حل مسائل چند مدی با استفاده از الگوریتم جستجوی گرانشی

سجاد یزدانی شهربابکی
دانشجو، دانشگاه شهید باهنر کرمان، بخش مهندسی برق
Sajjad.yazdani@gmail.com

حسین نظام آبادی پور
دانشیار دانشگاه شهید باهنر کرمان، بخش مهندسی برق
Nezam@mail.uk ac.ir

چکیده: یافتن مکان تمام بهینه‌ها (شامل بهینه‌های محلی و فرامحلی) در یک مساله بهینه سازی چند مدی با استفاده از الگوریتم های جستجوی ابتکاری یکی از موضوعات چالش آور در این زمینه است. مشکل اصلی الگوریتم‌های ابتکاری در حل مسائل چند مدی، قدرت همگرایی آنها به یک جواب (عموماً بهینه فرا محلی) است. الگوریتم جستجوی گرانشی از جمله الگوریتمهای ابتکاری است که به علت عمر کوتاهش تا کنون نسخه‌ای از آن برای حل مسائل چند مدی ارائه نشده است. در این مقاله یک نسخه از این الگوریتم برای حل مسائل چند مدی با حفظ ساختارهای اساسی الگوریتم اصلی ارائه شده و با روشهای مطرح در این زمینه مقایسه می‌شود. نتایج آزمایشها روی توابع محک استاندارد توانایی الگوریتم پیشنهادی را تایید می‌کند.

کلمات کلیدی: بهینه یابی چند مدی ، الگوریتم های ابتکاری، الگوریتم جستجوی گرانشی، بهینه های محلی، جایگاه یابی

۱. مقدمه

در دنیای کنونی، بهینه سازی یکی از مسائل مورد توجه محققین و دانشمندان است. در همین راستا در سالهای اخیر استفاده از الگوریتم-های جستجوی ابتکاری برای بهینه سازی توابع رشد چشمگیری داشته است. این الگوریتم ها با الهام از فرایندهای فیزیکی، بیولوژیکی و طبیعت بوجود آمده اند و غالب آنها به صورت جمعی عمل می کنند.
الگوریتم های ابتکاری بر خلاف الگوریتم های کلاسیک بر مبنای تصادف عمل کرده و جستجوی فضا را بصورت موازی انجام می دهند.
از نمونه های این الگوریتم ها، الگوریتم وراثتی (۱۹۷۵)، الگوریتم ایمنی (۱۹۸۶)، الگوریتم فرهنگی (۱۹۹۴)، الگوریتم بهینه سازی جمعیت ذره ها(۱۹۹۵) می باشند. این الگوریتم ها در یافتن جواب بهینه فرامحلی موفق بوده اند. اما در مسائل دنیا واقعی همیشه یافتن یک بهینه فرامحلی مد نظر نیست و اغلب با مسائلی روبرو می شویم که چند مدی هستند. یعنی دارای چندین بهینه فرامحلی بوده یا آنکه علاوه بر یافتن بهینه فرا محلی، یافتن مکان بهینه های محلی نیز مد نظر است. مسئله طراحی راکتور هسته ای [۱،۲] طراحی holographic grating [۳]، مسئله Two_beam grillage [۴] و three-body problem [۵] از نمونه های عملی این مسائل می باشند. چنانچه یک مسئله چند مدی را با الگوریتمی مانند الگوریتم وراثتی ساده حل کنیم عاملها عاقبت به یک جواب بهینه همگرا می شوند. این عمل ناشی از پدیده شناخته شده ی رانش وراثتی است. بنابراین مسائل چند مدی را نمیتوان با استفاده از الگوریتم های ابتکاری متداول حل کرد در این قبیل مسائل باید الگوریتم را به گونه ای طراحی کرد که بتواند با حفظ تنوع جمعیت از گونه سازی و جایگاه حمایت کند.
راشدی و نظام آبادی پور با الهام گرفتن از مفاهیم جرم و نیروی جاذبه و با شبیه سازی قوانین طبیعت الگوریتم جستجوی گرانشی را ارائه کرده اند[۶]. این الگوریتم در یافتن جواب بهینه فرامحلی به خوبی عمل می کند[۶] هدف اصلی این مقاله ارائه نسخه ای از این الگوریتم است که قادر به حل مسائل چند مدی باشد.
ادامه مقاله اینگونه سازماندهی می شود که در بخش دوم کارهای انجام شده در حل مسائل چند مدی مرور می شود. در بخش سوم الگوریتم جستجوی گرانشی در شکل استاندارد آن مرور می شود و سپس در بخش چهارم راه کار مناسب برای حل مسائل چند مدی ارائه می شود. نتایج حاصل از پیاده سازی الگوریتم بر روی توابع آزمون، تحلیل نتایج و مقایسه با سایر الگوریتمها در بخش پنجم بیان می شود و نهایتاً بخش ششم به جمع بندی مقاله می پردازد.

۲. مروری بر کارهای انجام شده

تا کنون روشهای متفاوتی برای حل مسائل چند مدی با الگوریتم های مختلف ارائه شده است. در ادامه به اختصار تعدادی از روشهای ارائه شده در این زمینه معرفی می شود.
روش پیش انتخاب توسط کاویچیو در سال ۱۹۷۰ به عنوان اولین روش برای حل مسائل چند مدی با الگوریتم وراثتی ارائه شده است[۷]. دی جانگ روش پیش انتخاب را در سال ۱۹۷۵ در قالب روش ازدحامی توسعه داد[۸]. تسهیم شایستگی یکی دیگر از روشها ست که توسط هلند معرفی شده و در سال ۱۹۸۷ توسط گلدبرگ و ریچاردسون توسعه یافته است[۹]. برای حل مسائل چند مدی با الگوریتم وراثتی روشهای دیگری نیز ارائه شده است[۳،۴،۱۱،۱۰،۷، ۱۲،۱۳].
با وجود آنکه روشهای متفاوتی برای حل مسائل چند بعدی بر پایه الگوریتم های متفاوت ارائه شده است اما تاکنون برای الگوریتم جستجوی گرانشی راهکاری ارائه نشده است. دراین مقاله هدف اصلی ما حل مسائل چند مدی با الگوریتم جستجوی گرانشی است.

۳. الگوریتم جستجوی گرانشی

در الگوریتم جستجوی گرانشی عامل های جستجو کننده به صورت مجموعه ای از اجسام می باشند. هر جسم دارای چهار مشخصه

است[۶]: الف) موقعیت ب) جرم گرانشی فعال ج) جرم گرانشی غیر فعال د)جرم اینرسی .

یک سیستم شامل N جسم را در نظر بگیرید که موقعیت هر جسم در فضای جستجو مطابق رابطه (۱)، یک بردار n بعدی است. موقعیت بعد d از جسم i با x_i^d نشان داده شده است.

$$X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^d, \ldots, x_i^n\} \quad \text{for} \quad i = 1,2,3,\ldots,N \quad (1)$$

در این الگوریتم زمان بصورت گسسته نمونه برداری شده است و هر تکرار در واقع یک نمونه از زمان می باشد. در هر مرحله نیروی جاذبه جسم j ام روی جسم i ام در هر بعد مطابق با رابطه (۲) محاسبه می شود. در این رابطه Ma_j جرم گرانشی فعال جسم j ام ، Mp_i جرم گرانشی غیر فعال جسم iام می باشد. G (t) ثابت گرانشی در زمان t می باشد. ε یک مقدار ثابت بسیار کوچک است و $R_{i,j}$ مطابق رابطه (۳) فاصله اقلیدسی بین دو جسم می باشد[۶].

$$F_{(i,j)}^d(t) = G(t)\frac{Ma_j(t) \times Mp_i(t)}{R_{(i,j)}(t) + \varepsilon}(x_j^d - x_i^d) \qquad (2)$$

$$R_{(i,j)} = \left\| X_i(t)\ , X_j(t) \right\| \qquad (3)$$

نیروی وارد بر جرم i در بعد d در زمان t مطابق رابطه (۴) برابر با مجموع ضریبهای تصادفی در بازه [1 0] از تمام نیروهایی است که سایر اجسام بر آن وارد می کنند.

$$F_i^d = \sum_{j=1,\, j \neq i}^{N} \text{rand}_j \times F_{(i,j)}^d \qquad (4)$$

در الگوریتم گرانشی شتاب طبق قانون دوم نیوتن برای هر جسم و در هر بعد از رابطه (۵) محاسبه می شود در این رابطه Mi_i جرم اینرسی جسم i است.

$$a_i^d = \frac{F_i^d}{Mi_i} \qquad (5)$$

بعد از محاسبه شتاب سرعت هر جسم مطابق با رابطه (۶) محاسبه می شود. در این رابطه rand_j یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه [1 0] است که خاصیت تصادفی بودن الگوریتم را حمایت می کند. موقعیت جدید جسم i در بعد d مطابق با رابطه (۷) تغییر می کند.

$$v_i^d(t+1) = \text{rand}_i \times v_i^d(t) + a_i^d(t) \qquad (6)$$

$$x_i^d(t+1) = x_i^d(t) + v_i^d(t+1) \qquad (7)$$

جرمهای گرانشی و اینرسی همانند آن چه در طبیعت وجود دارد برابر در نظر گرفته می شوند[۶]. (رابطه (۸)) برای تنظیم اجرام از رابطه (۹) استفاده می شود. مطابق با این رابطه اجسام با شایستگی بیشتر، جرم بیشتری نسبت داده می شود تا سایر اجسام را بیشتر به سمت خود جذب کنند.

$$Ma_i = Mp_i = Mi_i = M_i \qquad (8)$$

$$M_i = \frac{\text{Fitness}_i(t) - \text{Worst}(t)}{\text{Best}(t) - \text{Worst}(t)} \qquad (9)$$

در رابطه (۹) $\text{Fitness}_i(t)$ مقدار برازندگی جسم i ، Best(t) مقدار برازندگی بهترین جسم در سیستم و Worst(t) مقدار برازندگی بدترین جسم در سیستم در تکرار t ام می باشد. در مسائل بیشینه یابی بهترین و بدترین جسم از روابط (۱۰) و (۱۱) بدست می آیند.

$$Best(t) = \max_{i=1,\ldots,N}(Fitness_i(t)) \qquad (10)$$

$$Worst(t) = \min_{i=1,\ldots,N}(Fitness_i(t)) \qquad (11)$$

در ابتدای تشکیل سیستم هر جسم به طور تصادفی در یک نقطه از فضا قرار می گیرد. در هر تکرار موقعیت اجسام ارزیابی می شود وپس از محاسبه جرم، نیروی گرانشی، شتاب و سرعت، اجسام تغییر مکان می دهند. متغییرهای سیستم مانند ثابت گرانشی در هر مرحله بروز رسانی می شوند. راشدی و نظام آبادی پور برای بروزرسانی متغییر ثابت گرانشی رابطه (۱۲) را پیشنهاد داده اند.

$$G(t) = G_0\, e^{-\alpha \frac{t}{T}} \qquad (12)$$

الگوریتم گرانشی در شکل استاندارد آن که مرور شد دارای خاصیت متمرکز شوندگی به یک بهینه می باشد. همگرایی این الگوریتم و نیز توانایی آن در حل مسائل عملی و توابع استاندارد بر مبنای تجربیات گذشته ثابت شده است[۶،۱۵،۱۶،۱۷،۱۹].

۴. الگوریتم پیشنهادی برای حل مسائل چند مدی بر اساس الگوریتم جستجوی گرانشی

برای یافتن نقاط بهینه مختلف باید از همگرایی اجسام حول یک نقطه جلوگیری شود. دلیل همگرایی اجسام در الگوریتم گرانشی پایه حول یک نقطه بهینه این است که همه اجسام به یک دیگر نیروی جاذبه وارد می کنند. نتیجه این نیرو همگرایی اجسام اطراف جسم های دارای جرم فعال بزرگتر می باشد.

در اغلب روشهای چند مدی با استفاده از الگوریتمهای ابتکاری تلاش می‌شود تا با حفظ تنوع جمعیت از همگرایی تمام اعضا به یک جواب جلوگیری شود. همگرایی عاملها به یک جواب مهمترین مشکل اصلی الگوریتم گرانشی پایه در حل مسائل چند مدی است. برای محدود کردن این اثر و نیز تنوع بخشیدن به مجموعه اعضا (پاسخها)، در روش پیشنهادی نحوه اعمال نیرو وسط عاملها کنترل شده و اعمال نیرو توسط یک جسم به سایر اجرام محدود می شود.

در الگوریتم پیشنهادی برای هر جسم یک همسایگی تعریف می شود و هر جسم تنها با اجسام همسایه خود در تعامل می باشد. این امر باعث می شود که جسم بجای جذب شدن به بهینه فرامحلی به سمت بهینه های محلی حرکت کند. در روش پیشنهادی جسم j همسایه جسم i

نامیده می شود اگر و تنها اگر فاصله این دو جسم از فاصله مشخصی کمتر باشد که این مقدار ثابت شعاع همسایگی (σ) نام دارد.

کندی روشهای متفاوتی را برای همسایگی بین عاملها پیشنهاد داده است مانند همسایگی Circles ، Wheels، Stars و Random edge[۲۰]. در هیچ یک از روشهای پیشنهادی کندی همسایگی دو عامل به مکان آنها در فضای جستجو بستگی ندارد. اما در این مقاله همسایگی دو جسم با توجه به مکان اجسام در فضای جستجو تعریف می شود.

قابل ذکر است که در الگوریتم پیشنهادی روابط مانند الگوریتم استاندارد بکار می روند اما نیروی اعمالی بر یک جسم را تنها از سوی همسایه های آن جسم به آن اعمال می شود. به عبارت دیگر محاسبه نیروی اعمالی به اجسام از رابطه (۱۳) محاسبه می شود.

$$F_i^d = \sum_{j \in Neighbor_i} rand_j \times F_{(i,j)}^d \qquad (13)$$

چنانچه یک جسم با هیچ جسم دیگری همسایه نباشد (نزدیکترین جسم به آن فاصله ای بیش از شعاع همسایگی دارد) نیروی گرانشی آن برابر با صفر می باشد که این امر باعث می شود آن جسم حرکت نکند و جستجویی را انجام ندهد، میدانیم که این امر مطلوب نیست. چنانچه یک جسم دارای همسایه نباشد به آن یک نیروی تصادفی اعمال می شود تا از این امر ناخواسته جلوگیری شود.

همانند الگوریتم گرانشی استاندارد این نیرو به اجسام شتاب می دهد. در الگوریتم گرانشی شتاب مطابق با قانون دوم نیوتن برای هر جسم و در هر بعد از رابطه (۵) محاسبه می شود در این رابطه M_{ii} جرم اینرسی جسم i است.

بعد از محاسبه شتاب سرعت هر جسم مطابق با رابطه (۶) محاسبه می شود. در این رابطه $rand_j$ یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه [0 1] است که خاصیت تصادفی بودن الگوریتم را حمایت می کند.

موقعیت جدید جسم i در بعد d مطابق با رابطه (۷) تغییر می کند.

مکان های جدید باید در فضای مساله باشند و چنانچه مکان جدید در فضای جستجو نباشد با یک مقدار تصادفی جایگزین می شود. همانند الگوریتم پایه در ابتدای تشکیل سیستم هر جسم به طور تصادفی در یک نقطه از فضا قرار می گیرد. شرط توقف میتواند پس از گذشت مدت زمان مشخصی تعیین شود. جواب های نهایی، موقعیت اجسامی است که در همسایگی خود بهترین باشند.

۵. آزمایشها، نتایج و مقایسه با سایر روشها

در این قسمت نتایج حاصل از پیاده سازی الگوریتم پیشنهادی برای حل تعدادی از مسائل چند مدی که در آنها هدف یافتن همه بهینه های محلی است ارائه می شود. این توابع توسط گلدبرگ و ریچاردسون معرفی شده اند و توسط مهفود جهت آزمودن الگوریتم های جایگاه یابی ژنتیک [۲۱]، همچنین توسط بیزلی جهت آزمودن الگوریتم جایگاه یابی ترتیبی[۱۱] و توسط برایت و انگلبرچ جهت آزمودن الگوریتم جایگاه یابی مبتنی بر جمعیت ذرات استفاده شده اند[۲۲]. این توابع توسط روابط (۱۴) الی (۱۷) تعریف می شوند. این توابع در یک بعد تعریف شده و در بازه [0 1] دارای پنج نقطه بهینه می باشند.

$$F_1(x) = \sin^6(5\pi x) \qquad (14)$$

$$F_2(x) = e^{2\log(2)\times\left(\frac{x-0.1}{0.8}\right)^2} \sin^6(5\pi x) \qquad (15)$$

$$F_3(x) = \sin^6(5\pi(x^{\frac{3}{4}} - 0.05)) \qquad (16)$$

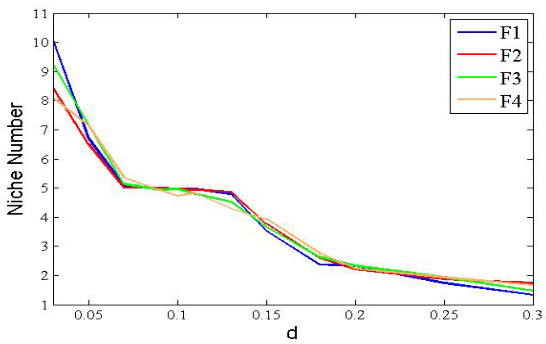
$$F_4(x) = e^{2\log(2)\times\left(\frac{x-0.08}{0.854}\right)^2} \sin^6(5\pi(x^{\frac{3}{4}} - 0.05)) \qquad (17)$$

برای حل این توابع، تعداد اجسام ۵۰ و تعداد تکرار ها ۱۰۰ در نظر گرفته شده است . پارامتر σ در یافتن تعداد نقاط بهینه اثر بسزایی دارد. برای این توابع مقدار σ برابر با ۰,۱ در نظر گرفته شده است.

درصد موفقیت برای حل مسائل چند مدی به صورت نسبت تعداد بهینه های یافته شده توسط الگوریتم به کل بهینه های موجود در فضای مسئله در همه تکرارها تعریف می شود. جدول (۱) درصد موفقیت در یافتن نقاط بهینه طی ۳۰ بار اجرای مستقل الگوریتم را با تعدادی از الگوریتم های دیگر مقایسه می کند. در این جدول به الگوریتم پیشنهادی با نام NGSA اشاره شده است. نتایج جدول ۱ بیانگر آن است که کارایی الگوریتم پیشنهادی به الگوریتم های ارائه شده در این زمینه بسیار نزدیک و در بعضی موارد حتی بالاتر است.

جدول(۱) در صد موفقیت الگوریتم پیشنهادی

تابع	NGSA	GC PSO [۲۲]	Seq.Niche [۱۱]	Fitness Sharing	Deterministic crowding [۲۲]
F1	100	100	99	82.7	100
F2	98.7	93	90	68	93
F3	99.3	100	100	80	90
F4	98.7	93	99	66.7	90



شکل(۲) میانگین تعداد نقاط بهینه یافته شده به ازای مقادیر مختلف σ

شکل (۲) تعداد نقاط بهینه کاندید در انتهای اجرای الگوریتم به ازای مقادیر مختلف σ را نشان می دهند. این شکل وابستگی الگوریتم به

متغیر σ را نشان می دهد. و با توجه به این شکل متغیر σ باید در یک بازه مناسب (که تقریباً بین ۰/۰۷ و ۰/۱۳ است) مقدار دهی شود تا الگوریتم در یافتن جوابهای بهینه موفق باشد.

نتایج حاصل از اجرای الگوریتم بیانگر کارایی مناسب الگوریتم پیشنهادی می باشد. نکته قابل توجه در این الگوریتم اینست که الگوریتم پیشنهادی نسبت به الگوریتم گرانشی استاندارد از نظر مقدار محاسبات تغییر چندانی ندارد و حتی کمتر از محاسبات الگوریتم استاندارد می باشد، در حالی که در سایر الگوریتم های مشابه اغلب مقدار محاسبات افزایش میابد.

۶. جمع بندی

در مسائل دنیا واقعی همیشه یافتن یک بهینه فرامحلی مد نظر نیست و گاهاً با مسائلی روبرو می شویم که چند مدی هستند. یعنی دارای چندین بهینه فرامحلی بوده یا آنکه علاوه بر یافتن بهینه فرا محلی، یافتن مکان بهینه های محلی نیز مد نظر است. الگوریتم های ابتکاری اگر چه به عنوان ابزاری کارآمد در بهینه سازی توابع و مسائل دنیای واقعی شهرت یافته اند، اما به دلیل همگراییشان به یک جواب، در شکل متداول قادر به حل مسائل چند مدی نیستند. سابقه تحقیقات در این زمینه به سالهای ۱۹۷۰ میلادی برمی‌گردد. در این مقاله برای نخستتین بار روشی بر مبنای الگوریتم جستجوی گرانشی برای حل مسائل چند مدی ارائه شد که در آن مفاهیم اساسی الگوریتم پایه حفظ گردید. برای ارزیابی توانایی این روش، نتایج بهینه سازی چند تابع محک استاندارد توسط الگوریتم پیشنهادی ارائه و با روشهای مطرح در این زمینه مقایسه گردید. نتایج آزمایشها کارایی روش پیشنهادی را تایید می کند.

منابع

[1.] Wagner F. Sacco, Marcelo D. Machado. **“The fuzzy clearing approach for a niching genetic algorithm applied to a nuclear reactor core design optimization problem”**. Annals of Nuclear Energy ,31 , pp 55-69 ,2004.

[2.] Cla´udio M.N.A. Pereira, Wagner F. Sacco. **“A parallel genetic algorithm with niching technique applied to a nuclear reactor core design optimization problem”**, Progress in Nuclear Energy, 50, pp 740-746 ,2008.

[3.] L. Qing, Wu Gang , Y. Zaiyue , W. Qiuping. **“Crowding clustering genetic algorithm for multimodal function optimization”**. , Applied Soft Computing, 8, pp. 88-95 , 2008.

[4.] Chyi-Yeu Lin, Wen-Hong Wu.**"Niche identification techniques in multimodal genetic search with sharing scheme”** Advances in Engineering Software, 33, pp. 779-791 , 2002.

[5.] Pini Gurfil, N. Jeremy Kasdin. **“Niching genetic algorithms-based characterization of geocentric orbits in the 3D elliptic restricted three-body problem”**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191, pp. 5683-5706 , 2002

[6.] E. Rashedi, H. Nezamabadi-pour, S. Saryazdi. **“GSA: A Gravitational Search Algorithm”**. Information Sciences, 2009.

[7.] Goldberg, D. E., **"Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning"**, Addison-Wesley, Reading MA, 1989.

[8.] De Jong, K. A., **"An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems"**, Doctoral Dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, MI, 1975

[9.] Goldberg, D. E., and Richardson, J., **"Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization"**, In J. J. Grefenstette (Ed.), Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 41-49, 1987

[10.] A. El Imrani, A. Bouroumi, H. Zine El Abidine, M. Limouri, A. Essaıd. **“A fuzzy clustering-based niching approach to multimodal function optimization”**. Cognitive Systems Research, 1, pp 119-133, 2000.

[11.] Beasley, David, Bull, David R. and Martin, Ralph R.” **A Sequential Niche Technique for Multimodal Function Optimization”**. 93001, s.l. : Technical Report, 1993.

[12.] Pradeep Kumar Gudla, Ranjan Ganguli. ” **An automated hybrid genetic-conjugate gradient algorithm for multimodal optimization problems”**. Applied Mathematics and Computation, 167, pp 1457-1474, 2005

[13.] P. Siarry, A. Petrowski, M. Bessaou. **“A multipopulation genetic algorithm aimed at multimodal optimization”** . Advances in Engineering Software, 33, pp. 207-213, 2002

[14.] Liu, Xiyu, Liu, Hong and Duan, Huichuan. **“Particle swarm optimization based on dynamic niche technology with applications to conceptual design”**. Advances in Engineering Software, 38, pp 668-676 , 2007

[۱۵.]راشدی،ع . نظام آبادی پور، ح. سریزدی، س. ، **"الگوریتم جستجوی گرانشی باینری"** اولین کنگره مشترک سیستم های فازی و هوشمند، مشهد ، ایران، ۱۳۸۷.

[۱۶.]راشدی،ع . نظام آبادی پور، ح. توحیدی ، ح. ، **" انتخاب ویژگی با استفاده از الگوریتم جستجوی گرانشی"**، سومین کنفرانس بین المللی فناوری اطلاعات و دانش، دانشگاه فردوسی ، مشهد ، ایران، ۱۳۸۶.

[۱۷.]راشدی،ع . نظام آبادی پور، ح. سریزدی، س. ، **" طراحی فیلترهای IIR به وسیله الگوریتم جستجوی گرانشی "** شانزدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۷.

[۱۸.]راشدی،ع . نظام آبادی پور، ح. ، **" الگوریتم جستجوی گرانشی "** پانزدهمین کنفرانس مهندسی برق ایران ،مجموعه مقالات کامپیوتر، ص ۱۳۹-۱۴۴، ۱۳۸۶.

[۱۹.]راشدی،ع . ، **" الگوریتم جستجوی گرانشی "** پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید باهنر کرمان،بخش مهندسی برق، ۱۳۸۶.

[20.] James Kennedy. **“Small Worlds and Mega-Minds: Effects of Neighborhood Topology on Particle Swarm Performance”**. IEEE, 0-7803-5536-9/99 , pp 1931-1938, 1999.

[21.] Mahfoud, Samir W. **“Niching methods for genetic algorithms”**. 1995.

[22.] R. Brits, A.P. Engelbrecht , F. van den Bergh. **“Locating multiple optima using particle swarm optimization.”** Applied Mathematics and Computation, 189, pp 1859-1883 , 2007