

به نام خداوند مهربان
مدرسه علوم کامپیوتر و ریاضی یزد
آزمون تئوری - ۱۱ آذر ۹۵ - روز نخست

۱ پیتزای پنجره‌ای

یک جدول $n \times m$ داریم که در هر خانه از آن یک عدد طبیعی نوشته شده است. در هر مرحله می‌توانیم دو خانه‌ی مجاور ضلعی را انتخاب کنیم و از هر دو مقدار دلخواه k تا کم کنیم. به طوری که مقدار هیچ کدام از خانه‌ها منفی نشود. شرط لازم و کافی روی جدول داده شده را بیابید به طوری که با بتوانیم با حرکات مجاز همه‌ی خانه‌های جدول را صفر کنیم.

۲ سوال استاد

اگر به من یک رشته‌ی دودویی بدهید، به ازای هر زیردنباله‌ی متوالی از ارقام آن، ارقام آن زیررشته‌ی متوالی را برعکس کرده (صفر را به یک و یک را به صفر تبدیل می‌کنم) و آن عدد را روی تخته می‌نویسم. سپس مجموع این رشته‌های دودویی را محاسبه می‌کنم و به اندازه‌ی آن مقدار خوش حال می‌شوم.

مثلاً اگر به من رشته‌ی ۱۱۰۰ را بدهید، رشته‌های ۱۱۰۰، ۰۱۰۰، ۱۰۰۰، ۱۱۱۰، ۱۱۰۱، ۰۰۱۱، ۱۰۱۰، ۱۱۱۱، ۰۰۱۰، ۱۰۱۱، ۰۰۱۱، ۰۰۱۱ را روی تخته می‌نویسم. سپس به اندازه‌ی مجموع دودویی این اعداد یعنی ۱۰۱۱۱۱۱ خوش حال می‌شوم. (زیررشته‌ی تهی نیز یک زیردنباله‌ی متوالی است.)

من از شما یک رشته به طول ۱۰۱ می‌خواهم تا پس از انجام این عملیات طاقت فرسا بر روی آن، به اندازه‌ی بیشترین مقدار ممکن خوش حال شوم.

شما چند رشته و چه رشته‌هایی را می‌توانید به من بدهید؟

۳ دوست آن باشد که گیرد دست دوست!

بچه‌های مدرسه‌ی شفیق همه خراب رفاقت هستند و به شعر «دوست آن باشد که گیرد دست دوست» اعتقاد محکمی دارند. لذا در امتحانات به یاری یکدیگر می‌شتابند و حسابی تقلب می‌کنند!

معلم گراف مدرسه که از این موضوع اطلاع دارد گراف دوستی شاگردانش را از روی Facebook درآورده است! (دوستی یک رابطه‌ی دو طرفه است.)

یک گروه دوستی تعدادی از افراد هستند که دو به دو با هم رابطه‌ی دوستی دارند. اندازه‌ی یک گروه دوستی برابر با تعداد اعضای آن است. معلم گراف متوجه شده که اندازه‌ی بزرگترین گروه دوستی بین شاگردانش زوج است.

او قصد دارد امتحان درس را در دو کلاس مدرسه برگزار کند. حالا می‌خواهد با توجه به گراف دوستی جووری بچه‌ها در دو کلاس تقسیم کند که اندازه‌ی بزرگترین گروه دوستی هر دو کلاس با هم برابر باشد. با این ایده که برای برقراری عدالت، تقلب کردن در هر دو کلاس باید به یک اندازه سخت باشد! ثابت کنید این کار همیشه ممکن است.

خلاصه: ثابت کنید به ازای هر گراف G که اندازه‌ی بزرگترین خوشه در آن زوج است همیشه می‌توان جووری راس‌های G را به دو قسمت تقسیم کرد که اندازه‌ی بزرگترین خوشه در زیرگراف القایی هر قسمت از راس‌ها برابر با دیگری باشد.

۴ میراث تابستان

گراف کاملی با ۲۰۱۴ راس در اختیار داریم. دو راس u و v مشخص شده‌اند. دو نفر بازی زیر را روی این گراف انجام می‌دهند. هر نفر در نوبت خود یکی از یال‌های گراف باقیمانده را حذف می‌کند. در صورتی که پس از حرکت یک نفر، هیچ مسیری از راس u به راس v وجود نداشته باشد او بازنده خواهد شد.

در صورتی که هر بازیکن به بهترین شکل بازی خود را انجام دهد، چه کسی استراتژی برد دارد؟ ادعای خود را بیان و اثبات کنید.