-۱=۱۶r$

حکم استقرا : $P(k+۱):\ ۵^{k+۱}-۴(k+۱)-۱=۱۶r'$

$$P(k+1):\ 5^{k+1}-4(k+1)-1=5^k\times 5^1-4k-4-1=\left(5^k\times 5-5\right)-4k=5\left(5^k-1\right)-4k$$
$$=5(16r+4k)-4k=80r+20k-4k=80r+16k=16(5r+k)=16r'$$

مثال ۹) مجموع مکعبات سه عدد طبیعی متوالی بر ۹ بخش‌پذیر است.

جواب: $P(n):\ n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=9r$

$$P(1):\ (1)^3+(1+1)^3+(1+2)^3=1+8+27=36=9\times 4$$

فرض استقرا : $P(k):\ k^3+(k+1)^3+(k+2)^3=9r$

حکم استقرا : $P(k+1):\ (k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=9r'$

$$P(k+1):\ (k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27$$
$$=k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+9\left(k^2+3k+3\right)=9r+9\left(k^2+3k+3\right)=9\left(r+k^2+3k+3\right)=9r'$$

مثال ۱۰) با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید، تعداد قطرهای هر nضلعی محدب برابر $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

جواب:

نکته: اگر یک ضلع به nضلعی محدب اضافه شود، به تعداد قطرهای آن $n-1$ قطر اضافه می‌شود.

$P(n)$: تعداد قطرهای nضلعی محدب $=\frac{n(n-3)}{2}$

$P(3)$: تعداد قطرهای ۳ضلعی محدب $=\frac{3(3-3)}{2}=0$

فرض استقرا : $P(k)$: تعداد قطرهای kضلعی محدب $=\frac{k(k-3)}{2}$

حکم استقرا : $P(k+1)$: تعداد قطرهای $k+1$ضلعی محدب $=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$

$P(k+1)$: تعداد قطرهای $k+1$ضلعی محدب = تعداد قطرهای kضلعی محدب + $(k-1)$

$$=\frac{k(k-3)}{2}+k-1=\frac{k^2-3k}{2}+k-1=\frac{k^2-3k+2k-2}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

۱-۵ اصل استقرای تعمیم‌یافته

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m > ۱$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

گام‌های اثبات یک حکم با استفاده از اصل استقرای تعمیم‌یافته

۱- m مناسب را به دست می‌آوریم؛

۲- درستی حکم را برای $n = m$ نشان می‌دهیم؛

۳- فرض می‌کنیم حکم برای $n = k \geq m$ صحیح می‌باشد؛

۴- نشان می‌دهیم حکم برای $n = k+۱$ برقرار است.

مثال ۱) در هر یک از قسمت‌های زیر ابتدا m مناسب را یافته و سپس با استفاده از اصل استقرای تعمیم یافته حکم را برای هر عدد طبیعی n ، $(n \geq m)$ ثابت کنید.

الف) $۲^n > ۲n+۱$

جواب:

n	۱	۲	$\boxed{۳}$	۴
۲^n	۲	۴	۸	۱۶
$۲n+۱$	۳	۵	۷	۹

با توجه به اطلاعات جدول فوق می‌توان دریافت که حکم برای $n \geq ۳$ همواره برقرار است.

پس $m = ۳$ و داریم،

فرض استقرا : $P(k): ۲^k > ۲k+۱$

حکم استقرا : $P(k+۱): ۲^{k+۱} > ۲(k+۱)+۱ \Rightarrow ۲^{k+۱} > ۲k+۳$

$$P(k+۱): ۲^k > ۲k+۱ \Rightarrow ۲^k \times ۲ > (۲k+۱)\times ۲ \Rightarrow ۲^{k+۱} > ۴k+۲$$

حال کافیست ثابت کنیم که $۴k+۲ \geq ۲k+۳$ ، پس،

$$۴k+۲ \geq ۲k+۳ \Leftrightarrow ۲k \geq ۱$$

و چون از ابتدا می‌دانستیم که $k \geq ۳$ می‌باشد، پس $۴k+۲ \geq ۲k+۳$ برای $k \geq ۳$ برقرار است و حکم ثابت می‌شود.

ب) $n!>3^n$

جواب:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\boxed{7}$	۸
$n!$	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰	۴۰۳۲۰
3^n	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷	۶۵۶۱

با توجه به اطلاعات جدول فوق می‌توان دریافت که حکم برای $n\geq 7$ همواره برقرار است. پس $m=7$ و داریم،

فرض استقرا : $P(k):\ k!>3^k$

حکم استقرا : $P(k+1):\ (k+1)!>3^{k+1}$

$$P(k+1): k!>3^k \Rightarrow (k+1)\times k!>(k+1)\times 3^k \Rightarrow (k+1)!>(k+1)\times 3^k$$

حال کافیست ثابت کنیم که $(k+1)\times 3^k\geq 3^{k+1}$ ، پس،

$$(k+1)\times 3^k\geq 3^{k+1} \Leftrightarrow (k+1)\times 3^k\geq 3^k\times 3 \Leftrightarrow k+1\geq 3$$

و چون از ابتدا می‌دانستیم که $k\geq 7$ می‌باشد، پس $(k+1)\times 3^k\geq 3^{k+1}$ برای $k\geq 7$ برقرار است و حکم ثابت می‌شود.

*** حالا برای اینکه خستگیت در بیاد تست کنکور سراسری سال ۹۴ رشته ریاضی رو از این چیزهایی که تا حالا خوندیم بررسی می‌کنیم. ***

تست: در اثبات نامساوی $n!>2^{n+1}$ ، به روش اصل استقرای تعمیم‌یافته، عدد m مناسب، و رابطه بدیهی در گام بعدی حکم، برای $k\geq m$ کدام است؟

۱) $m=5$ و $k+1>2$　　۲) $m=6$ و $k+1>2$

۳) $m=5$ و $(2k+1)>4$　　۴) $m=6$ و $(2k+1)>4$

جواب: عدد ۵ را برای حکم امتحان می‌کنیم، پس، $5!>2^{5+1}\Rightarrow 120>64$ که درست است و گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند.

برای اثبات درستی حکم، باید با فرض درستی $k!>2^{k+1}$، آن را برای $(k+1)!>2^{k+2}$ اثبات نماییم که داریم،

$$k!>2^{k+1} \Rightarrow (k+1)k!>(k+1)2^{k+1} \Rightarrow (k+1)!>(k+1)2^{k+1}$$

در اینجا فقط کافیست ثابت کنیم که $(k+1)2^{k+1}>2^{k+2}$.

$$(k+1)2^{k+1}>2^{k+2} \Leftrightarrow (k+1)2^{k+1}>2^{k+1}\times 2 \Leftrightarrow \boxed{k+1>2}$$

و گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱- برای آن‌که هر یک از نامساوی‌های زیر به ازای هر عدد طبیعی n ، $(n \geq m)$ برقرار باشد، m مناسب مسئله را بیابید.

الف) $\frac{۲^n}{(n+۱)!} < n$

ب) $\binom{۲n}{n} > ۲^n$

پ) $n^{n+۱} > (n+۱)^n$

۲- در هر یک از قسمت‌های زیر، با استفاده از اصل استقرای تعمیم‌یافته، حکم‌های زیر را برای هر عدد طبیعی n، $(n \geq m)$ ثابت کنید.

الف) $۲^n > n^۲$ $\qquad (n \geq ۵)$

ب) $۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n}-۱}<\frac{n}{۲} \qquad (n\geq ۳)$

پ) $\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n}>\frac{۱۳}{۲۴} \qquad (n\geq ۲)$

ت)* $n!>n^{۲}+۵n \qquad (n\geq ۵)$

۳- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر nضلعی محدب برابر است با $(۲n-۴)\times ۹۰^\circ$.

۴- با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد n طبیعی ثابت کنید:

الف) عدد $۸^n - ۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۱۰^n(۹n-۱)+۱$ بر ۹ بخش‌پذیر است.