۱

بنیاد هندسهٔ اقلیدسی

«این کتاب نزدیک به بیست و دو قرن مشوق وراهنمای اندیشهٔعلمیی بودکه با پیشرفت آدمی از وضعی بدتربه حالتی بهتر یکی است».

کلیفرد[۱]

۱. مدخل

هندسه که شاخه‌ای است از ریاضیات که درآن از خاصیتهای شکلهای فضایی بحث می‌شود دارای سرچشمه‌ای کهن است. بیشتر گسترش آن نتیجهٔ تلاشهایی است که طی قرنها بعمل آمده است تا آیینی منطقی تدوین شود و دانسته‌های هندسی را که از راه مشاهده واندازه‌گیری بدست آمده‌اند به یکدیگر پیوند دهد. در زمان اقلیدس (در حدود ۶۰۰ پیش از هجرت) علم هندسه به مرحله‌ای نیك پیشرفته رسیده بود. اقلیدس از روی مطالبی که گردآوری شده بودندکتاب اصول خود را تدوین کردکه شایان توجه‌ترین کتابی درسی است که نوشته شده است، و باوجود نقصهایی که دارد، نزدیك به دو هزار سال سرمشقی بود برای کتابهای علمی.

اقلیدس و پیشینیان او به چیزی پی‌بردندکه هر فلسفه‌خوانی می‌داند، وآن این که همه چیز را نمی‌توان اثبات‌کرد. در ساختن هر نهاد منطقی یك یا چندگزاره را باید مفروض دانست وحکمهای دیگر را با استنتاج منطقی از آنها نتیجه‌گرفت. هر تلاشی که

---

۱. Clifford

برای اثبات همهٔ گزاره‌ها بشود بی‌تردید به دور باطل خواهد انجامید. در هندسه این گزاره‌های مفروض به‌صورت اصلهای موضوعی بیان می‌شوند که از تجربه و شهود نتیجه گرفته شده‌اند. در نهایت اینها احکامی بودند که از راه مشاهده راست، یا تقریباً راست، به‌نظر رسیده بودند. انتظارمی‌توان داشت که هندسه‌ای که با دقت برچنین پی‌هایی‌استوار شود دانسته‌هایی را که نتیجهٔ مشاهده‌اند، شاید خیلی خوب، اما نه خیلی دقیق، با هم مرتبط سازد. براستی باید آشکار شود که تغییری در اصل موضوعی که در هندسه‌ای کمابیش مورد تردید باشد به هندسهٔ دیگری رهنمون خواهد شد که، هرچند با هندسهٔ قبلی تفاوتی اساسی دارد، باز هم آن دانسته‌ها را کاملاً به هم ربط می‌دهد.

نیت ما آن است که در آنچه خواهدآمد هندسه را علمی مجرد و اصلهای موضوع را فقط مانند فرضهایی در نظر آوریم. اما جنبه‌های عملی را نباید از نظر دور داشت. نقشی که این جنبه‌ها در تکامل هندسهٔ مجرد داشته‌اند حقیر نیست و چه بسا که بر مفهومهای نتایجی که می‌گیریم پرتو افکنند و ما را به درك مهم بودن یانبودن این‌نتایج یاری دهند.

در چند قسمت آینده باختصار در مبانی هندسهٔ اقلیدسی تفرس خواهیم کرد. در این پژوهشها دو هدف می‌توان داشت که یکی شناساندن هندسه‌های نااقلیدسی است و دیگری فراهم آوردن زمینه‌ای برای خوب پی‌بردن به ماهیت و اهمیت آنها.

۲. تعریفها

شکلهای هندسی از عنصرهای مختلف مانند نقطه وخط و سطح مستوی (صفحه) و خطوط و سطوح منحنی ساخته شده‌اند. برخی از این عنصرها، ونیز رابطه‌های آنها با یکدیگر، را تعریف نشده باید گذاشت، زیرا که کوشش بی‌فایده است همهٔ عنصرها را تعریف‌کردن وهمهٔ گزاره‌ها را ثابت نمودن. عنصرها ورابطه‌های دیگر بنابر آن عنصرها و حکمهای بنیادی تعریف خواهند شد. اقلیدس[۱] درگذاشتن بنیاد هندسهٔ خود بیست‌وسه تعریف[۲] کرد. تعدادی از این تعریفها را می‌توان درکمال خوبی حذف‌کرد. مثلاً نقطه‌را چنین تعریف کرد: چیزی‌که هیچ جزء ندارد؛ بنابر نظر او خط درازایی است بی‌پهنا، وصفحه سطحی است که به نحوی هموار قرار دارد وخطهای مستقیم در آن واقعند. چنین تعریفهایی

۱. در این‌کتاب همه حکمهای اصلی مربوط به کتاب اقلیدس و آنچه از اقلیدس گرفته شده است براساس نسخه‌ای است که به‌کوشش هیث (T. L. Heath) با عنوان *The Thirteen Books of Euclid's Elements* به طبع رسیده است، چاپ دوم (کیمبریج، ۱۹۲۶). این کار با اجازهٔ شرکت انتشارات مك میلن صورت پذیرفته است.

۲. برای این تعریفها رجوع شود به ذیل کتاب حاضر.

ازدیدگاه منطق بیفایده‌اند. واقعیت این است که اقلیدس هم از آنها بهره‌ای نمی‌گیرد. در هندسه‌های نوین نقطه و خط وصفحه به‌طورمستقیم‌تعریف نمی‌شوند؛ بلکه وصف‌آنها مقید بودن‌به‌صدق کردن است دربعضی‌روابط تعریف‌شده یاتعریف نشده وبرخی‌اصلهای موضوع. یکی از بهترین دستگاههایی که ساخته شده‌اند تا اساس منطقی هندسهٔ اقلیدسی قرارگیرند دستگاه هیلبرت[1] است. وی کار را با در نظرگرفتن سه‌رده از چیزها آغاز می‌کند: نقطه وخط وصفحه. می‌گوید: «ما نقطه وخط وصفحه را چنان می‌انگاریم که برخی رابطه‌های متقابل داشته باشند که آنها را با واژه‌هایی ازقبیل: قرارداراند، بین، موازی، همنهشت[2]، پیوسته، و از این قبیل بیان می‌کنیم. بیان کامل و دقیق این رابطه‌ها به‌صورت نتیجهٔ اصلهای موضوع هندسی درخواهد آمد.»

بیشتر تعریفهای اقلیدس به اندازهٔ کافی قانع‌کننده‌اند. دقتی خاص باید به تعریف بیست و سوم، که در آنچه خواهد آمد از اهمیتی خاص برخوردار است، مبذول داشت؛ و آن تعریف خطهای موازی است ــ بهترین تعریفی کـه از دیدگاهی مقدماتی تاکنون شده است:

خطهای راست موازی خطهای راستی هستند که در یك صفحه قرار دارند و هر قدر آنها را امتداد دهیم در هیچ یك از دو طرف به یکدیگر نرسند.

مغایر با این تعریف‌که مبتنی است برمفهوم به هم نرسیدن دو خط موازی جلب توجه خواننده به دو مفهوم دیگر، که هم از زمانهای قدیم رواج بسیار داشته‌اند[3] مهم انگاشته مـی‌شود. این دو مفهوم عبارتند از این کـه دو خط موازی دو خط راستند کـه دارای یك امتدادند، یا دو خط کـه همه‌جا به یك فاصله‌اند. هیچ یك از این دو رضایتبخش نیست.

نظریهٔ امتداد به دوری بـاطل منتهی می‌شود. هرگاه مفهوم امتداد تعریف نشده باقی بماند آزمونی نمی‌توان داشت که برحسب آن تعیین شود کـه دو خط متوازیند یا نه. ازسوی دیگر هرکوششی برای تعریف امتداد باید منوط شود به داشتن معرفتی دربارهٔ رفتار خطهای متوازی و خاصیتهای آنها.

---

۱. *Grundlagen der Geometrie*، چاپ هفتم (لایپزیك و برلین، ۱۹۳۰)، یـا ترجمهٔ مجازبه انگلیسی به‌توسط E. J. Townsend زیر عنوان *The Foundations of Geometry*، چـاپ یکم (شیکاگو، ۱۹۰۲): همهٔ مراجعه‌ها به‌اثر اولی است مگر این‌کـه تصریح شده باشد. برای این دستگاه ← اصلهای موضوع، قسمت ۹.

۲. همنهشت Congruent به معنی مساوی در شکلها بکار می‌رود. آقای شفیعیها به جای آن اصطلاح «هوند» را بکار برده است.

۳. هیث، همان اثر، جلد یکم، ص ۱۹۵ و بعد.

نظریهٔ همفاصلگی هم نارضایتبخش است، زیراکه درهندسهٔ خاص مورد بحث مبتنی است براین که مکان هندسی نقاط همفاصله از یك خط راست خطی است راست. اما این را باید ثابت کرد، یا دست‌کم مدلل ساخت، که با فرضهای دیگرسازگاراست. هرچندعجیب نماید، بزودی به هندسه‌هایی برخواهیم خورد که در آنها این مطلب درست نیست.

نکتهٔ آخر این که تکیه براین موضوع جایز است که بنابر اقلیدس دو خط واقع در یك صفحه یا به یکدیگر می‌رسند یا متوازیند. هیچ رابطهٔ دیگری امکانپذیر نیست.

۳. مفهومهای متعارف

ده فرض اقلیدس به دو مجموعه تقسیم می‌شوند: پنج فرض بـا عنوان مفهومهای متعارف و بقیه به‌عنوان اصلهای موضوع رده بندی شده‌اند. تفاوت‌بین این‌دو کاملاً روشن نیست. از این فراترنخواهیم رفت‌که بگوییم بنظر می‌آیدکه مفهومهای متعارف فرضهایی انگاشته شده بودند که برای همهٔ علوم و همهٔ مردم باهوش پذیرفتنی هستند در حالی که اصلهای موضوع فرضهایی هستند مختص علم هندسه. پنج مفهوم متعارف چنین‌اند:

۱. چیزهای برابر با یك چیز با یکدیگر برابرند.

۲. هرگاه برابرها را با برابرها جمع کنیم مجموعها برابرند.

۳. هرگاه برابرها را از برابرها بکاهیم مانده‌ها برابرند.

۴. چیزهایی که بر یکدیگر انطباق‌پذیر باشند با یکدیگر برابرند.

۵. کل بزرگتر است از هر جزء آن.

در این فرضها به‌حکمهایی برمی‌خوریم‌که زمانی بـه «بدیهیات» توصیف می‌شدند. از آنچه هم‌اکنون گفتیم باید آشکار شودکه فرضهای هندسی هرگز چنین سرشتی ندارند. راست آن‌که هیچ‌گاه حکمی یافته نشده است‌که بدیهی باشد.

۴. اصلهای موضوع

اقلیدس پنج حکم زیرین را اصل موضوع قرار داده است:

۱. کشیدن خطی راست از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر.

۲. امتداد دادن هر خط راست متناهی به خطی راست (نامتناهی).

۳. رسم دایره‌ای به هر مرکز و با هر فاصله.

۴. این که همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابرند.

۵. این که اگرخطی که بر دو خط راست فرو می‌افتد با آنها دو زاویه بسازد چنان که مجموعشان از دو قائمه کمتر باشد وقتی که آن دوخط به‌طور نامتناهی امتداد داده شوند در طرفی که زاویه‌های کوچکتر ازدو زاویهٔ قائمه قرار دارند به‌یکدیگر می‌رسند.

هر چند اقلیدس تصریح نکرده است آشکارا چنین می‌نماید که اصل موضوع اول متضمن این مفهوم است که خطی که دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند منحصر به‌یکی است، و در نتیجه دو خط نمی‌توانند فضایی را در میان گیرند. مثلاً اقلیدس این نکته را به نحوی مقدر در اثبات حکم ۴ کتاب یکم[1] فرض‌کرده است. و نیز از اصل موضوع دوم چنین استنباط می‌شود که خط راست متناهی را می‌توان از هر طرف فقط به یك نحو امتداد داد بطوری که دو خط راست متمایز نمی‌توانند یك پاره خط مشترك داشته باشند. ضرورت صریح این الزام بار اول در اثبات حکم ۱ کتاب یازدهم ظاهر می‌شود اما بررسیِ نقدآمیز مسلم می‌سازد که هم از آغاز کتاب یکم مورد نیازاست. در مورد اصل موضوع سوم فقط خاطر نشان می‌سازیم که واژهٔ فاصله به‌جای شعاع بکار رفته است و ایجاب می‌کند که هر نقطهٔ محیط به‌آن فاصله ازمرکز باشد. اصل‌موضوع چهارم، انگاره‌ای یا واحد زاویه‌ای بدست می‌دهد که زاویه‌های دیگر را برحسب آن می‌توان اندازه گرفت. این واحد بی‌درنگ در اصل موضوع پنجم بکار گرفته می‌شود.

اصل موضوع پنجم[2] در آنچه خواهد آمد نقشی اساسی دارد. در حقیقت نقطهٔ آغاز بررسی هندسهٔ نااقلیدسی است. نمی‌توان تأثیری را که این اصل و تناقضاتی که آن را در میان گرفته‌اند بر هندسه، و بر ریاضیات به‌طور کلی، و بر منطق داشته‌اند دست‌کم گرفت. آن را به «شاید مشهورترین تك اظهار در تاریخ علم» توصیف کرده‌اند[3]. بنابر اهمیتی که دارد بزودی به‌آن باز خواهیم گشت و بتفصیل به‌آن خواهیم پرداخت.

۵. فرضهای مقدری که اقلیدس بکار برده است. بر هم قرار گرفتن (انطباق).

دراین قسمت وقسمتهای بعدی این فصل توجه خواننده را به‌فرضهای دیگری که اقلیدس کرده است معطوف می‌سازیم. شاید جز فرض مربوط به برهم قرارگرفتن، آنهای دیگر ناخودآگاه فرض شده باشند؛ به هر تقدیر این فرضها درزمرهٔ مفهومهای متعارف و اصلهای موضوع نیامده‌اند. در نظر هندسه‌دانان حذف آنها یکی از بزرگترین عیبهای هندسهٔ اقلیدسی شمرده می‌شود.

عمده این است که اقلیدس‌همین استدلال را که درجدیدترین کتابهای درسی‌مقدماتی دیده می‌شود برای اثبات حکم ۴ کتاب یکم بکار برده است. جای شکی نیست که در

---

۱. حکمهای کتاب یکم را، بی‌اثبات، در ذیل خواهید دید.

۲. گاهی به این اصل موضوع با عنوان یازدهمین یا دوازدهمین اشاره می‌شود.

۳. کایزر، فلسفهٔ ریاضی Keyser, *Mathematical Philosophy* (نیویورك، ۱۹۱۱).

اثبات همنهشتی دو مثلث که دو ضلع و زاویهٔ بینشان مساوی است اقلیدس عملاً چنان انگاشته است که در فرض یکی از مثلثها را جابجا کرده است تا بر دیگری منطبق شود. اما در اثبات خواص شکلها در فضا برتوسل به این مفهوم که تغییر مکان شکل در آن شکل تغییری نمی‌دهد[1] جای ایراد است. چنان می‌نماید که اقلیدس خودش دلبستگی زیاد به این روش نداشته و آن را با اکراه بکاربرده است.

مثلاً یك ایراد از اینجا برمی‌خیزد که نقطه‌ها جز موضعها نیستند، پس نمی‌توانند تغییر مکان یابند. از سوی دیگر اگر از دیدگاه کاربردهای هندسه در فضای مادی درآن بنگریم وچنین بپذیریم که شکلها می‌توانند جای خود را تغییر دهند. اقلیدس بایددریافته باشدکه جسمهای مادی که با آنها برخورد می‌شود کمابیش دستخوش ناپدیدشدن و تغییر-شکل دادن هستند. در ارتباط با این موضوع این مفهوم فیزیك نوین را هم نمی‌توان نادیده انگاشت که ابعاد اجسام درحرکت همان نیستند که درزمان‌سکون بودند. با این همه در عمل ممکن است با روشهایی که شبیه به برهم قراردادن است برخی اجسام‌مادی را با تقریب با هم سنجید. با بررسی این وضع ممکن است تصور کرد که در هندسه اصلی وجود داردکه برهم قرارگرفتن را جایز می‌سازد. اما اقلیدس چنین نکرد، هرچند قرینه‌ای برای این احتمال وجود دارد که اقلیدس مفهوم متعارف چهارم را به‌این نیت بیان کرده باشدکه این روش را مجاز سازد. در جواب این ایرادها می‌توان چنین نیز فرض‌کرد که در مورد انطباق آنچه حرکت فرض شده است فقط انتقال دقت از یك شکل به شکل دیگر باشد.

ازکاربرد انطباق می‌توان خودداری کرد. برخی ازهندسه‌دانان جدید چنین‌می‌کنند، مثلاً بدین ترتیب که فرض می‌کنند که اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بینشان از مثلثی دیگر برابر باشند بقیهٔ جفتهای زاویه‌های متناظر نیز برابرند[2].

۶. نامتناهی بودن خط

اصل موضوع دوم که تصدیق می‌کند که خط راست را پیوسته می‌توان ادامه داد الزاماً مبین آن نیست که خط نامتناهی است. اما، چنان که مستقیماً کشف خواهیم‌کرد، اقلیدس ناهشیارانه خط را نامتناهی فرض‌کرده بود.

ریمان بود که برای اولین‌بار این اندیشه را القا کرد که اصل موضوع کلی‌تر «خط

---

۱. هیث، همان اثر، جلد یکم، ص، ۲۲۴-۲۲۸.

۱. ← مثلاً، هیلبرت، همان اثر، و نیز قسمت ۹.

راست بی‌مرز است» به جای اصل قدیمی قرار داده شود. در مقالهٔ تحقیقی قابل توجهی زیر عنوان دربارهٔ این فرض که هندسه بر استدلال مبتنی است[1] که در ۱۸۵۴/۱۲۳۳ در دانشکدهٔ فلسفه در گوتینگن ایرادکرد، مبنی براین که هرقدر هم که از بی‌مرز بودن فضا اطمینان حاصل شود نامتناهی بودن‌آن را نمی‌توان نتیجه گرفت، چنین گفت[2]: «درگسترش ساختمان فضا به بی‌نهایت بزرگ، باید بین بیمرزی و گسترش‌نامتناهی تمیزداد؛ زیرا که بیمرزی متعلق است به رابطه‌های بسط و نامتناهی بودن، جزء رابطه‌های اندازه‌گیری است. این‌که فضا یك چندگونـای سه‌بعدی بیمرز است فرضی است که با هر مفهومی از جهان خارج توسعه پیدا می‌کند. با این فرض درهر لحظه ناحیهٔ درك حقیقی کامل‌می‌شود وموضعهایی که برای شیء مطلوبی امکانپذیر باشند ساخته می‌شوند و بنابر، این کاربردها این‌فرض برای همیشه مؤید خود می‌باشد. بدین ترتیب بیمرزی فضا دارای یقینی‌تجربی است بزرگتر از هر تجربهٔ خارجی دیگر. اما گسترش نامتناهی آن به هیچ روی از آنچه گفته شد نتیجه نمی‌شود؛ از سوی دیگر اگر بـه بستگی نداشتن اجسام بـه موضع آنها قایل شویم و در نتیجه به‌فضا انحنایـی ثابت نسبت دهیم فضا بـاید لزوماً متناهی باشد مشروط به آن‌که این انحنا مقداری، هرقدر هم کوچك فرض‌شود، مثبت باشد».

بعد خواهیم آموخت‌که هندسه‌هایی‌که از جنبهٔ منطقی به استواری هندسهٔ اقلیدسی باشند ممکن‌است برروی این فرض ساخته شوندکه خطهای راست چون بسته‌اند بیمرزند، اما نامتناهی نیستند. خواننده می‌تواند در تلاش برای تصور خطهای راستی با این‌منش دایره‌های بزرگ یك‌کره را در نظر بگیرد، مشروط به آن‌که تشبیه را بیشتر از حد ادامه ندهد. خوب می‌دانیم کـه در هندسهٔ کـروی دایره‌های بزرگ ژئودزیك‌ها هستند، یعنی «خطهای» کوتاهترین فـاصلهٔ بین دو نقطه. کشف این نکته دشوار نیست‌که این دایره‌ها خاصیتهای متعدد دیگری شبیه به‌خاصیتهای خط راست در هندسهٔ مسطح اقلیدسی دارند. از سوی دیگر بسیار تفاوتهای چشمگیر نیز دارا هستند. مثلاً خاطرنشان می‌سازیم که‌این «خطها» با این‌که بی‌انتها هستند بی‌نهایت نیستند؟ و با این که معمولاً دو نقطه فقط یك «خط» را مشخص می‌کنند دو نقطه ممکن است چنان قرارگرفته باشندکه تعدادی بیشمار «خط» برآنها بگذرند؛ و این‌که دو «خط» همواره در دو نقطه تلاقی می‌کنند و فضایی را درمیان می‌گیرند.

---

۱. Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunds liegen، ازکتاب *Gesammelte Mathematische Werke* ریمان (لایپزیك ۱۸۹۲).

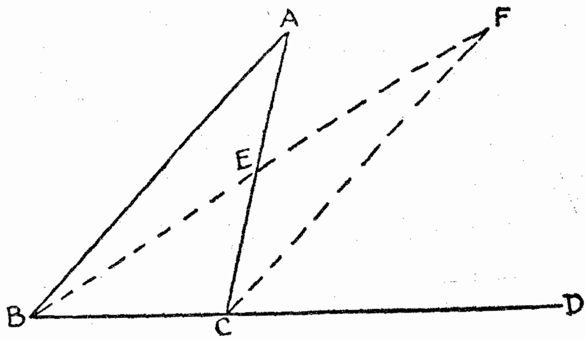
۲. این اقتباس از ترجمه‌ای شده است که W. K. Clifford در *Nature* جلد هشتم، ۱۸۷۳، منتشر کـرده بـود. تـرجمهٔ دیگری بـوسیلهٔ H. S. White در کتاب *A Source Book on Mathematics* (نیویورك، ۱۹۲۹) نوشتهٔ David Eugene Smith می‌توان یافت.

حتی نظری سطحی به نتایج مترتب بر اسناد سرشت بیمرز بودن اما نامتناهی‌نبودن به خطهای راست ما را متقاعد می‌سازد که اقلیدس به نحوی مقدر خط را نامتناهی فرض می‌کرده است. جای مهمی‌که درآن از این فرض استفاده شده بود اثبات حکم ۱۶ کتاب یکم است. این حکم آنقدر در آنچه از این پس خواهد آمد مهم است و نتایج آن چنان گسترده‌اندکه ما در اینجا به اثبات آن می‌پردازیم.

حکم ۱۶ کتاب یکم: هرگاه ضلعی از مثلثی امتداد داده شود زاویهٔ خارجی بزرگتر است از هر یك از زاویه‌های داخلی غیر مجاور آن.

فرض می‌کنیم ABC (شکل ۱) مثلث مفروض باشد و ضلع BC را تا D امتداد داده باشیم. باید ثابت کنیم که:

$$\angle ACD > \angle BAC$$



شکل ۱

هرگاه E نقطهٔ وسط AC باشد BE را رسم کرده تا F امتداد می‌دهیم بطوری که $EF = BE$. از C به F وصل مـی‌کنیم. آنگاه مثلثهای BEA و CEF همنهشتند (ض‌زض) و در نتیجه زاویهٔ FCE و زاویهٔ BAC برابرند.

امـا $\angle ACD > \angle FCE$

و در نتیجه $\angle ACD > \angle BAC$

حالا باید آشکار ساخت که اگر خط راست نـامتناهی نباشد برهان درست نخواهد بود. در حقیقت همین استدلال را می‌توان در مثلث‌کروی‌کرد اما فقط تا وقتی صادق‌است که BF کوچکتر از نیمدایره باشد. هرگاه F بر CD واقع باشد زاویهٔ ACD برابر است با زاویهٔ ECF و در نتیجه بـا زاویهٔ BAC. هرگاه BF بزرگتر بـاشد از یك نیمدایره، زاویهٔ ACD کوچکتر خواهد بود از زاویهٔ BAC. حتی اگر هندسه‌ای تصور شود که در آن هرکدام از دو خط بسته فقط در یك نقطه تقاطع کنند، BF ممکن است

آن‌قدر دراز باشد کـه F بر B منطبق شود یا برپـارهٔ BE قرار گیرد. در هر دو حالت استدلال درست نیست.

برهانهای تعدادی از احکام مهم هندسهٔ اقلیدسی بستگی به حکم ۱۶ کتاب یکم دارند. احکامی مـانند ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ در صورت معتبر نبودن حکم ۱۶ کتاب یکم بدون قیدهایی معتبر نخواهند بود.

تمرین

حکمهای ۱۷ تا ۲۱ کتاب یکم را ثابت کنید.

۷. اصل موضوع پاش

فرض مهم دیگری که اقلیدس کرده بود بی‌آن که آن را بصراحت بیان کند به‌وسیلهٔ پاش[1] بدین صورت بیان شد:

هرگاه A و B و C، سه نقطهٔ ناواقع بر خطی راست باشند و هرگاه α خط راستی واقع در صفحهٔ ABC باشد که بر هیچ یك از سه نقطهٔ A و B و C نگذرد، آنگاه اگر خط α بر نقطه‌ای از پاره خط AB مرور کند بر نقطه‌ای از پاره خط BC یا بر نقطه‌ای از پاره خط AC نیز خواهد گذشت.

از این حکم در دم این نتیجه گرفته می‌شود که اگر خطی در یکی از رأسهای مثلثی وارد مثلث شد باید ضلع مقابل را قطع کند. اقلیدس این حکم را به نحوی مقدر مکرر فرض کرده است، از جمله مثلاً در اثبات حکم ۲۱ کتاب یکم.

ما از این پس اصل موضوع پاش را بارها در مواردی بکار خواهیم بردکه برای راهنمایی شدن نتوانیم برشهود تکیه کنیم، چنان که اقلیدس کرده بود. برای تأکید براهمیت بیان صریح این اصل بـه عنوان سرشتی از هندسهٔ اقلیدسی، خاطرنشان می‌سازیم کـه هندسه‌هایی هست که در آنها این حکم به‌طور محدود جاری است. می‌پذیریم که جاری بودن این حکم بر مثلثهای کـروی، منوط است بـه این که این مثلثها از حیث اندازه محدود باشند.

اصل موضوع پاش یکی از آن فرضهایی است که هندسه‌دانان جدید با عنوان اصل موضوعهای ترتیب[2] رده‌بندی کرده‌اند. این اصل موضوعهای مهم مفهومی را القا می‌کنند که باواژهٔ بین بیان می‌شود و ترتیب توالی نقاط را برروی خطی راست میسر می‌سازند.

---

1. Pasch, Vorlesungen Über neuere Geometrie (Berlin, 1926).

۲. ← قسمت ۹.

۸. اصل پیوستگی

یکی از خصیصه‌های هندسهٔ اقلیدسی استفادهٔ فراوان از ساختن شکلها است برای اثبات وجود شکلهایی کـه دارای خواصی معینند. درست حکم اول از این نمونه است و خواننده می‌تواند بی‌اشکالی احکام دیگر را بـاز شناسد. در این شکلها خطها و دایره‌ها رسم می‌شوند وفرض می‌شودکه نقاط تلاقی خط و خط، و خط و دایره، و دایره ودایره وجود داشته باشند. آشکار است که در هندسه‌ای که با دقت تنظیم شود وجود این نقاط را باید یا به‌صورت اصل موضوع بیان کرد ویا اثبات نمود.

تنها اصل‌موضوع اقلیدس که هیچ نقشی از این‌گونه ندارد اصل موضوع پنجم‌است که کاربردآن فقط در وضع خاصی است. آنچه مورد نیازاست اصل موضوعی است که به‌همهٔ خطها و همهٔ دایره‌ها سرشتی را اسناد دهد که پیوستگی نامیده می‌شود. این کار به نحو رضایتبخشی از راهی که به د د کیند[1] منتسب است صورت می‌پذیرد.

اصل موضوع ددکیند: هرگاه همهٔ نقطه‌های خط راستی به‌دو رده تقسیم شوند چنان که هر نقطهٔ ردهٔ نخستین در طرف چپ هر نقطهٔ ردهٔ دومین واقع شود، آنگاه یك، و فقط یك، نقطه وجود دارد که این تقسیم نقاط به دو رده را بوجود می‌آورد و بدین نحو خط راست را به دو جزء تقسیم می‌کند.

ددکیند می‌گوید: «گمان می‌کنم دراین فرض راه خطا نرفته باشم که همه‌کس در دم درستی این حکم را می‌پذیرد؛ بیشترخوانندگان من شگفت‌زده خواهند شد وقتی که‌بدانند که با همین نکتهٔ پیش‌پا افتاده راز پیوستگی فاش می‌شود. و این را هم باید بگویم که بسیار شاد خواهم شدکه اصل بالا در نظر هرکسی مسلم نماید وبا تصوری که او ازخط راست دارد هماهنگ باشد، زیرا که من بکلی عاجزم از این‌که دلیلی بردرستی آن اقامه کنم و این‌کار در حیطهٔ قدرت هیچ‌کس نیست. تصور این خاصیت برای خط چیزی‌نیست جز اصل موضوعی که به کمك آن ما پیوستگی را به خط اسناد می‌دهیم، و به پیوستگی خط پی می‌بـریم. اگر فضا وجودی حقیقی داشته باشد برای آن لازم نیست که پیوسته باشد؛ بسیاری از خواصی که برای‌آن می‌شناسیم در صورت پیوسته نبودن همچنان‌محفوظ می‌مانند. و اگر مسلم می‌دانستیم که فضا ناپیوسته است هیچ چیز مانع آن نبودکه، اگر بخواهیم، در عالم خیال جاهای خالی آن را پرکنیم و بدین ترتیب‌آن را پیوسته سازیم؛

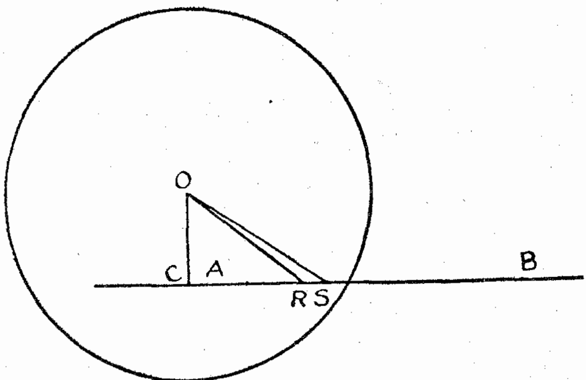
---

۱. Dedekind، در *Essays on The Theory of Numbers*، ترجمهٔ مجازبه‌وسیله، بمن W. W. Beman (شیکاگو، ۱۹۰۱)، یـا *Gesammelte mathematische Werke* جلد سوم، ص ۳۲۲ (برونس‌ویك، ۱۹۳۲).

این پر کردن جاهای خالی عبارت می‌بود از آفریدن نقطه‌های فردی، و مطابق با اصلی که در بالا گفتیم صورت می‌پذیرفت».

این اصل موضوع می‌تواند بآسانی گسترش یابد و زاویه‌ها و قوسها و نیز پاره‌خطها را در برگیرد. به‌عنوان کاربردی از این اصل موضوع حکم زیرین را ثابت می‌کنیم:

پاره خطی که نقطه‌ای واقع در درون دایره‌ای را به نقطه‌ای واقع در بیرون آن وصل کند یك نقطهٔ مشترك با دایره دارد.



شکل ۲

گیریم O مرکز دایرهٔ مفروض (شکل۲) و r شعاع آن باشند؛ فرض کنید A نقطهٔ واقع در درون دایره و B نقطه واقع دربیرون آن باشند. آنگاه:

$$OA < r < OB$$

OC را برAB، که درصورت ضرورت، امتداد داده می‌شود، عمود کنید وتوجه نمایید که

$$OC \leqslant OA < r$$

نقاط پاره خط AB اکنون به دو رده تقسیم می‌شوند: نقاطی مانند P، که برای آنها $OP < r$ و آنهایی مانند Q، که برای آنها $OQ \geqslant r$.

چون در هر حال $OP < OQ$،

نتیجه می‌شود که $CP < CQ$

و بدین ترتیب هر نقطه مانند P واقع است پیش از (یا واقع است بعد از) هر نقطه مانند Q. در نتیجه بنابراصل موضوع ددکیند، نقطه‌ای مانند R بر پاره خط AB وجود دارد بدان‌سان که هر نقطهٔ جلوتر از آن متعلق است به یك رده و هر نقطهٔ بعد از آن متعلق است به‌ردهٔ دیگر. با برهان خلف ثابت می‌کنیم که این نقطهٔ R روی دایره است.

فرض کنید که $OR < r$

و نقطهٔ S را روی AB بین R و B اختیار کنید چنان که

$$RS < r - OR$$

چون در مثلث ORS،

$$OS < OR + RS$$

نتیجه می‌گیریم که

$$OS < r$$

اما این نتیجه محال است، بنابراین OR نمی‌تواند کوچکتر از r باشد.

خواننده می‌تواند به راه مشابه ثابت کند که OR نمی‌تواند بزرگتر از r باشد.

تصور پیوستگی غالباً به‌وسیلهٔ چیزی که اصل موضوع ارشمیدس نامیده می‌شود به هندسه راه می‌یابد. بیانی ساده، اما کافی، از اصل موضوع ارشمیدس چنین است:

هرگاه دو پاره خط داده شده باشند، همواره مضربی متناهی از یکی وجود دارد که از دیگری بزرگتر باشد.

می‌توان نشان داد که این اصل[1] نتیجه‌ای است از اصل موضوع ددکیند. دیده‌ می‌شود که این اصل مجوزی است برای طرد پاره خط بی‌نهایت کوچك و پاره خط نامتناهی، هر دو. این اصل برقوسهای دایره و زاویه‌ها نیزجاری است. چندبار از این اصل استفاده خواهیم کرد.

بخش بزرگی از هندسهٔ اقلیدسی و نیز هندسهٔ نااقلیدسی را می‌توان بی‌استفاده از اصل پیوستگی ساخت. اما در آنچه خواهد آمد ما کوشش نخواهیم کرد که از بکاربردن آن خودداری کنیم.

۹. دستگاه اصل موضوعی هیلبرت

کار مردانی مانند پاش و ورونز و پئانو و هیلبرت، هندسهٔ اقلیدسی را بر اساسی منطقی ومتین قرار داده است. کمکی به کار خواهد بود اگر درآخر این فصل دستگاه‌اصل موضوعهای هیلبرت را، به‌صورتی اندکی‌خلاصه‌تر، بیاوریم ـ این همان دستگاهی است که در قسمت ۲ به آن اشاره کردیم. این اصلها به‌صورت شش مجموعه آراسته شده‌اند. باید یادآوری کرد کـه هیلبرت بـا اصطلاحات تعریف نشدهٔ نقطه و خط و صفحه شروع کرد. این عنصرها به‌وسیلهٔ بعضی رابطه‌هائی که در اصلهای موضوع شرح داده می‌شوند مشخص می‌گردند.

---

۱. ← مقالهٔ G. Vitali در مجموعهٔ Enriques به‌عنوان مسائلی مربوط به هندسهٔ مقدماتی (*Questioni riguardanti la geometrio elemantare*) (بولونیا، ۱۹۰۰) یا ترجمهٔ به آلمانی به نام *Fragen der Elementargeometrie*، جلد یکم، ص ۱۳۵ (لایپزیك و برلین، ۱۹۱۱).

یکم. اصل موضوعهای ارتباط

۱ و ۲. دو نقطهٔ متمایز یك، و فقط یك، خط راست را مشخص می‌سازند.

۳. بر هر خط راست دست کم دو نقطه وجود دارند. و در هر صفحه دست کم سه نقطه وجود دارند که بر روی یك خط راست نیستند.

۴ و ۵. سه نقطه‌که برروی یك خط راست نباشند یك صفحه، و فقط یك صفحه، مشخص می‌سازند.

۶. هرگاه دو نقطهٔ خط راستی بریك صفحه واقع باشند، آنگاه همهٔ نقاط آن خط برروی آن صفحه‌اند.

۷. هرگاه دو صفحه یك نقطه مشترك داشته باشند دست‌کم یك نقطهٔ مشترك دیگر نیز دارند.

۸. دست کم چهار نقطه وجود دارند که بر روی یك صفحه نباشند.

از جملهٔ قضیه‌هایی که باید از مجموعهٔ اصلهای موضوع بالا نتیجه شوند این دو قضیه‌اند:

دو خط راست متمایز که در یك صفحه قرار داشته باشند یك نقطهٔ مشترك دارند یا هیچ نقطهٔ مشترك ندارند.

یك خط و یك نقطهٔ غیر واقع بر آن خط یك صفحه مشخص می‌سازند؛ همچنین دو خط متمایز که یك نقطهٔ مشترك داشته باشند.

دوم. اصل موضوعهای ترتیب

اصل موضوعهای این مجموعه رابطهٔ تعریف نشده‌ای را بین نقاط یك خط راست توصیف می‌کنند. این رابطه با کلمهٔ بین بیان می‌شود.

۱. هرگاه A و B و C سه نقطهٔ واقع بریك خط راست باشند و B بین A و C باشد آنگاه B بین C و A نیز هست.

۲. هرگاه A و C دو نقطهٔ خط راستی باشند، آنگاه دست کم یك نقطهٔ دیگر بر خط وجود دارد که بین A و C است.

۳. از هر سه نقطهٔ واقع بر خط راستی یکی، و فقط یکی، بین دو نقطهٔ دیگر است.

دو نقطهٔ A و B پاره خطی را مشخص می‌سازند؛ A و B دو انتها، یا دو سرِ این پاره خط و نقطه‌های بین A و B نقطه‌های این پاره خطند.

۴. هرگاه سه نقطهٔ A و B و C غیر واقع بریك خط راست، وخط راستی درصفحهٔ ABC که بر هیچ یك ازسه نقطهٔ A و B و C نمی‌گذرد مفروض باشند، آنگاه اگر این خط یك نقطهٔ مشترك با پاره خط AB داشته باشد یك نقطهٔ مشترك با پاره خط BC یا

با پاره خط AC خواهد داشت (اصل موضوع پاش).

نکات زیرین را به عنوان نتایجی مترتب براصل موضوعهایی‌که هم اکنون گفتیم خاطر نشان می‌سازیم:

بین هر دو نقطهٔ خطی تعدادی نامتناهی نقطه قرار دارند.

هرگاه تعدادی متناهی نقطه بر خط راستی داده شوند همواره می‌توان آنها را به صورت دنباله‌ای در نظرگرفت مانند A، B، C، D، E،...، K، چنان که B واقع باشد بین A و C، D،...، K؛ C واقع باشد بین A، B و D، E،... K؛ و به‌همین قیاس. فقط یك دنبالهٔ دیگر با همین خواص وجود دارد و آن دنبالهٔ K،...، E، D، C، B، A است.

هر خط راست واقع برصفحه‌ای نقاطی از صفحه را که برآن خط نیستند به دو ناحیه تقسیم می‌کند که دارای این خصوصیاتند: هر نقطهٔ یك ناحیه با هر نقطهٔ ناحیهٔ دیگری پاره‌خطی تشکیل می‌دهند که با آن خط یك نقطهٔ مشترك دارد؛ از سوی دیگر هر دو نقطهٔ یك ناحیه پاره‌خطی تشکیل می‌دهند که با خط مفروض نقطهٔ مشترك ندارد. بدین ترتیب خواهیم‌گفت که دو نقطه در یك طرف خط مفروضند یا در دو طرف متقابل آن قرار دارند. به نحو مشابه، نقطهٔ معینی واقع بر خط مفروضی نقاط این خط را به نیمخطها یا خطهای شعاعی تقسیم می‌کند و هر نیمخط (یا شعاع) عبارت است از همهٔ نقاطی‌که در یك طرف آن نقطهٔ معین هستند.

دستگاهی ازپاره خطهای AB، BC، CD،...، KL خط‌شکسته‌ای نامیده می‌شود که‌A را به‌L وصل می‌کند. نقاط A، B، C، D،...، L ونیزنقاط پاره‌خطهای یاد شده نقاط خط شکسته نامیده می‌شوند. اگر A و L برهم منطبق باشند خط شکسته چند ضلعی نامیده می‌شود. پاره خطها ضلع‌های چند ضلعی و A، B، C، D،...، K رأس‌های آن هستند. چند ضلعییی‌که ۳، ۴، ۵،...، n رأس داشته باشد بترتیب مثلث، چهارضلعی، پنج ضلعی،...، n ضلعی خوانده می‌شود. اگر رأسهای چند ضلعی متمایز باشند و هیچ یك برضلعی از شکل واقع نباشد و اگر هیچ دو ضلعی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند چند ضلعی را ساده گویند.

نتیجه این می‌شودکه چند ضلعی سادهٔ واقع در یك صفحه نقاط صفحه را که متعلق به آن چند ضلعی نباشند به دو ناحیه تقسیم می‌کند، یك درونی و یك بیرونی، که دارای این خصوصیتها هستند: نقطه‌ای از درون چند ضلعی را به نقطه‌ای از بیرون آن‌نمی‌توان با خط شکسته‌ای به هم وصل کرد که نقطهٔ مشترکی با چند ضلعی نداشته باشد. اما دو نقطهٔ واقع در یك ناحیه را می‌توان بدین طریق به هم ارتباط داد. دو ناحیه را می‌توان

بدین نحو از هم تمیز داد کـه در صفحه خطوطی وجود دارند که کاملاً در بیرون چند ضلعی هستند اما هیچ خطی وجود ندارد که کاملاً در درون آن واقع شود.

سوم. اصل موضوعهای همنهشتی

این مجموعهٔ اصل موضوعها مفهوم تازه‌ای را وارد می‌سازد که با کلمهٔ همنهشتی معین می‌شود.

۱. هرگاه A و B دو نقطهٔ خطی مانند a باشند وهرگاه A' نقطه‌ای باشد واقع برهمان خط a یا برخط دیگر a'، آنگاه بر a'، و در طرف معینی از A'، یك، و فقط یك، نقطهٔ B' یافته می‌شود چنان که پاره خط $A'B'$ همنهشت باشد با پاره خط AB. هر پاره خطی همنهشت است با خود آن.

۲. هرگاه پاره خطی‌چون AB همنهشت باشد باپاره خطی چون $A'B'$، ونیز با پاره‌خط دیگری چون $A''B''$، آنگاه $A'B'$ همنهشت است با $A''B''$.

۳. هرگاه پاره خطهای AB و BC از خط a فقط در نقطهٔ B مشترك باشند و هرگاه پاره‌خطهای $A'B'$ و $B'C'$ از همان خط a یا از خط دیگر a' فقط در نقطهٔ B' مشترك باشند، آنگاه اگر AB و BC به‌ترتیب با $A'B'$ و $B'C'$ همنهشت باشند، AC با $A'C'$ همنهشت است.

دستگاه دو خط شعاعی b و k که از یك نقطهٔ O خارج شوند و بر دو خط‌متمایز واقع باشند زاویهٔ $(b، k)$ نـامیده می‌شود. خطهای شعاعی را ضلع‌های زاویه و O را رأس زاویه گویند. می‌توان ثابت کرد که زاویه نقطه‌های صفحهٔ خود، جز O و نقاط واقع برضلعها را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. هر دو نقطهٔ واقع در هر یك از دو ناحیه را می‌توان با خط شکسته‌ای به هم مربوط کرد که نه شامل O باشد و نه شامل هیچ‌یك از نقطه‌های ضلعها، حال‌آن‌که هیچ نقطهٔ یك ناحیه را نمی‌توان با چنین خطی به‌هیچ نقطهٔ ناحیهٔ دیگر مربوط ساخت. ناحیه‌ای‌که درونی نامیده می‌شود دارای این‌خصوصیت است‌که هرپاره خطی‌که به‌وسیلهٔ هردو نقطهٔ آن مشخص‌گردد فقط نقطه‌هایی ازاین ناحیه را در بر می‌گیرد؛ برای ناحیهٔ دیگر موسوم به بیرونی این خصوصیت برای هر دو نقطه آن وجود ندارد.

۴. گیریم که زاویه‌ای چون $(b ، k)$ برصفحهٔ α، وخطی چون a' در همان‌صفحهٔ α یا در صفحهٔ دیگری چون α'، ونقطه‌ای چون O' بر a'، و بر‌روی خط a' خطی شعاعی مانند b' که از O' خارج شده باشد، داده شده باشند، آنگاه در α' یك، وفقط یك، خط‌شعاعی k' از O'خارج می‌شود چنان‌که زاویهٔ $(b' ، k')$ همنهشت باشد با زاویهٔ $(b ، k)$ ودرون $(b' ، k')$ در یك طرف مشخص a' باشد.

۵. هرگاه زاویهٔ (k و b) همنهشت باشد با زاویهٔ (k' و b') و نیز همنهشت باشد با زاویهٔ (k'' و b'')، آنگاه زاویهٔ (k' و b') همنهشت است با زاویهٔ (k'' و b'').

دو اصل موضوع اخیرزاویه را به‌همان نحو مشخص می‌سازندکه اصلهای‌موضوع ۱ و ۲ ازمجموعهٔ سوم پاره خطها را مشخص‌می‌ساختند. آخرین اصل‌موضوع این‌مجموعه مربوط است به همنهشتی پاره خطها و همنهشتی زاویه‌ها.

۶. هرگاه در مثلث‌های ABC و $A'B'C'$، پاره خطهای AB و AC و زاویهٔ BAC بترتیب همنهشت باشند با پاره خطهای $A'B'$ و $A'C'$ و زاویهٔ $B'A'C'$، آنگاه زاویهٔ ABC همنهشت است با زاویهٔ $A'B'C'$.

چهارم. اصل موضوع موازیها

گیریم خط a و یك نقطهٔ A غیر واقع بر a داده شده باشند، آنگاه در صفحه‌ای که با a و A مشخص می‌شود یك، وفقط یك، خط یافته می‌شود که نقطهٔ A را شامل باشد اما شامل هیچ نقطهٔ a نباشد (اصل موضوع پلی‌فیر).

پنجم. اصل موضوع پیوستگی

دو پاره خط AB و CD مفروضند. همواره بر خط AB دنباله‌ای از نقاط مانند A_1، A_2، A_3، ...A_n وجود دارند چنان که پاره خطهای AA_1، A_1A_2، A_2A_3، ...$A_{n-1}A_n$ همنهشت باشند با CD و B واقع باشد بین A و A_n (اصل موضوع ارشمیدس).

ششم. اصل موضوع تمامیت خطی

ممکن نیست که در دستگاه نقاط یك خط نقاطی افزود، چنان که دستگاه گسترش‌یافته هندسهٔ جدیدی تشکیل دهد که در آن همهٔ اصل موضوعهای خطی یاد شده معتبر باشند.

هندسه‌ای که آن را اقلیدسی می‌نامیم بر روی این پی‌ها بناشده است.