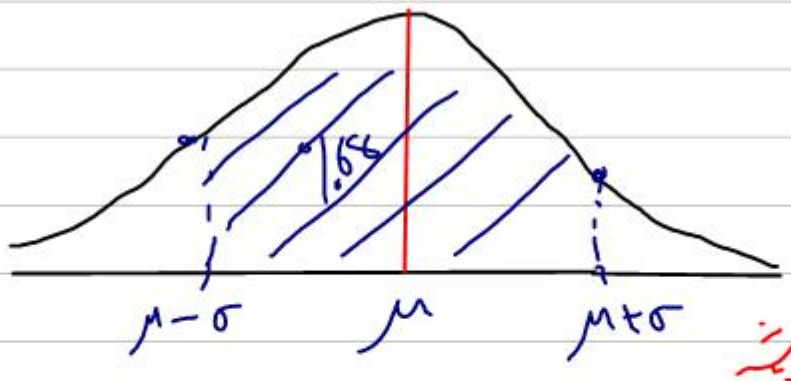
توزیع نرمال: گوییم متغیر تصادفی X از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 پیروی می‌کند و می‌نویسیم

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$



خواص توزیع نرمال

① متقارن است

② $\mu = med = mod$

③ ضرب شکم یا زنگوله‌ای

$f'(x)=0 \Rightarrow x=\mu$ در نقطه μ (میانگین) دارای کمینه یا بیشینه است

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\mu\pm\sigma$ دو نقطه عطف دارد.

68% مساحت در فاصله $\mu-\sigma$ تا $\mu+\sigma$ قرار دارد

95% مساحت در فاصله $\mu-2\sigma$ تا $\mu+2\sigma$ قرار دارد

و $\approx$ 99.7% بین $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$.

مثال: فرض کنید نمرات آزمون درس آمار از توزیع نرمال با میانگین 10 و واریانس 9 پیروی کند

68% افراد تقریباً بین $\mu-\sigma$ تا $\mu+\sigma$ یعنی 7 تا 13 قرار دارند

95% " " $\mu-2\sigma$ تا $\mu+2\sigma$ یعنی 4 تا 16 قرار دارند

99.7% " " $\mu-3\sigma$ تا $\mu+3\sigma$ یعنی 1 تا 19 قرار دارند

محاسبه احتمال در توزیع نرمال

فرض کنیم متغیر تصادفی X از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 پیروی کند

می‌خواهیم محاسبه کنیم

$$P(a<X<b)=?$$

برای محاسبه احتمال بالا متغیر X را استاندارد می‌کنیم

روش استاندارد کردن: اگر X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

را استاندارد شده X می‌نامیم

توزیع Z را توزیع نرمال استاندارد می‌نامیم که میانگین Z برابر 0 و واریانس Z برابر 1 است

$$P(a<X<b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

این دو احتمال را از جدول نرمال استاندارد پیدا می‌کنیم.

مثال: فرض کنید بهره‌وری دانشجویان دانشگاه از توزیع نرمال با میانگین 100 و واریانس 25 پیروی می‌کند. درصد دانشجویانی که بهره‌وری آنها بین 95 و 105 است را محاسبه کنید.

الف) حداقل 90 درصد

ب) بیشتر از 88 درصد

ج) بین 98 و 102 درصد.

$\mu = 100 \quad \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5$

ا) $P(X < 90) = P\left(\frac{X-100}{5} < \frac{90-100}{5}\right)$

$= P(Z < -2) = 0.02275$

ب) $P(X > 88) = P\left(\frac{X-100}{5} > \frac{88-100}{5}\right) = P(Z > -2.4)$

$= 1 - P(Z < -2.4) = 1 - 0.00820 = 0.99180$

ج) $P(98 < X < 105) = P\left(\frac{98-100}{5} < \frac{X-100}{5} < \frac{105-100}{5}\right)$

$= P(-0.4 < Z < 1)$

$= P(Z < 1) - P(Z < -0.4)$

$= 0.84134 - 0.34458 = 0.49776$

قضیه: حد مرکزی: اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه وقتی $n \to \infty$ ($n \geq 30$)، $\bar{X}$ از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ پیروی می‌کند.

مثال: فرض کنید نمرات آمار دریک کلاس دارای میانگین 12 و واریانس 9 باشد. اگر 30 نفر از این کلاس را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه میانگین نمرات آنها بین 11.5 و 13.25 باشد چقدر است؟

الف) $P(11.5 < \bar{X} < 13.25)$

ب) $P(11.5 < X < 13.25)$

$$P(11.5 < \bar{X} < 13.25) = P\left(\frac{11.5-12}{3/\sqrt{30}} < \frac{\bar{X}-12}{3/\sqrt{30}} < \frac{13.25-12}{3/\sqrt{30}}\right)$$

$$= P(-0.91 < Z < 2.28) = P(Z < 2.28) - P(Z < -0.91)$$

$$= 0.98870 - 0.18141 = 0.80729$$

مثال: فرض کنید نمرات ارزشیابی کارمندان یک سازمان از توزیع نرمال با میانگین 70 و واریانس 36 پیروی کند.

الف) اگر به کارمندی که نمره ارزشیابی وی بین 65 تا 75 است چه پاداشی بدهیم؟

ب) اگر 10٪ کارمندان با ضعیف‌ترین نمرات ارزشیابی اخراج شوند، کمترین نمره کارمندانی که اخراج نشده‌اند چقدر است؟

ج) اگر سازمان یک دوره آموزشی ضمن خدمت برگزار کند و پس از 20 دوره کارمندان نمره ارزشیابی بیش از 90 کسب کنند پاداش نمره ارزشیابی چقدر است؟

$\mu = 70 \quad \sigma^2 = 36 \Rightarrow \sigma = 6$

الف) $P(65 < X < 75) = P\left(\frac{65-70}{6} < \frac{X-70}{6} < \frac{75-70}{6}\right)$

$= P(-0.83 < Z < 0.83)$

$= P(Z < 0.83) - P(Z < -0.83) = 0.79673 - 0.20327$

$= 0.59346$

ب) k . حول کرو مشخص کنید

$P(X < k) = 0.10 = P\left(\frac{X-70}{6} < \frac{k-70}{6}\right) = 0.1$

$P\left(Z < \frac{k-70}{6}\right) = 0.10$

$P(Z < -1.28) = 0.10027$

$\frac{k-70}{6} = -1.28$

$k = 70 - 1.28(6) = 6232$

2.) $P(X>90)=0.20$ $\mu=?$ $\sigma=6$

$$P\left(\frac{X-\mu}{6}>\frac{90-\mu}{6}\right)=0.2$$

$P(Z<a)=1-P(Z>a)$

$P(Z<a)+P(Z>a)=1$

$$P\left(Z>\frac{90-\mu}{\sigma}\right)=0.2$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{90-\mu}{\sigma}\right)=0.8$$

$$P(Z<0.84)=0.79955$$

$$\frac{90-\mu}{6}=0.84 \Rightarrow \mu=90-6(0.84)=84.96$$