



سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)

جزوه آموزش

ریاضه ۱

دعم ریاضه و تجربیه

کاره از استاد بابالویان

۱۸ یازده

دانلود از سایت ریاضی سرا  
[www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

# فصل اول

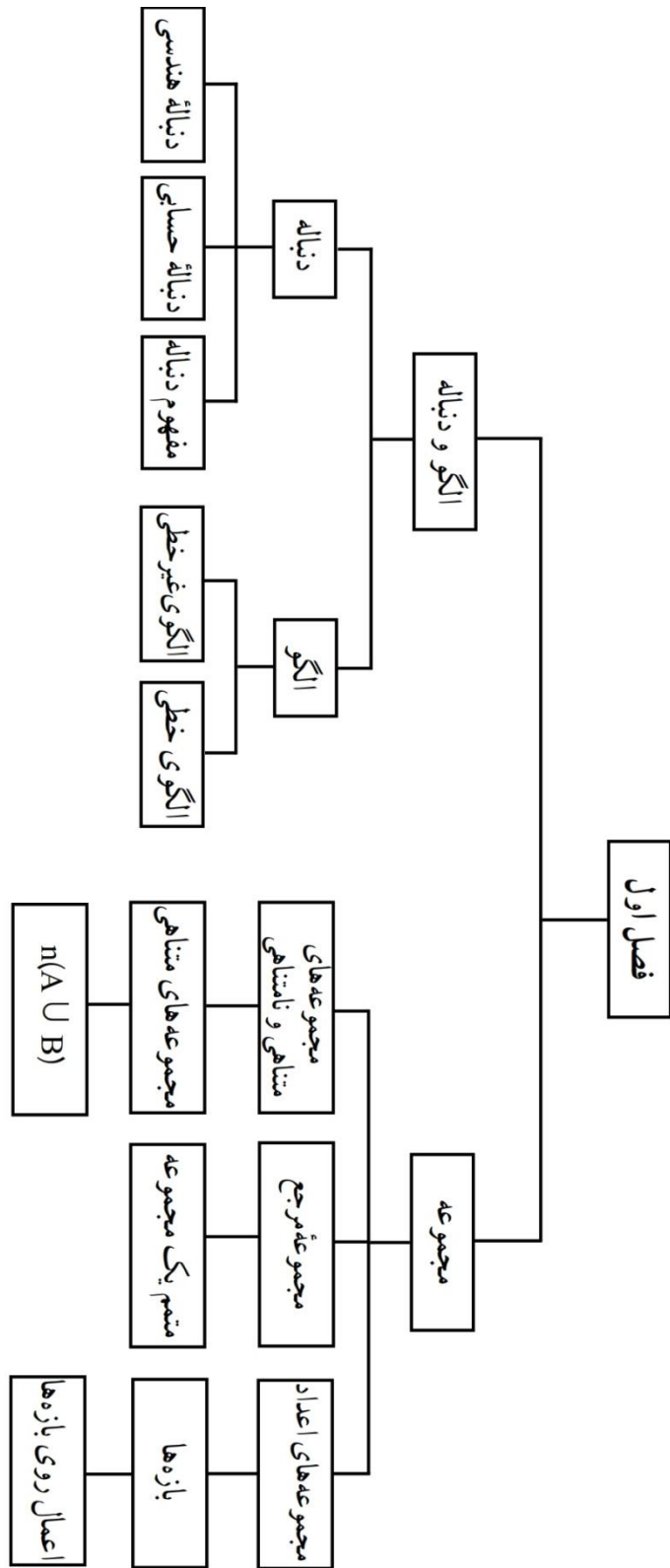
## مجموعه ، القو و دنباله

درس اول : مجموعه های متناهی و نامتناهی

درس دوم : مجموعه یک مجموعه

درس سوم : القو و دنباله

درس چهارم : دنباله حسابی و هندسی



درس اول : مجموعه های متناهی و نامتناهی

مجموعه اعداد :

مجموعه اعداد طبیعی :  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

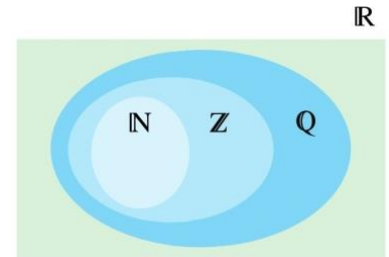
مجموعه اعداد حسابی :  $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح :  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا :  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت  $\mathbb{Q}' =$  نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.  
مجموعه اعداد گنگ

مجموعه اعداد حقیقی :  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



سوال :

الف)  $R - Q$  چه مجموعه ای است ؟

ب)  $Z - W$  چه مجموعه ای است ؟

ج)  $W - N$  چند عضو دارد ؟

بازه ها :

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in R   a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in R   a \leq x \leq b\}$	
نیم باز			
نیم باز			
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in R   x > a\}$	
نیم باز			
باز	$(-\infty, b]$	$\{x \in R   x \leq b\}$	
نیم باز			

سوال : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید :

- الف)  $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2)$     ب)  $-2 \in (-2, 0]$     پ)  $0 \in (-2, 0]$     ت)  $-2 \in \{-2, 0\}$     ث)  $-1 \in \{-2, 0\}$   
 ج)  $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$     چ)  $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$     ح)  $\emptyset \subseteq (-17, 0]$     خ)  $[2, 5) = (2, 5]$     د)  $\sqrt{2} \in (0, 1)$

سوال : هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه های داده شده هستند . هر عدد را به بازه یا بازه های نظیر آن وصل کنید .

-2	$\sqrt{3}$	-5.00	$\frac{-5}{2}$	$6 \div 0.22 \times 10^{23}$	0/2
$[1, 4]$	$(-\infty, -4)$	$[-2, 0)$	$[3, +\infty)$	$(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$	$(-2, 3)$

(An arrow points from -5.00 to  $(-\infty, -4)$ )

سوال : نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2]$  و  $B = (-1, 3]$  را روی محور رسم کرده و حاصل عبارت های زیر را بنویسید .



- الف)  $A \cap B$     ب)  $A \cup B$     پ)  $A - B$     ت)  $B - A$

سوال : اگر  $A = \{x \in R \mid -2 < x \leq 2\}$  و  $B = \{x \in R \mid x \leq 1\}$  و  $C = \{x \in R \mid x > 0\}$  مجموعه های زیر را مشخص کنید .



- الف)  $(A \cup B) \cap C$   
 ب)  $(A \cap C) \cup B$   
 ج)  $A - (B \cup C)$

سوال : حاصل هر یک از مجموعه های زیر را بنویسید .

الف)  $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$

ب)  $(-3, 0) \cup (-2, 5]$

ج)  $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

د)  $(3, +\infty) \cap (6, 10]$

ه)  $[2, 4) - (3, +\infty)$

و)  $(3, +\infty) - [2, 4)$

سوال : مجموعه  $\mathbb{R} - \{2\}$  را روی محور نمایش داده و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید .

**مجموعه متناهی :** هر مجموعه که بتوان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کرد .

**مجموعه نامتناهی :** هر مجموعه که نتوان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد . در واقع تعداد آن از هر عدد قابل تصویری بزرگتر باشد .

سوال : کدام یک از مجموعه های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی است ؟

- |                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| الف) مجموعه اعداد گویای بین ۰ و ۱ . | ب) مجموعه اعداد ۱۰۰ رقمی .        |
| ج) مجموعه اعداد طبیعی فرد .         | د) مجموعه مقسوم علیه های عدد ۴۰ . |
| ه) مجموعه مضرب های عدد ۳            | ز) مجموعه تمام درختان جنگل آمازون |

سوال : دو مجموعه نامتناهی نام ببرید که یکی زیر مجموعه دیگری باشد .

سوال : دو مجموعه نامتناهی بنویسید که دارای اشتراک متناهی باشند .

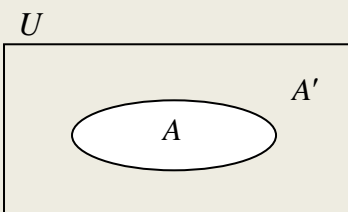
سوال : دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که تفاضل آنها دو عضو داشته باشد .

سوال : جاهای خالی را با عبارت « متناهی » یا « نامتناهی » و یا « نامعلوم » پر کنید .

- الف) اگر  $A \subset B$  و  $A$  مجموعه ای نامتناهی باشد ، آنگاه مجموعه  $B$  ، ..... است .
- ب) اگر  $A \subset B$  و  $A$  مجموعه ای متناهی باشد ، آنگاه مجموعه  $B$  ، ..... است .
- ج) اگر  $A \subset B$  و  $B$  مجموعه ای نامتناهی باشد ، آنگاه مجموعه  $A$  ، ..... است .
- د) اگر  $A \subset B$  و  $B$  مجموعه ای متناهی باشد ، آنگاه مجموعه  $A$  ، ..... است .

درس دوم : متمم مجموعه

مجموعه مرجع : در هر مبحث مجموعه ای ، یک مجموعه بزرگ وجود دارد که همه مجموعه ها زیر مجموعه آن هستند و به آن مجموعه مرجع می گویند و معمولاً با  $U$  نمایش می دهند .



متمم مجموعه  $A$  : اگر مجموعه  $A$  زیر مجموعه ای از مجموعه مرجع  $U$  باشد ،

مجموعه  $U - A$  را متمم مجموعه  $A$  می نامند و معمولاً با  $A'$  نمایش می دهند .

در واقع  $A'$  مجموعه ی از اعضای  $U$  است که در  $A$  نباشد .



سوال : با تصور نمودار ون هر قسمت ، طرف دوم تساوی را بنویسید .

$$\begin{array}{lll}
 A \cup U = & A \cup A' = & \phi' = \\
 A \cap U = & A \cap A' = & U' = \\
 A - U = & A - A' = & (A')' = \\
 U - A & A' - A = & 
 \end{array}$$

سوال : با توجه به مجموعه های مرجع داده شده ، متمم هر مجموعه را مقابل آن بنویسید .

مجموعه $A$	مجموعه مرجع	مجموعه $A'$
$(-1, 2]$	$R$	
$[1, +\infty)$	$R$	
$W$	$R$	
$W$	$Z$	
$\{x \in Z \mid -3 < x \leq 2\}$	$Z$	
$\{2, 5, 8, 11, \dots\}$	$N$	
مضارب ۲ یا ۳	$\{1, 2, 3, \dots, 20\}$	

سوال : اگر  $Z$  مجموعه مرجع باشد ، مجموعه ای نامتناهی مانند  $A$  مثال بزنید که  $A'$  متناهی باشد .

سوال : اگر  $N$  مجموعه مرجع باشد ، مجموعه ای نامتناهی مانند  $A$  مثال بزنید که  $A'$  هم نامتناهی باشد .

سوال : اگر  $U = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$  مجموعه مرجع و  $A$  مجموعه مقسوم علیه های عدد ۱۲ و  $B = \{2, 3, 5, 9\}$  باشد . مطلوبست :

$$A' = \qquad B' =$$

$$A \cap B' = \qquad A' \cap B =$$

$$A \cup B' = \qquad A' \cup B =$$

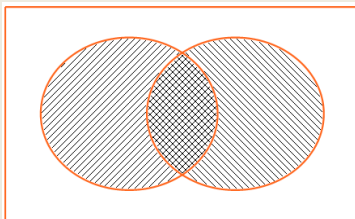
$$A' \cap B' = \qquad (A \cup B)' =$$

$$A' \cup B' = \qquad (A \cap B)' =$$

نکته مهم: همان طور که در دو سطر آخر سوال قبل دیده می شود، همواره:  $A' \cap B' = (A \cup B)'$  و  $A' \cup B' = (A \cap B)'$

**تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه:**

آیا می توان گفت تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  برابر با مجموع تعداد اعضای تک تک آنهاست؟



توجه شود در صورتی که بگوییم  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  در این صورت طبق نمودار و ن مقابل، در واقع قسمت اشتراک دو مجموعه ۲ بار شمرده شده است.

پس می توان گفت:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - \dots\dots\dots$

**سوال:** در میان ۳۵ نفر اهالی یک محل، ۲۰ نفر روزنامه  $A$ ، ۱۸ نفر روزنامه  $B$  و ۶ نفر هیچ کدام را نمی خوانند.

(الف) چند نفر هر دو روزنامه را می خوانند؟

(ب) چند نفر حداقل یکی را می خوانند؟

(ج) چند نفر فقط روزنامه  $A$  را می خوانند؟

(د) چند نفر فقط روزنامه  $B$  را می خوانند؟

**سوال:** در بین ۷۱ نفر، ۳۶ نفر عضو تیم فوتبال و ۲۷ نفر عضو تیم والیبال هستند و ۱۲ نفر عضو هر دو تیم هستند.

(الف) چند نفر عضو هیچ تیمی نیست؟

(ب) چند نفر عضو حداقل یکی از دو تیم است؟

(ج) چند نفر فقط عضو یکی از دو تیم است؟

سوال : اگر  $A, B$  از مجموعه مرجع  $U$  باشند و  $n(U) = 100$  و  $n(A) = 60$  و  $n(B) = 40$  و  $n(A \cap B) = 20$  مطلوبست :

$$n(A \cup B) =$$

$$n(A \cup B') =$$

$$n(A' \cap B') =$$

$$n(A' \cup B') =$$

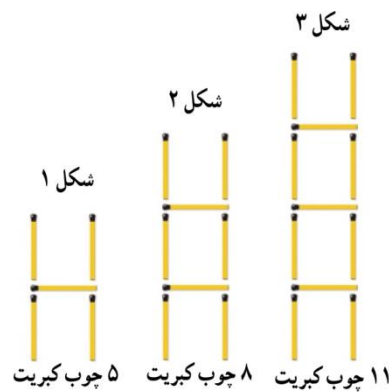
مجموعه های مجزا : دو مجموعه که با هم اشتراکی نداشته باشند را مجزا می نامند .

سوال : برای دو مجموعه مجزا  $n(A \cup B)$  برابر است با : .....

سوال : به کمک نمودار ون ، نشان دهید دو مجموعه  $A - B, A \cap B$  مجزا هستند .

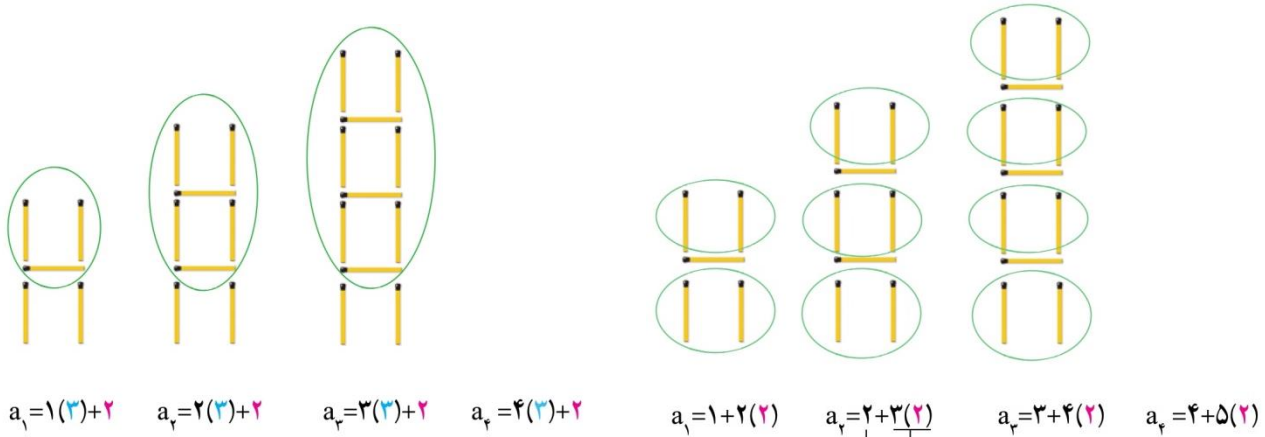
### درس سوم : الگو و دنباله

به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید . می خواهیم جدول زیر شکل را کامل کنیم .



شماره شکل: $n$	۱	۲	۳	۴	...	$n$	...
تعداد چوب کبریت ها: $a_n$	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین $n$ و $a_n$	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

به دو روش زیر برای یافتن الگو دقت کنید .



روش اول جمله  $n$  را برابر با  $a_n = 3n + 2$  و روش دوم آن را به صورت  $a_n = n + (n+1)(2)$  بدست می دهد که هر دو یکسان هستند .

**سوال :** شما با روش دیگری یک الگو برای یافتن تعداد چوب کبریت ها بیابید .

**سوال :** در شکل بیستم تعداد چوب کبریت ها چقدر است ؟

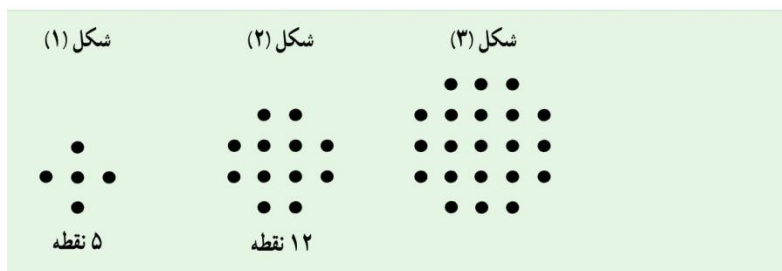
**سوال :** در چندمین شکل از الگوی بالا تعداد چوب کبریت ها ۷۷ قطعه است ؟

**جمله عمومی :** جمله  $n$  ام یک الگو را که نشان دهنده ساختار جملات الگو است ، جمله عمومی می گویند که معمولاً با  $a_n$  نمایش داده می شود .

**الگوی خطی :** هر الگویی که اختلاف جملات متوالی آن عدد ثابتی است را الگوی خطی می نامند و جمله عمومی الگوی خطی همواره به صورت معادله یک خط است یعنی به صورت  $t_n = an + b$  است .

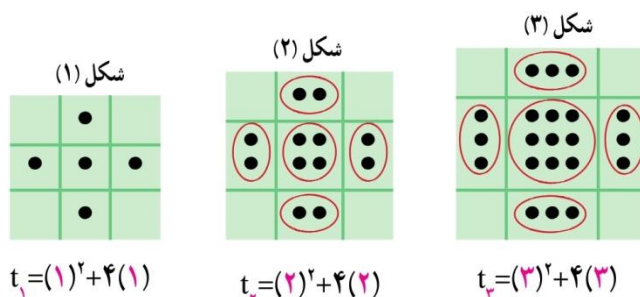
**سوال :** در یک الگوی خطی جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ است . جمله بیستم را بیابید .

به شکل های زیر و تعداد نقاط به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید . می خواهیم جدول زیر شکل را کامل کنیم .



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
$t_n$ : تعداد نقطه ها	۵	۱۲	...	...	...
رابطه بین n و $t_n$	$t_1=5$	$t_2=$	...	...	...

به روش زیر برای یافتن الگو دقت کنید .

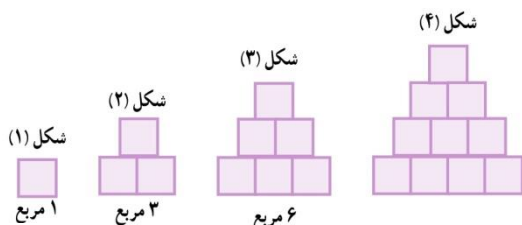


**سوال :** با توجه به این الگو ، شکل شماره  $n$  شامل چند نقطه است ؟

**سوال :** با روش دیگری یک الگو برای یافتن تعداد نقاط بیابید .

**دنباله :** هر تعداد از اعداد را که پشت سر هم بنویسیم ، یک دنباله نامیده می شود و این اعداد را جملات دنباله می نامند . و جمله  $n$  ام آن را جمله عمومی دنباله می نامند .

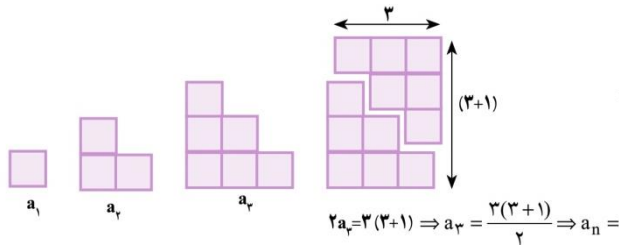
**توجه :** لزوماً هر دنباله دارای الگو نیست . و همانطور که دیدیم لزوماً هر دنباله الگو دار خطی نیست .



الگوی مقابل را در نظر بگیرید .

الف ) تعداد مربع ها را تا ۶ مرحله به صورت دنباله بنویسید .

ب) آیا دنباله فوق خطی است ؟ چرا ؟

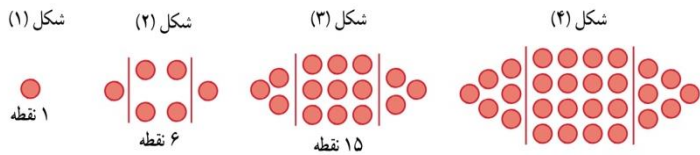


پ) با دقت در تصویر مقابل جمله عمومی را بنویسید .

ت) به کمک الگوی قبل حاصل جمع اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  را بیابید .

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

سوال : الگوی مقابل را در نظر بگیرید .



الف) تعداد نقاط را تا ۵ مرحله به صورت دنباله بنویسید .

ب) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد ؟

سوال : جمله عمومی دنباله های زیر را بنویسید .

الف)  $-1, 8, -27, 64, -125, \dots$

ب)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

ج)  $3, 5, 7, 9, \dots$

د)  $\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \dots$

سوال : جمله عمومی دو دنباله داده شده است . چهار جمله اول هر یک از دنباله ها را بنویسید .

الف)  $a_n = 2n + 3$

ب)  $b_n = n^2 + n$

ج)  $c_n = 2n^2$

د)  $d_n = 3n - 2$

سوال : جمله چندم دنباله  $a_n = \frac{2n-2}{n-4}$  برابر ۳ است ؟

سوال : جمله چندم دنباله  $a_n = 3n-2$  برابر ۱۶ است ؟

### درس چهارم : دنباله حسابی و هندسی

**دنباله حسابی :** نام دیگر الگوی خطی ، دنباله حسابی است و در واقع دنباله ای است که هر جمله آن به جز جمله اول ، از جمع جمله قبلی با یک عدد ثابت ، بوجود آمده است . این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله حسابی می گویند و معمولاً با  $d$  نمایش می دهند .

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 + d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$			...	$t_1 + (\dots)d$	...

در نتیجه جمله عمومی دنباله حسابی به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است .

سوال : جمله عمومی دنباله های زیر را نوشته و به کمک آن جمله ۲۰ام را بیابید .

الف) ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ...

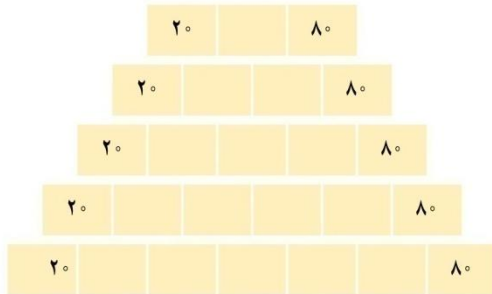
ب) ۱۲, ۷, ۲, -۳, ...

ج)  $\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \dots$

د)  $\frac{1}{5}, \frac{5}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \dots$

سوال : سه واسطه حسابی بین ۱۸ و ۶۲ درج کنید .

سوال : بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد ، واسطه حسابی درج کنید .



سوال : جملات دوم و ششم یک دنباله حسابی ۷ و ۲۳ است . قدر نسبت، جمله اول و جمله عمومی را بیابید .

سوال : در یک دنباله حسابی جمله سوم و هفتم به ترتیب ۲ و ۵۶ است . جمله بیستم آن را بیابید .

سوال : در یک دنباله حسابی ، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی ۳۹ است . دنباله را بنویسید .



سوال : در یک دنباله حسابی ، مجموع سه جمله اول ۲۱ و مجموع سه جمله بعدی ۵۷ است . دنباله را بنویسید .

سوال : در دنباله حسابی مجموع جملات هفتم و دوم برابر ۶ و تفاضل جمله چهارم از جمله دوازدهم ۵ است . جمله اول دنباله را بیابید .

سوال : در دنباله حسابی مجموع جملات سوم و پنجم برابر ۲۰ و مجموع جمله چهارم و هفتم ۲۹ است . قدر نسبت دنباله را بیابید .

**دنباله هندسی :** دنباله ای است که هر جمله آن به جز جمله اول ، از ضرب جمله قبلی با یک عدد ثابت ، بوجود آمده است . این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله هندسی می گویند و معمولاً با  $r$  نمایش می دهند .

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 r$	$t_1 r^2$			...		...
	$\times r$	$\times r$	$\times r$	$\times r$			

در نتیجه جمله عمومی دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است .

سوال : جمله عمومی دنباله های زیر را بنویسید .

الف) ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ...

ب)  $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

ج)  $5, -15, 45, -135, \dots$

د)  $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

سوال : سه واسطه حسابی بین ۳ و ۴۸ درج کنید .

سوال : بین  $2^0$  و  $8^0$  به تعداد مشخص شده در هر مورد ، واسطه حسابی درج کنید .



سوال : جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی  $12$  و  $96$  است . قدر نسبت، جمله اول و جمله عمومی را بیابید .

سوال : در یک دنباله هندسی جمله ششم  $8$  برابر جمله دوم است و تفاضل جمله سوم از جمله چهارم  $12$  است . دنباله را بنویسید.

**سوال :** دنباله ای بنویسید که هم حسابی باشد و هم هندسی .

**سوال :** حاصل ضرب ۲۰ جمله اول دنباله هندسی  $۲, ۴, ۸, \dots$  را بدست آورید .

**توجه :** اگر چیزی با مقدار اولیه  $t_1$  دارای رشد  $p$  درصدی در دوره های یکسان باشد ، یک دنباله هندسی با قدر نسبت  $r = 1 + p$  ایجاد می شود :

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 + pt_1$	$t_2 + pt_2$	$t_3 + pt_3$		$t_{n-1} + pt_{n-1}$	
$t_1$	$t_1(1+p)$	$t_2(1+p)^2$	$t_3(1+p)^3$		$t_1(1+p)^{n-1}$	

در نتیجه پس از گذشت  $n$  دوره ، مقدار آن چیز برابر است با :  $t_{n+1} = t_1(1+p)^n$

به همین ترتیب اگر آن چیز دارای کاهش  $p$  درصدی در دوره های یکسان باشد ، پس از گذشت  $n$  دوره :  $t_{n+1} = t_1(1+p)^n$

**سوال :** علی دوچرخه اش را ۵۰۰ هزار تومان خرید . با فرض آنکه هر سال ۲۰ درصد از قیمت آن کاهش بیابد ، حساب کنید پس از ۳ سال قیمت دوچرخه چقدر است ؟ پس از  $n$  سال چطور ؟

**سوال :** اگر ۵ میلیون تومان در بانکی با سود ۱۵ درصد به عنوان سپرده بگذاریم ، پس از ۵ سال مقدار موجودی سپرده ما چقدر خواهد بود ؟

**سوال :** توپی از ارتفاع ۲۰ متری رها می شود ، اگر پس از هر بار برخورد با زمین ۳۰ درصد از ارتفاع آن کاسته شود ، پس از ۵ بار به زمین خوردن ، ارتفاع توپ چقدر است ؟

**سوال :** اگر قانون یک شرکت برای افراد تازه استخدام شده این باشد که حقوق اولیه ۵۰۰ هزار تومان باشد و در سال اول هر ماه ۱۰ درصد به حقوق آن ها افزوده شود ، در پایان سال اول حقوق کارگران چقدر خواهد بود ؟

**روش تشخیص و یافتن جمله عمومی دنباله درجه ۲ :**

دنباله ای که تفاضل متوالی جملات در دو مرحله به اعداد ثابتی ختم می شود دارای جمله عمومی درجه دوم به صورت  $a_n = an^2 + bn + c$  هستند که  $a$  و  $b$  و  $c$  اعداد معلوم می باشند . پس :

$$a + b + c = a_1 \quad \text{و} \quad 4a + 2b + c = a_2 \quad \text{و} \quad 9a + 3b + c = a_3$$

و از تفاضل دو تساوی اول و دو تساوی دوم و نهایتاً تفاضل این دو تساوی بدست آمده ابتدا  $a$  را یافته و با جایگذاری در مراحل قبل  $b$  و  $c$  را نیز می یابیم .

**مثال :** جمله عمومی دنباله درجه دوم  $5, 12, 22, 35, 51, \dots$  را بیابید .

$a + b + c = 5$	$\xrightarrow{-}$	$3a + b = 7$	$\xrightarrow{-}$	$2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$
$4a + 2b + c = 12$	$\xrightarrow{-}$	$5a + b = 10$		
$9a + 3b + c = 22$				

**نتیجه :** برای یافتن جمله عمومی کافیست بدانیم :

**سوال :** جمله عمومی دنباله درجه دوم  $3, 9, 17, 29, \dots$  را بنویسید .

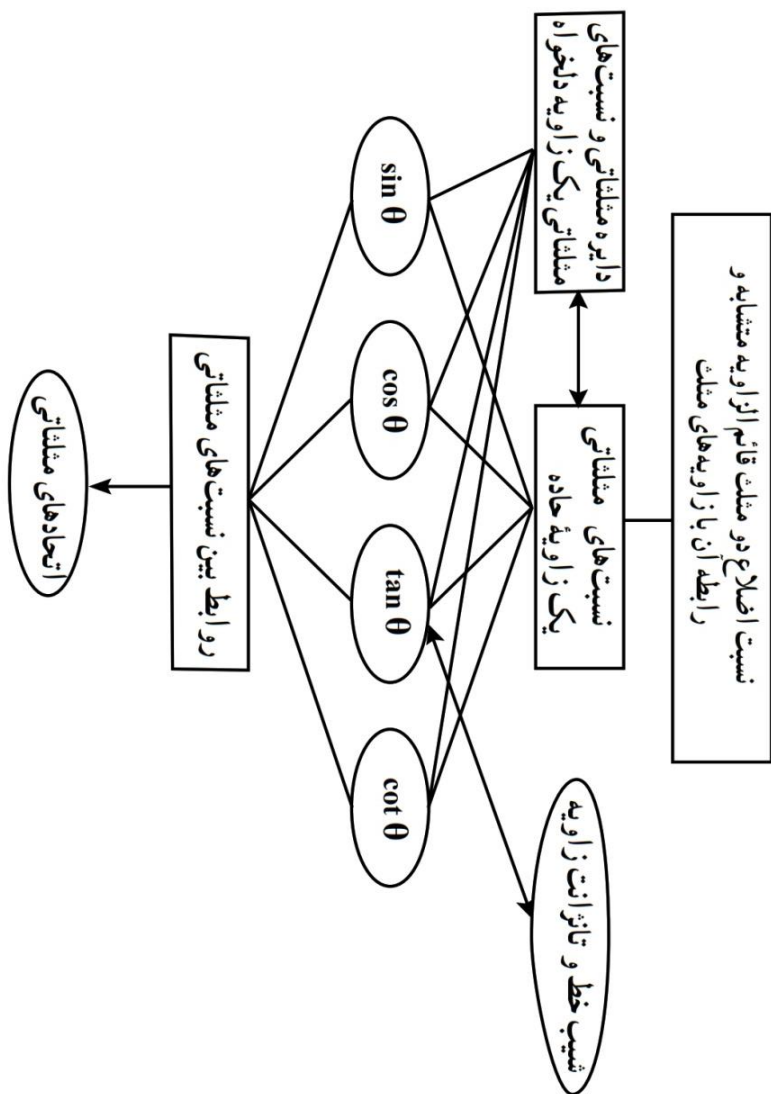
# فصل دوم

## مثلثات

درس اول : نسبت های مثلثاتی

درس دوم : دایره مثلثاتی

درس سوم : روابط مثلثاتی

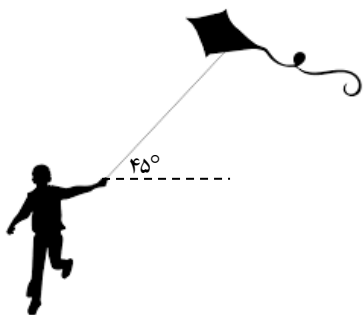


درس اول : نسبت های مثلثاتی

مسئله ۱: در شکل مقابل از لحظه ای که خلبان قصد می کند فرود بیاید و دهانه هواپیما را با زاویه ۱۳ درجه نسبت به افق پایین می آورد ، چند کیلومتر به صورت افقی طی می شود تا چرخ های هواپیما به زمین برسند ؟



مسئله ۲. علی با یک نخ ۱۰۰ متری بادبادکی را به هوا فرستاده است که این بادبادک با کف دست او زاویه ۴۵ درجه ساخته است . ارتفاع این بادبادک از دست او چقدر است ؟



مسئله ۳. نردبانی به فاصله ۲/۵ از دیوار به آن تکیه داده شده که با سطح زمین زاویه ۶۰ درجه ساخته است . فاصله نوک نردبان از زمین چقدر است ؟



می دانیم هر دو مثلث قائم الزاویه با یک زاویه تند برابر متشابه اند ( بنا به حالت ز ز ) پس در شکل زیر هر چقدر که اضلاع زاویه A را بزرگ تر کنیم ، مثلث های قائم الزاویه پدید آمده همگی با هم متشابه هستند . بنابر این :

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } A}{\text{ضلع مجاور زاویه } A} \\ \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{\text{ضلع مجاور زاویه } A}{\text{وتر}} \\ \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} \rightarrow \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } A}{\text{وتر}} \end{cases}$$

نتیجه: دیدیم که در مثلث قائم الزاویه برای زاویه معین  $A$  :

الف) نسبت طول ضلع مقابل زاویه  $A$  ، به طول وتر همواره عدد ثابتی است . این نسبت را سینوس زاویه  $A$  می نامند و آن را با  $\sin A$  نمایش می دهند .

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } A}{\text{وتر}}$$

ب) نسبت طول ضلع مجاور زاویه  $A$  ، به طول وتر همواره عدد ثابتی است . این نسبت را کسینوس زاویه  $A$  می نامند و آن را با  $\cos A$  نمایش می دهند .

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه } A}{\text{وتر}}$$

ج) نسبت طول ضلع مقابل زاویه  $A$  ، به طول ضلع مجاور آن همواره عدد ثابتی است . این نسبت را تانژانت زاویه  $A$  می نامند و آن را با  $\tan A$  نمایش می دهند .

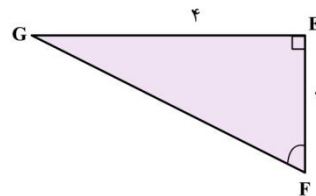
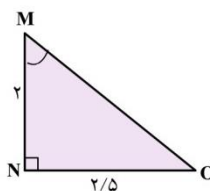
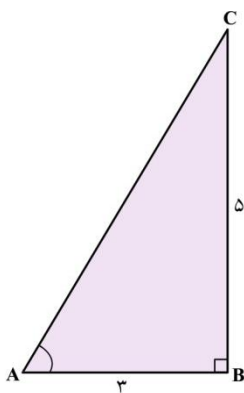
$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } A}{\text{ضلع مجاور زاویه } A}$$

د) عکس نسبت قبل یعنی ، نسبت طول ضلع مجاور زاویه  $A$  ، به طول ضلع مقابل آن را کتانژانت زاویه  $A$  می نامند و آن را با  $\cot A$  نمایش می دهند .

$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه } A}{\text{ضلع مقابل زاویه } A}$$

نتیجه:  $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$  ,  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

سوال: در هر یک از شکل های زیر جاهای خالی را پر کنید .



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$

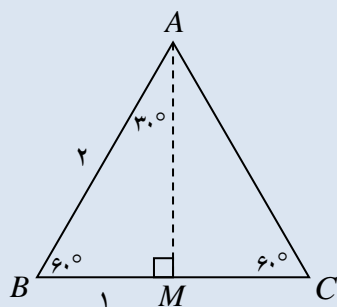


نسبت های مثلثاتی زاویه های  $۳۰^\circ, ۴۵^\circ, ۶۰^\circ$  :

گفتیم که نسبت های مثلثاتی هر زاویه ای ثابت هستند و به اندازه اضلاع مثلث بستگی ندارند ، حال می خواهیم برای سه زاویه ذکر شده ، مقدار نسبت های مثلثاتی را بدست آوریم :

با رسم مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۲ ( یا هر طول دیگر ) داریم :

$$AM = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$



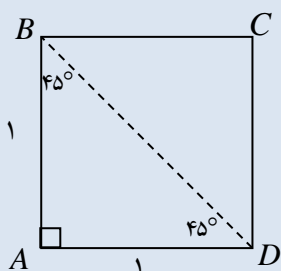
$$\sin 60^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \sqrt{3}, \quad \cot 60^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \sqrt{3}$$

با رسم مربعی به طول ضلع ۱ ( یا هر طول دیگر ) داریم :



$$AM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{1} = 1, \quad \cot 45^\circ = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{1} = 1$$

در نتیجه :

	$۳۰^\circ$	$۴۵^\circ$	$۶۰^\circ$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

سوال : مسائل اول فصل را حل کنید .

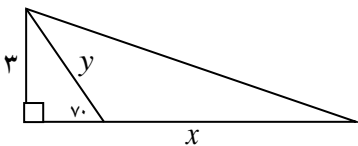
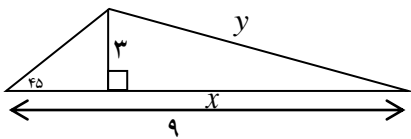
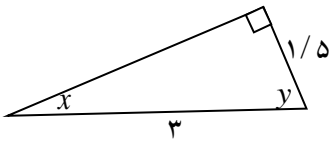
سوال : حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $\sin 30^\circ \tan 30^\circ =$

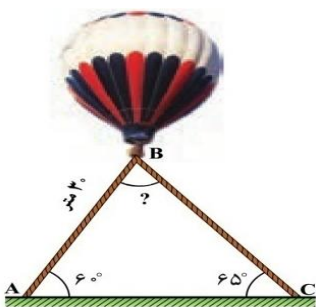
ب)  $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ =$

ج)  $2 \sin^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ =$

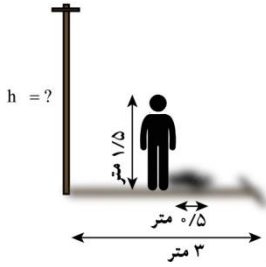
سوال : مقدار  $x, y$  را بیابید . (  $\tan 70^\circ = 2/75$  و  $\cos 70^\circ = 0/34$  و  $\sin 70^\circ = 0/94$  )



سوال : بالنی با دو طناب به صورت شکل زیر به زمین وصل شده است. طول طناب دوم را بیابید . (  $\sin 60^\circ = 0/87, \sin 65^\circ = 0/91$  )

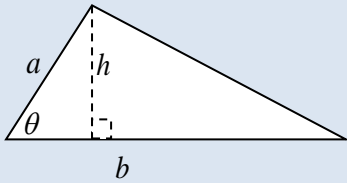


**سوال :** فردی با قد  $1/5$  متر در کنار تیر برقی ایستاده است . طول سایه شخص  $0/5$  متر و طول سایه درخت  $3$  متر است . طول درخت را حساب کنید .



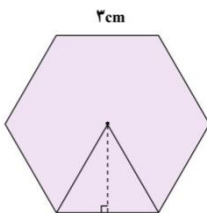
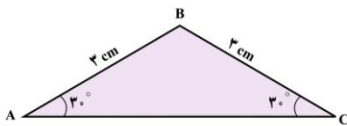
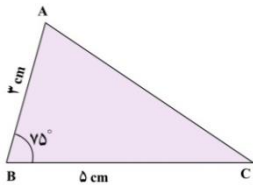
**مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه بین آن ها :**

برای یافتن مساحت مثلث می دانیم نیاز به ارتفاع داریم ولی ارتفاع داده نشده است حال هدف این است که به کمک مثلثات ارتفاع را حساب کنیم :

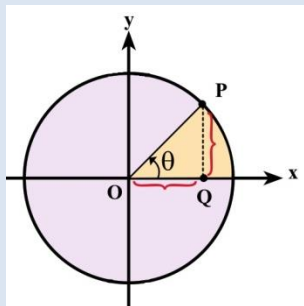


$$S = \frac{1}{2}hb \xrightarrow{\sin \theta = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin \theta} S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$

**سوال :** مساحت شکل های زیر را بیابید



درس دوم : دایره مثلثاتی



دایره مثلثاتی : دایره ای به شعاع ۱ است . که نقطه  $A$  مبدأ حرکت برای رسم زاویه است . جهت مثبت حرکت زاویه خلاف ساعت گرد و جهت منفی ، ساعت گرد است .

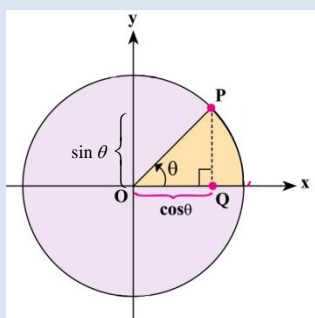
با رسم یک عمود از نقطه  $P$  به محور  $x$  مثلث قائم الزاویه ای تشکیل می شود که طول وتر آن ۱ است ، بنابر این طبق تعریف نسبت های مثلثاتی داریم :

$$\sin \theta = PQ \quad \text{و} \quad \cos \theta = OQ$$

در نتیجه :

(الف) اگر  $P$  نقطه ای روی دایره مثلثاتی باشد مختصات آن به صورت  $P(\cos \theta, \sin \theta)$

(ب) در ضمن می توان گفت همواره :  $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  ،  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$



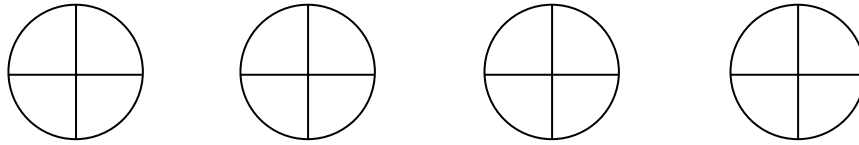
(ج) علامت نسبت های مثلثاتی در ربع های مختلف به صورت زیر خواهد بود:

	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$
ربع اول	+	+	+	+
ربع دوم	+	-	-	-
ربع سوم	-	-	+	+
ربع چهارم	-	+	-	-

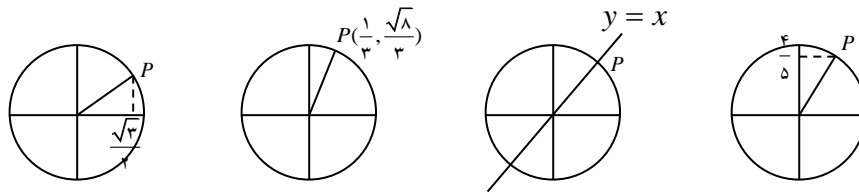
(د) با توجه به دایره مثلثاتی ، نسبت های مثلثاتی زاویه های مرزی بین ربع ها را می توان به صورت زیر نوشت :

	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	ت ن	۰	ت ن	۰
$\cot \theta$	ت ن	۰	ت ن	۰	ت ن

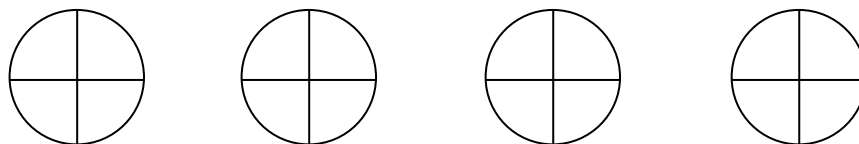
سوال : زاویه های  $۲۷۰$ ،  $۱۲۰$ ،  $-۱۳۵$ ،  $۲۲۵$  روی دایره مثلثاتی مشخص کنید .



سوال : نسبت های مثلثاتی زاویه مشخص شده را بیابید .



سوال : نسبت های مثلثاتی زاویه های  $۱۳۵$ ،  $-۲۲۵$ ،  $۳۰۰$ ،  $۱۲۰$  را با توجه به زاویه های متناظر آنها در ربع اول، بیابید .



سوال : در هر مورد  $\alpha$  در کدام ربع قرار دارد ؟

ب)  $\sin \alpha \cos \alpha < 0$

الف)  $\cos \alpha < 0, \sin \alpha > 0$

د)  $\cot \alpha, \tan \alpha$  هم علامت

ج)  $\tan \alpha \sin \alpha > 0$

سوال : اگر  $\sin \alpha = \frac{2m-3}{5}$  باشد ، حدود  $m$  را بیابید .

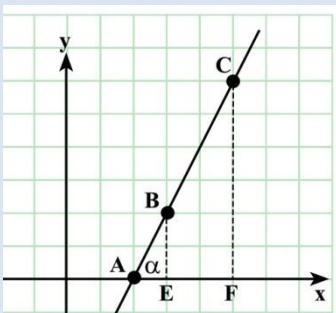
سوال : اگر  $180 < \alpha < 270$  و  $\sin \alpha = \frac{2m+1}{3}$  باشد ، حدود  $m$  را بیابید .

سوال : اگر  $90 < \alpha < 180$  و  $\cos \alpha = \frac{m-1}{2}$  باشد ، حدود  $m$  را بیابید .

سوال : حاصل عبارت زیر را بیابید .

$$\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0 + \cos 180 + 2}{\sin 270 \cdot \cos^2 180 + \cos 90}$$

رابطه شیب خط با تانژانت :



در سال های گذشته با داشتن دو نقطه از خط دیدیم که شیب خط به

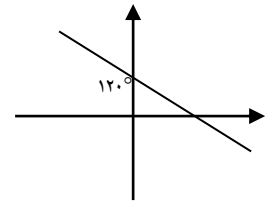
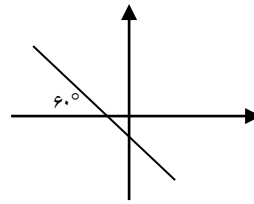
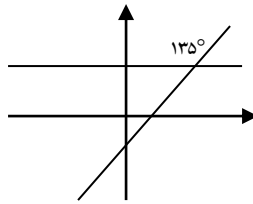
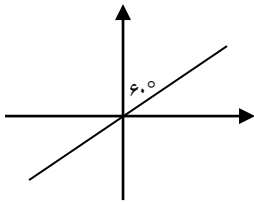
$$m = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{BE}{AE} \quad \text{صورت مقابل بدست می آید :}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه}}{\text{ضلع مجاور زاویه}} = \frac{BE}{AE} \quad \text{از طرفی طبق تعریف تانژانت داریم :}$$

بنابر این می توان گفت :

اگر خطی با جهت مثبت محور  $x$  زاویه  $\alpha$  بسازد ، آنگاه شیب خط برابر است با :  $m = \tan \alpha$

سوال : شیب خط های زیر را بیابید .



سوال : هرکدام از خط های زیر با راستای مثبت محور ، چه زاویه ای می سازد ؟

$$\sqrt{3}y - 3x + 1 = 0 \quad \text{ج}$$

$$\sqrt{3}y - x = 1 \quad \text{ب}$$

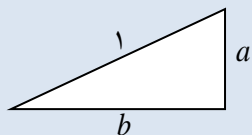
$$x + y = 2 \quad \text{الف}$$

سوال : معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $(0, 3)$  گذشته و با راستای مثبت محور  $x$  زاویه  $60^\circ$  درجه بسازد .سوال : معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $(-2, 3)$  گذشته و با راستای مثبت محور  $x$  زاویه  $45^\circ$  درجه بسازد .

## درس سوم : روابط مثلثاتی

دیدیم که برای هر زاویه معین نسبت های مثلثاتی ثابت است و به طول اضلاع زاویه بستگی ندارد .

پس با رسم یک مثلث قائم الزاویه به طول وتر ۱ و با کمک قضیه فیثاغورس داریم :



$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta = a \\ \cos \theta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta \\ 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \end{cases}$$

به راحتی با تقسیم دو طرف رابطه بالا در  $\cos^2 \theta$  و  $\sin^2 \theta$  به ترتیب به فرمول های زیر می رسیم :

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \boxed{1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}}$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \boxed{1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}}$$

سوال : اگر  $\sin \alpha = \frac{5}{7}$  و  $\alpha$  ربع دوم باشد ، نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه  $\alpha$  را حساب کنید .

سوال : اگر  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$  و  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  باشد ، نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه  $\alpha$  را حساب کنید .

سوال : اگر  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$  و  $\alpha$  ربع سوم باشد ، نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه  $\alpha$  را حساب کنید .



سوال : درستی روابط زیر را بررسی کنید .

الف)  $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ب)  $(\frac{1}{\cos x} + \tan x)(1 - \sin x) = \cos x$

ج)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

د)  $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

ه)  $\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

و)  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

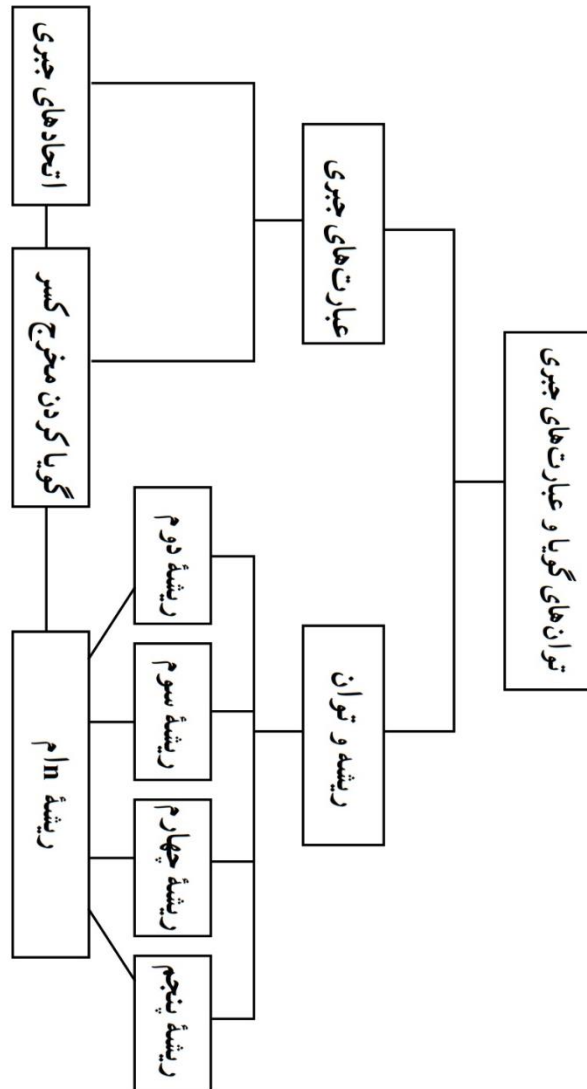
ز)  $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

# فصل سوم

## توان گویا و عبارت جبری

درس اول : ریشه  $n$  ام و توان گویا

درس دوم : عبارت های جبری



درس اول: ریشه  $n$  ام و توان گویا

ریشه  $n$  ام عدد  $a$  : عددی مانند  $x$  که اگر به توان  $n$  برسد، حاصل  $a$  شود ( $x^n = a$ ) را ریشه  $n$  ام عدد  $a$  می نامند.

با این تعریف می توان نتیجه گرفت مثلاً :

ریشه سوم ۲۷ برابر ۳ و ریشه پنجم ۳۲- برابر ۲- است.

ریشه چهارم ۱۶ چیست ؟ ..... ریشه دوم ۲۵ چطور ؟ ..... ریشه دوم ۴- چطور ؟ .....

نتیجه :

۱. اعداد مثبت ..... مرتبه زوج دارند .

۲. اعداد منفی ریشه مرتبه زوج .....  
.....

ریشه سوم عدد ۵ را بنویسید : .....

ریشه های دوم عدد ۵ را بنویسید : .....

نتیجه :

رادیکال با فرجه زوج ، فقط ریشه ..... یک عدد را نشان می دهد .

سوال : حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) ریشه ششم ۶۴ (ب) ریشه سوم ۶۴- (ج) ریشه چهارم ۸۱- (د) ریشه سوم ۰/۰۰۱

سوال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید .

$$\text{ج) } \sqrt[3]{256} =$$

$$\text{ب) } \sqrt[4]{0/0016} =$$

$$\text{الف) } \sqrt[3]{\frac{-64}{125}} =$$

$$\text{ح) } \sqrt[3]{-1} =$$

$$\text{د) } \sqrt[5]{-0/00032} =$$

$$\text{د) } \sqrt[5]{243} =$$

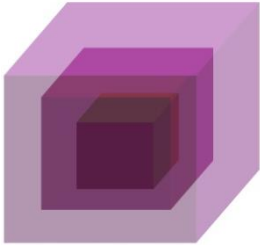
یافتن حدود رادیکال  $\sqrt[n]{a}$  : دو عدد صحیح متوالی مانند  $c, b$  را می یابیم که  $b^n < a < c^n$  در این صورت  $b < \sqrt[n]{a} < c$

سوال : در جاهای خالی دو عدد صحیح متوالی قرار دهید .

لف)  $\square < \sqrt{7} < \square$       ب)  $\square < \sqrt{10} < \square$       ج)  $\square < \sqrt[3]{20} < \square$       د)  $\square < \sqrt[4]{650} < \square$

سوال : حجم مکعب بیرونی ۶۴ و حجم مکعب بیرونی ۲۷ است . طول ضلع مکعب

میانی چه عددی می تواند باشد ؟



مقایسه مقدار رادیکال  $a$  با فرجه های مختلف :

الف) اگر  $a > 1$  : آنگاه با افزایش فرجه، مقدار رادیکال کوچک تر می شود :

$$2 > \sqrt{2} > \sqrt[3]{2} > \sqrt[4]{2} > \dots$$

ب) اگر  $a > 1$  : آنگاه با افزایش فرجه، مقدار رادیکال بزرگ تر می شود :

$$0.2 < \sqrt{0.2} < \sqrt[3]{0.2} < \sqrt[4]{0.2} < \dots$$

ج) اگر  $a < -1$  : آنگاه با افزایش فرجه ( فقط فرجه فرد ) مقدار رادیکال بزرگ تر می شود :

$$-2 < \sqrt[3]{-2} < \sqrt[5]{-2} < \dots$$

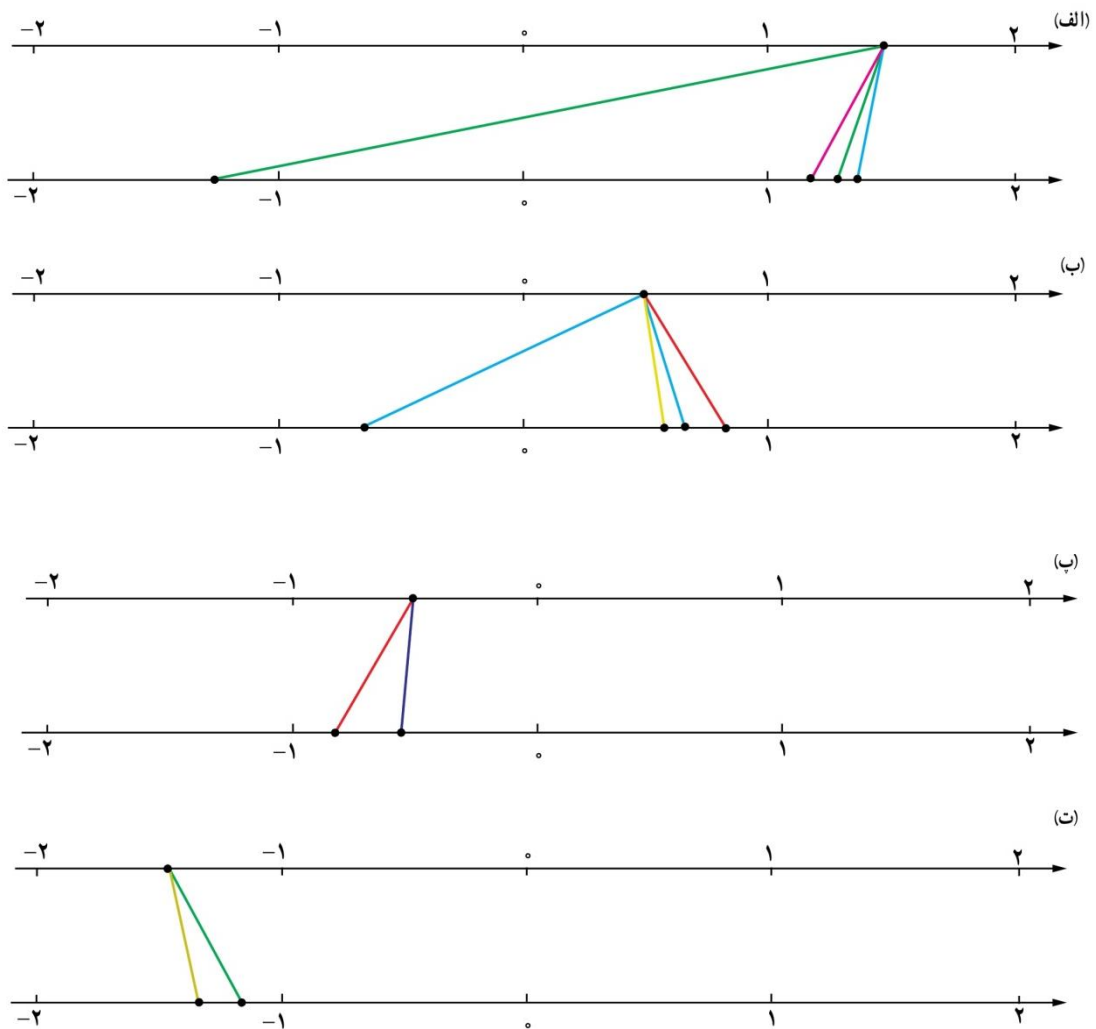
د) اگر  $a < -1$  : آنگاه با افزایش فرجه ( فقط فرجه فرد ) مقدار رادیکال کوچک تر می شود :

$$-0.2 > \sqrt[3]{-0.2} > \sqrt[5]{-0.2} > \dots$$

سوال : علامت  $<$  یا  $>$  را قرار دهید .

الف)  $\sqrt[3]{8} \square \sqrt[5]{8}$       ب)  $\sqrt[5]{-0.2} \square \sqrt[3]{-0.2}$       ج)  $\sqrt{0.25} \square \sqrt[3]{8}$       د)  $\sqrt{-9} \square \sqrt[3]{-9}$

سوال : ریشه سوم و چهارم و پنجم عدد  $a$  را در محور زیر با  $r_3, r_4, r_5$  نمایش دهید .



قواعد رادیکال ها :

- (۱) برای  $n$  فرد همواره  $\sqrt[n]{a^n} = a$  است .  
 (۲) برای  $n$  زوج همواره  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$  است .  
 (۳) برای  $n$  فرد همواره  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$  است .  
 (۴) برای  $n$  زوج فقط با شرط  $a \geq 0$  ;  $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$  است .

(۵و۴) اگر رادیکال ها تعریف شده باشد :  
 $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$  ,  $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$   
 (۷و۶) اگر رادیکال ها تعریف شده باشد :  
 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$  ,  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$

سوال : عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید .

$$\sqrt[4]{(-2)^4} =$$

$$\sqrt[4]{-2^4} =$$

$$\sqrt[3]{5^{-3}} =$$

$$(\sqrt[3]{2})^3 =$$

$$\sqrt[4]{16^5} =$$

$$\sqrt[5]{\left(\frac{-1}{32}\right)^2} =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} =$$

$$\sqrt[3]{125 \times 64} =$$

$$\sqrt{9x^2} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} =$$

$$\sqrt{1 + \frac{9}{16}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{2}} =$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2}} =$$

$$\sqrt[3]{2^6} =$$

$$\sqrt[3]{(-3)^{12}} =$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} =$$

توان گویا :

مسأله : اگر یک گرم از باکتری در آزمایشگاه داشته باشیم که در هر یک ساعت وزن آن دو برابر شود ، بعد از سه ساعت و نیم وزن آن چقدر خواهد بود ؟

رابطه توان گویای یک عدد مثبت با رادیکال :

اگر  $a$  عدد مثبتی باشد داریم :  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  و توجه شود که ما برای اعداد منفی توان گویا تعریف نمی کنیم زیرا به مشکلاتی مانند مثال زیر بر می خوریم :

اگر تعریف کنیم  $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}$  و  $(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2}$  چون  $(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}}$  پس  $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[6]{(-1)^2}$  در نتیجه : یعنی  $-1 = 1$

سوال : عبارات های زیر را به شکل رادیکال ساده شده بنویسید .

$$81^{\frac{1}{4}} =$$

$$5^{\frac{2}{7}} =$$

$$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{2}{4}} =$$

$$\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}} =$$

سوال : به شکل رادیکال با توان گویای ساده شده بنویسید .

$$\sqrt[5]{64} =$$

$$\sqrt[4]{3^2} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{(0.01)^3}} =$$

$$\frac{64}{\sqrt[5]{16}} =$$

## درس دوم : عبارت های جبری

**اتحاد :** یک تساوی از عبارت های جبری که به ازای هر عددی برقرار باشد را اتحاد می گویند .

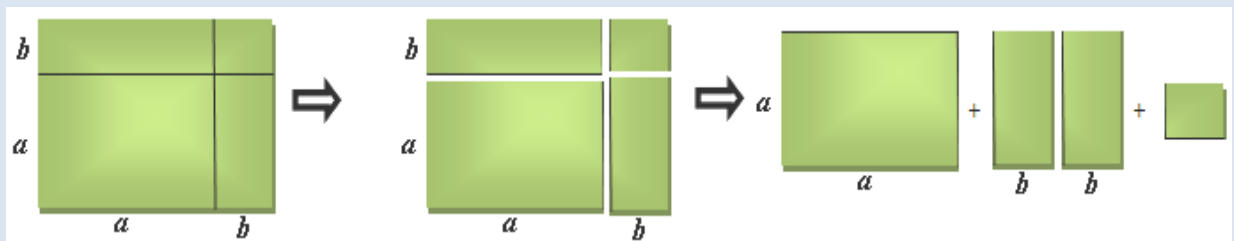
( توجه : معادله یک تساوی از عبارت های جبری است که به ازای مقادیر خاصی برقرار است که آن مقادیر جواب معادله هستند )

$$\begin{cases} (a+b)^p = a^p + 2ab + b^p \\ (a-b)^p = a^p - 2ab + b^p \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله ای :

بیان فارسی : اولی به توان دو ، دو برابر اولی در دومی ، دومی به توان دو .

بیان هندسی :



مثال :

الف)  $(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 1 + (1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

ب)  $(3a-2)^2 = (3a)^2 + 2 \times (3a) \times (-2) + (2)^2 = 9a^2 - 12a + 4$

**سوال :** با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(2x+1)^2 =$

ب)  $(x + \frac{1}{x})^2 =$

ج)  $(2-3x)^2 =$



د)  $(x + \sqrt{۳})^p =$

ه)  $(۲ + x^۳)^p =$

سوال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف)  $(۲a - \dots)^p = \dots - \dots + \frac{1}{۴}$

ب)  $(\dots + \sqrt{۵})^p = ۹x^p + \dots + \dots$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف)  $۹۹^p =$

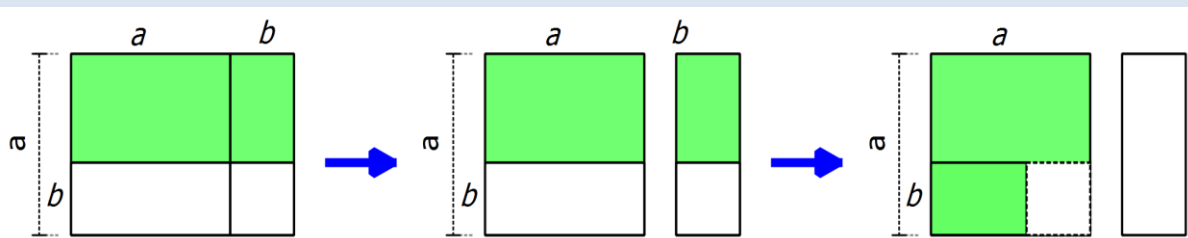
ب)  $۱۰۲^p =$

$$(a - b)(a + b) = a^p - b^p$$

اتحاد مزدوج :

بیان فارسی : اولی به توان دو ، منهای ، دومی به توان دو .

بیان هندسی :



مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(x - ۴)(x + ۴) = (x)^p - (۴)^p = x^p - ۱۶$

ب)  $(a - \sqrt{۳})(a + \sqrt{۳}) = (a)^p - (\sqrt{۳})^p = a^p - ۳$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(p - 4x)(p + 4x) =$

ب)  $(x^p + \frac{1}{p})(x^p - \frac{1}{p}) =$

ج)  $(\sqrt{3x} + 1)(\sqrt{3x} - 1) =$

د)  $(px^p + y^p)(px^p - y^p) =$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف)  $99 \times 101 =$

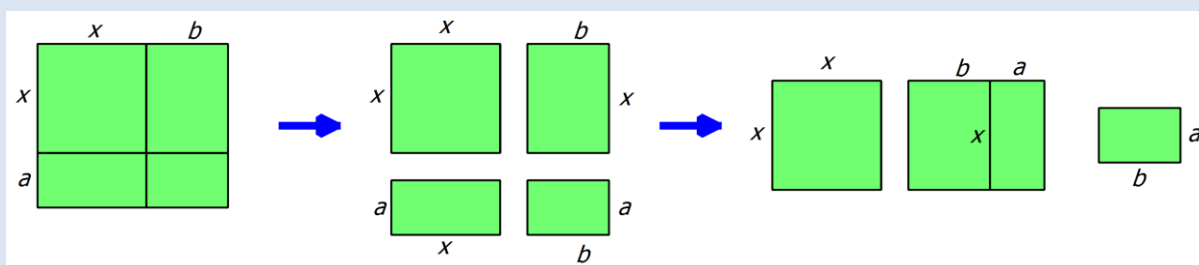
ب)  $1005 \times 995 =$

ج)  $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) =$

اتحاد جمله مشترک :  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

بیان فارسی : مشترک به توان دو ، مجموع غیر مشترک در مشترک ، ضرب غیر مشترک .

بیان هندسی :



مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(x - 1)(x + 4) = (x)^2 + (-1 + 4)(x) + (-1)(4) = x^2 + 3x - 4$

ب)  $(2a + 3)(2a + 5) = (2a)^2 + (3 + 5)(2a) + (3)(5) = 4a^2 + 14a + 15$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(\mathfrak{w} + \mathfrak{v}x)(\mathfrak{w} + \mathfrak{v}x) =$

ب)  $(x^{\mathfrak{p}} + \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{v}})(x^{\mathfrak{p}} - \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{v}}) =$

ج)  $(\mathfrak{v}x + \frac{1}{\mathfrak{p}})(\mathfrak{v}x - \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{w}}) =$

د)  $(\mathfrak{v} - \mathfrak{w}x)(\mathfrak{v} - x) =$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف)  $98 \times 101 =$

ب)  $102 \times 103 =$

$$\begin{cases} (a-b)(a^{\mathfrak{p}} + ab + b^{\mathfrak{p}}) = a^{\mathfrak{w}} - b^{\mathfrak{w}} \\ (a+b)(a^{\mathfrak{p}} - ab + b^{\mathfrak{p}}) = a^{\mathfrak{w}} + b^{\mathfrak{w}} \end{cases} \quad \text{اتحاد چاق و لاغر :}$$

بیان فارسی : اولی به توان سه ، دومی به توان سه.

توجه مهم : قسمت چاق این اتحاد از روی قسمت لاغر ساخته شده :

$$(\Delta - 0) \overset{\text{قرینه}}{\left( \Delta^{\mathfrak{p}} + \Delta 0 + 0^{\mathfrak{p}} \right)}$$

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(\mathfrak{v}x - 1)(\mathfrak{v}x^{\mathfrak{p}} + \mathfrak{v}x + 1) = (\mathfrak{v}x)^{\mathfrak{w}} + (-1)^{\mathfrak{w}} = \mathfrak{v}^{\mathfrak{w}}x^{\mathfrak{w}} - 1$

ب)  $(a + \mathfrak{w}b)(a^{\mathfrak{p}} - \mathfrak{w}ab + b^{\mathfrak{p}}) = (a)^{\mathfrak{w}} + (\mathfrak{w}b)^{\mathfrak{w}} = a^{\mathfrak{w}} + \mathfrak{w}^{\mathfrak{w}}b^{\mathfrak{w}}$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(px^p + y^p)(14x^p - 2x^p y^p + y^p) =$

ب)  $(x - \frac{1}{x})(x^p + \frac{1}{x^p} + 1) =$

ج)  $(\mu + \nu x)(9 - 4x + 14x^p) =$

د)  $(\sqrt[p]{x} - 1)(\sqrt[p]{x^p} - \sqrt[p]{x} + 1) =$

سوال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف)  $(\dots + 1)(x^p - \dots + \dots) = x^p + \dots$

ب)  $(\nu x + \frac{1}{\mu})(\dots - \dots + \dots) = \dots + \frac{1}{\lambda}$

ج)  $(\mu x - \dots)(\dots + \dots + 14) = \dots - \dots$

$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

اتحاد مکعب دو جمله ای :

بیان فارسی : اولی به توان سه ، سه برابر مربع اولی در دومی ، سه برابر اولی در مربع دومی ، دومی به توان سه .

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(\nu a + 1)^3 = (\nu a)^3 + 3(\nu a)^2(1) + 3(\nu a)(1)^2 + (1)^3 = \lambda a^3 + 12a^2 + 6a + 1$

ب)  $(x - \nu)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(-\nu) + 3(x)(-\nu)^2 + (-\nu)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(2-4x)^3 =$

ب)  $(x + \frac{1}{3})^3 =$

ج)  $(x^2 + 2)^3 =$

سوال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف)  $(\dots + 1)^3 = 8x^3 + \dots + \dots + \dots$

ب)  $(\dots - \dots)^3 = 64 - \dots + \dots - x^3$

سوال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف)  $99^3 =$

ب)  $52^3 =$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab + 3ac + 3bc$$

اتحاد مربع سه جمله ای :

بیان فارسی : مربع اولی و دومی و سومی ، دو برابر اولی و دومی ، دو برابر اولی و سومی ، دو برابر دومی و سومی .

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(2 + x + 3y)^3 = (2)^3 + (x)^3 + (3y)^3 + 3(2)(x) + 3(2)(3y) + 3(x)(3y) = 8 + x^3 + 27y^3 + 12x + 18y + 18xy$

ب)  $(a - 3 - b)^3 = (a)^3 + (-3)^3 + (-b)^3 + 3(a)(-3) + 3(a)(-b) + 3(-3)(-b) = a^3 + 27 + b^3 - 9a - 3ab + 9b$

سوال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف)  $(1 - 2x + x^2)^3 =$

$$\text{ب) } (x - y - \frac{1}{p})^p =$$

سوال : حاصل  $۱۲۳^p$  را به کمک اتحاد مربع سه جمله ای بیابید .

تجزیه : تبدیل یک عبارت جبری به حاصل ضرب عبارت های ساده تر .

روش های تجزیه کردن به صورت های زیر هستند که ممکن است برای تجزیه یک عبارت چند روش ترکیب شوند .

### روش اول (فاکتور گیری)

در صورتی که همه عبارات دارای عدد یا حروف مشترکی باشند ، آن عدد و حروف مشترک با کمترین توان را به عنوان فاکتور مشترک نوشته و جلوی آن پرانتزی باز می کنیم و تک تک عبارات را بر فاکتور مشترک تقسیم کرده و به ترتیب درون پرانتز می نویسیم .

$$۳a^p b + ۱۲ab^p + ۴a^p b^p = ۳ab(a + ۴b + ۲ab)$$

$$۲x^y + x^o = x^o(۲x^y + ۱)$$

### روش دوم (به کمک اتحاد)

الف) در صورتی که دو جمله ای داشته باشیم که جملات مربع باشند و بین جملات منفی باشد ، از اتحاد مزدوج برای تجزیه استفاده می شود .

$$۴x^p - ۱ = (۲x - ۱)(۲x + ۱)$$

$$x^p - ۹y^p = (x - ۳y)(x + ۳y)$$

ب) در صورتی که دو جمله ای داشته باشیم که جملات مکعب باشند از اتحاد چاق و لاغر برای تجزیه استفاده می شود .

$$۸x^m + ۱ = (۲x + ۱)(۴x^p - ۲x + ۱)$$

$$x^m - ۲۷y^m = (x - ۳y)(x^p + ۳xy + ۹y^p)$$

ج) در صورتی که سه جمله ای درجه دوم داشته باشیم از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه استفاده می کنیم .

حالت اول : ضریب جمله درجه دوم ، مربع کامل باشد.

$$x^p + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

$(x)^p \quad p+3 \quad p \times 3$

$$14x^p + 8x - 15 = (4x + 5)(4x - 3)$$

$(4x)^p \quad p(4x) \quad 5 \times -3$   
 $5-3$

$$4x^p - 12x - 9 = (2x - 3)(2x - 3) = (2x - 3)^p$$

$(2x)^p \quad -6(2x) \quad -3 \times -3$   
 $-3-3$

حالت دوم : ضریب جمله درجه دوم مربع کامل نباشد ( یا با روش قبلی تجزیه نشود )

$$px^p + 5x + 6 = \frac{p(x+1)(px+3)}{p} = (x+1)(px+3)$$

$\begin{matrix} \times \\ \swarrow \quad \searrow \\ px^p + 5x + 6 \end{matrix}$

$$4x^p + 7x - 15 = \frac{4(x+2)(4x-1)}{4} = (x+2)(4x-1)$$

$\begin{matrix} \times \\ \swarrow \quad \searrow \\ 4x^p + 7x - 15 \end{matrix}$

روش سوم ( دسته بندی )

ممکن است برای تجزیه یک عبارت لازم باشد ابتدا جملات مناسب را در کنار هم قرار دهیم تا بتوانیم به کمک ترکیب روش های قبلی آن عبارت را تجزیه کنیم .

$$a^p - \underline{pab} + \underline{a^p b} - \underline{pb^p} = a^p(a+b) - pb(a+b) = (a+b)(a^p - pb)$$

سوال : عبارات زیر را تا حد ممکن تجزیه کنید .

$$pa^p b + 4a^p b^p + 8a^p b^p =$$

$$x^{\wedge} + x^{\diamond} =$$

$$x^{\text{m}} + 5x^{\text{p}} + 4x =$$

$$x^{\text{p}} - 44 =$$

$$4x^{\diamond} - x^{\text{m}} =$$

$$x^{\text{f}} - 1 =$$

$$4x^{\wedge} - 25x^{\zeta} =$$

$$x^{\zeta} - 81 =$$

$$2x^{\text{m}} - 54 =$$

$$x^{\zeta} + 8 =$$

$$27x^{\diamond} + 8x^{\text{p}} =$$

$$x^{\text{p}} + 7x + 10 =$$

$$4x^{\text{p}} + 12x + 9 =$$

$$x^{\text{p}} - x - 20 =$$

$$9x^{\text{p}} - 20x + 25 =$$

$$x^{\text{f}} + 2x^{\text{p}} + 1 =$$

$$2x^{\text{p}} - x - 4 =$$

$$2x^{\text{f}} + 4x^{\text{p}} + 1 =$$

سوال: اگر  $a + b = 5$ ,  $a^{\wedge} + b^{\zeta} = 17$  آنگاه مقدار  $ab$  را بیابید.



سوال : کسر های زیر را ساده کنید .

$$\frac{x^r - 1}{x^r - 1} =$$

$$\frac{x^r + 1}{x^r - 1} =$$

$$\frac{y^r - y}{y^r + y^r + y} =$$

$$\frac{x^r - x - 12}{x^r - 5x - 6} =$$

$$\frac{x^r - 1}{(x - 1)^r} =$$

نکته : عبارتی مانند  $\sqrt{2}(a+b)$  مضرب  $a+b$  محسوب نمی شود زیرا ضرب عددی باید صحیح باشد . و همچنین  $a+b$  شمارنده ( مقسوم علیه ) عبارت  $\sqrt{2}(a+b)$  محسوب نمی شود .

سوال: عبارت  $27a^3 - 1$  مضرب کدام یک از عبارت های زیر است ؟

الف )  $a-1$       ب)  $3a-1$       ج)  $3a+1$       د)  $9a^2 + 3a + 1$

سوال : دو عبارت بنویسید که  $a-b$  شمارنده آنها باشد .

گویا کردن مخرج کسر : تلاش برای از بین بردن عبارت های رادیکالی در مخرج کسر است که به سه حالت اتفاق می افتد

الف) مخرج با یک جمله رادیکالی : که کفایست صورت و مخرج در عبارتی ضرب شود تا توان عبرت زیر رادیکال با فرجه رادیکال برابر شود :

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{1 \times \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

ب) مخرج شامل چند جمله است : کفایست سعی کنیم با ضرب عبارت مناسب در صورت و مخرج ، در مخرج یک اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر ایجاد کنیم .

مثال :

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow \frac{1 \times (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1 \times (1-\sqrt{x}+\sqrt{x^2})}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}+\sqrt{x^2})} = \frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x^2}}{1+x}$$

سوال : عبارت های زیر را گویا کنید .

$$\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} =$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+1} =$$

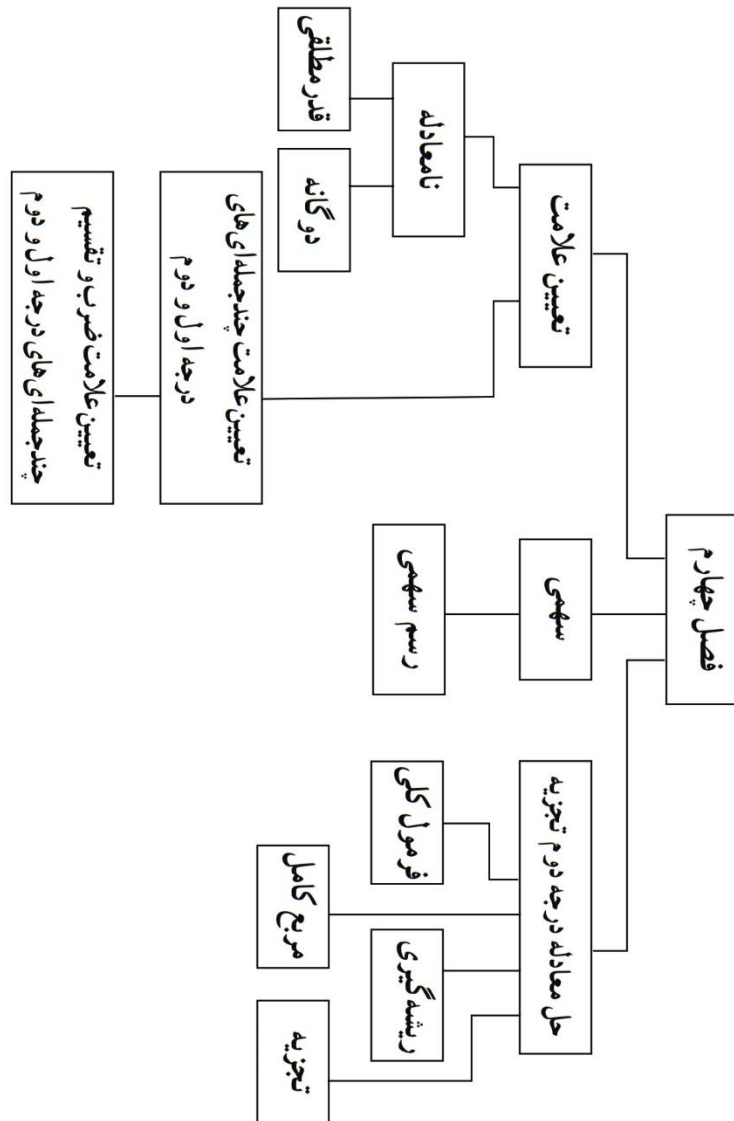
# فصل چهارم

## معادلات و نامعادلات

درس اول : حل معادله درجه دوم

درس دوم : مسئله

درس سوم : تعیین علامت



## درس اول : حل معادله درجه دوم

معادله درجه دوم : معادله ای که پس از ساده شدن به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  در بیاید که  $a \neq 0$

روش های حل معادله درجه دوم :

۱. روش تجزیه : تمام عبارت را به یک سمت آورده و آن را تجزیه می کنیم تا به صورت حاصل ضرب چند عامل تبدیل شود و از آنجایی که « وقتی حاصل ضرب چند عبارت صفر شود ، حداقل یکی از آن عبارت ها صفر است » پس کفایت تک تک عامل ها را برابر صفر قرار دهیم و جواب ها را بدست آوریم .

سوال : معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید .

$$x^2 - 10x - 16 = 0$$

$$2z^2 - z = 2z + 2$$

$$5a^2 = 20$$

$$2x^2 - x = 0$$

$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$

ii. روش ریشه زوج: در این روش باید در یک طرف تساوی یک عبارت مربع کامل و در طرف دیگر یک عدد مثبت وجود داشته باشد سپس می توانیم از نکته «  $A^2 = k \Rightarrow A = \pm k$  » استفاده کنیم و معادله را حل کنیم.

سوال: معادلات زیر را به روش ریشه زوج حل کنید.

$$(x - 1)^2 = 25$$

$$2x^2 - 3 = 13$$

$$(x + 1)(x - 5) = 5 - 4x$$

$$(x^2 - 1)^2 = 64$$

iii. روش مربع کامل کردن:

الف) روش اول: می توان با اضافه و کم کردن عبارت آن را مربع کامل کرد

مثال:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 - 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 4 \dots$$

$$4x^2 + 8x + 1 = 0 \Rightarrow \underbrace{4x^2 + 8x + 4}_{(2x)^2 + 4(2x) + 4} - 4 - 4 + 1 = 0 \Rightarrow (2x + 2)^2 = 3 \dots$$

ب) روش دوم: کفایت کل عبارت را بر ضریب  $x^2$  تقسیم کنیم تا ضریب از بین برود سپس مانند زیر عمل کنیم:

$$x^2 + dx + e = 0$$

↓ نصف

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + e = 0 \Rightarrow \dots$$

↑ توان دو

منفی ثابت است

سوال : معادلات زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید. ( هر دو روش را امتحان کنید )

$$x^2 - 6x = 7$$

$$9x^2 + 6x - 15 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

IV. روش کلی دلتا : بیایید یکبار برای همیشه یک معادله درجه دوم را مربع کامل کنیم و فرمولی کلی بدست آوریم :

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{+a} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \longrightarrow \begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

پس برای حل هر معادله درجه دومی اگر مقدار دلتا را به صورت  $\Delta = b^2 - 4ac$  حساب کنیم و در فرمول  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  قرار

دهیم به جواب معادله می‌رسیم . حالا بگویید در چه صورتی معادله جواب ندارد ؟ در چه صورتی فقط یک جواب دارد ؟

سوال : معادلات زیر را به روش دلتا ( فرمول کلی ) حل کنید .

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}a = 9$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

مسائل زیر را به کمک معادله حل کنید .

سوال : مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۰۲ است . این دو عدد را بیابید .

سوال : مجموع مربعات دو عدد زوج متوالی ۱۰۰ است . این دو عدد را بیابید .



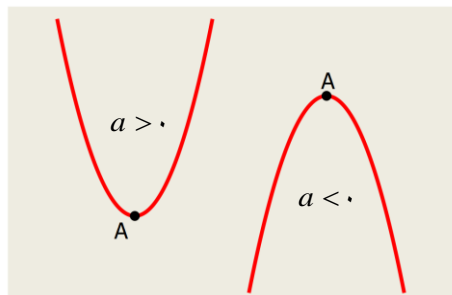
**سوال :** طول مستطیلی از ۳ برابر عرض آن ۲ واحد بیشتر است . اگر مساحت این مستطیل ۱۶۱ باشد . طول مستطیل را بیابید .

**سوال :** اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۵ سال است . اگر ۳ سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۳۰۰ باشد سن هر کدام چقدر است ؟

تمرین : مسائل صفحه ۷۷ را به انجام دهید .

### درس دوم : سهمی

**سهمی :** هر تابع به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  را سهمی می نامند که در حالت کلی نمودار آن به یکی از حالت های زیر است :



مراحل رسم سهمی :

۱ . بدست آوردن مقدار  $x = \frac{-b}{2a}$

۲ . جایگذاری مقدار بدست آمده قبلی در تابع و یافتن  $y$  آن .

۳ . نوشتن مختصات راس سهمی به صورت  $A(x, y)$

۴ . قرار دادن دو  $x$  دلخواه دیگر در تابع و یافتن  $y$  آنها که بهتر این دو  $x$  را با فاصله های مساوی در طرفین  $x$  ای که در مرحله اول حساب کردیم انتخاب کنیم تا رسم ساده تر شود .

سوال : سهمی های زیر را رسم کنید .

$$y = -2x^2 + 4x - 3$$

$$y = 2x^2 + 1$$

$$y = 2x^2 + x$$

$$y = -2(x - 3)^2 - 4$$

سوال : نمودار سهمی  $y = x^2 - 2x - 3$  محور طول ها و عرض ها را در چه نقاطی قطع می کند ؟

سوال: نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  محور  $y$  را در ۲ و محور طول ها را در ۱ و ۲- قطع می کند. معادله سهمی را بنویسید.

سوال: تویی با معادله  $y = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$  از زمین شلیک می شود. حداکثر ارتفاع توپ و حداکثر برد (فاصله تا محل شلیک) چقدر است؟

### درس سوم: تعیین علامت

**تعیین علامت:** گاهی اوقات نیاز داریم که علامت یک عبارت جبری را در محدوده های مختلف متغیر تعیین کنیم، به مثال زیر توجه کنید:

شرکتی ۲۰ میلیون تومان هزینه ثابت حقوق کارگر و قبض برق و آب و ... و به ازای تولید هر کالا نیز باید مبلغ ۲۰۰ هزار تومان هزینه مواد اولیه بپردازد. اگر هر کالا به قیمت ۴۰۰ هزار تومان فروخته شود می خواهیم بدانیم این شرکت حداقل چقدر کالا باید تولید کند تا به سود دهی برسد؟

حل: اگر تعداد کالای تولید شده را  $x$  در نظر بگیریم داریم:

هزینه ها  $200000x + 2000000$

درآمد  $400000x$

$$\Rightarrow \text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} = 200000x - 2000000$$

سوال: اگر ۵۰ عدد کالا تولید شود سود چقدر خواهد بود؟ معنی آن چیست؟

سوال: اگر ۱۰۰ عدد کالا تولید شود سود چقدر خواهد بود؟ معنی آن چیست؟

سوال: اگر ۱۵۰ عدد کالا تولید شود سود چقدر خواهد بود؟ معنی آن چیست؟

تعیین علامت عبارت درجه اول :

$x$	$x_1$	
$ax + b$	مخالف علامت $a$	موافق علامت $a$

تعیین علامت عبارت درجه دوم :

الف) با دو ریشه :

$x$	$x_1$	$x_2$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت $a$	مخالف علامت $a$

ب) با یک ریشه :

$x$	$x_1$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت $a$

ج) بدون ریشه :

$x$	
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت $a$

سوال : عبارت های زیر را تعیین علامت کنید .

$$y = (2x - 1)(3 - x)$$

$$y = \frac{x - 1}{5 - 2x}$$

$$y = (x^2 - 9)(x - 1)^2$$

$$y = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$$

$$y = \frac{4x - x^2}{x - 1}$$

انواع نامعادله و روش های حل آنها :

(۱) نامعادلات درجه اول ساده : معلوم یک طرف و مجهول به سمت دیگر برده شده و پس از ساده شدن دو طرف را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم . فقط توجه داشته باشید که اگر ضریب مجهول منفی باشد جهت نامساوی تغییر می کند .

سوال : نامعادلات زیر را حل کنید .

$$5x - 1 > 3x - 7$$

$$2x + 4 \leq 7x + 1$$

(۲) نامعادلات درجه اول دوگانه: اگر طرفین نامساوی عدد باشد در این صورت می توان با اضافه و کم کردن یا ضرب و تقسیم کردن عدد های مناسب در کل عبارت، کاری کرد که  $x$  در وسط نامساوی ها تنها بماند و جواب را بیابیم. و اگر طرفین نامساوی دارای مجهول بود باید نامعادلات را جدا کرده و حل کنیم.

سوال: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$-2 < 3x - 1 \leq 8$$

$$-1 < \frac{5-x}{2} < 3$$

$$1 \leq \frac{2x-3}{5} < 3$$

$$x+1 < 5-x < 2x+3$$

(۳) نامعادلات قدر مطلق: اگر قدر مطلق کوچک تر از عدد مثبت باشد، نامعادله دو گانه ایجاد می شود و اگر بزرگ تر از عدد مثبت باشد دو نامعادله ساده ایجاد می شود.

$$|U| < a \longrightarrow -a < U < a$$

$$|U| > a \longrightarrow \begin{cases} U > a \\ U < -a \end{cases}$$

سوال : نامعادلات زیر را حل کنید .

$$|x - 3| < 2$$

$$|2x - 3| \geq 7$$

$$\left| \frac{x}{3} + 1 \right| < \frac{2}{3}$$

$$|5 - 2x| \geq 1$$

۴) نامعادلات گویا : همه عبارت را به یک سمت برده سپس تعیین علامت می کنیم .

سوال : نامعادلات زیر را حل کنید .

$$-x^2 + 2x > 2 - x$$

$$x^2 \leq 4$$

$$\frac{1}{x} > 2$$

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{x + 2}{2x - 3} < 1$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$$

نکته: سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  اگر دارای دلتای منفی باشد، آنگاه در صورتی که  $a > 0$  باشد، تابع همواره مثبت و نمودار آن همواره بالای محور  $x$  ها است و اگر  $a < 0$  باشد، تابع همواره منفی و نمودار آن همواره زیر محور  $x$  ها است.

سوال: به ازای چه مقادیری از  $m$  عبارت  $x^2 + mx + m + 3$  همواره مثبت است؟



سوال: به ازای چه مقادیری از  $m$  عبارت  $mx^2 - mx - 1$  همواره زیر محور طول ها است؟

سوال: سود شرکتی از رابطه  $p = -x^2 + 14x - 45$  که همه اعداد بر حسب میلیون تومان هستند بدست می آید. این شرکت در چه محدوده تولیدی سود دهی دارد؟

سوال: جسمی از بالای ساختمان ۱۳ متری به هوا پرتاب می شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین از رابطه  $y = -5t^2 + 18t + 13$  بدست آید، در چه فاصله زمانی ارتفاع توپ از سطح زمین بیش از ۱۳ متر است؟

# فصل پنجم

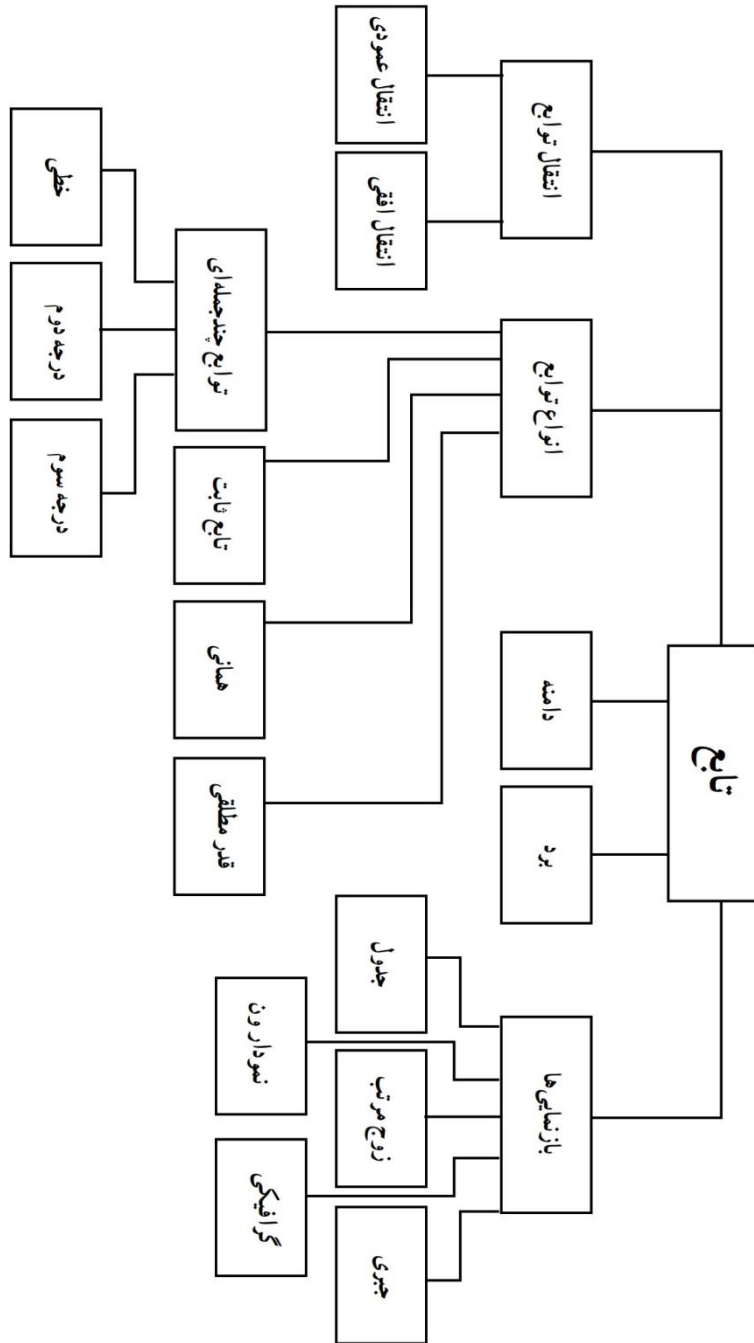
## تابع

درس اول : بازتابی های مختلف تابع

درس دوم : دامنه و برد

درس سوم : انواع تابع

درس چهارم : انتقال تابع



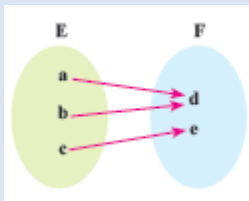
درس اول: بازنمایی های تابع

**سوال:** دو مجموعه  $A, B$  تعریف کنید که در مجموعه اول نام چند تن از دوستانتان باشد و در دومی ورزش مورد علاقه آنها را بنویسید سپس نام هر شخص را با پیکان به ورزش مورد علاقه او وصل کنید. آیا هر عضو مجموعه اول می تواند با چند عضو از مجموعه دوم ارتباط داشته باشد؟

اگر در مجموعه دوم سن هر شخص را می نوشتیم آیا می توانست هر عضو مجموعه اول با دو عضو از مجموعه دوم ارتباط داشته باشد؟

**تابع:** یک رابطه بین دو مجموعه که به هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک عضو از مجموعه دوم نسبت داده شود.

انواع بازنمایی های تابع:

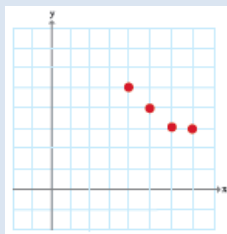


۱. نمودار پیکانی: از هر عضو مجموعه اول فقط یک پیکان خارج شود.

۲. زوج مرتبی: مولفه های اول یکسان نباشد و اگر بود دومی ها هم یکسان باشد.

$$f = \{(4,5), (5,4), (6,3), (7,3)\}$$

۳. نمودار مختصاتی: هر خط عمودی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



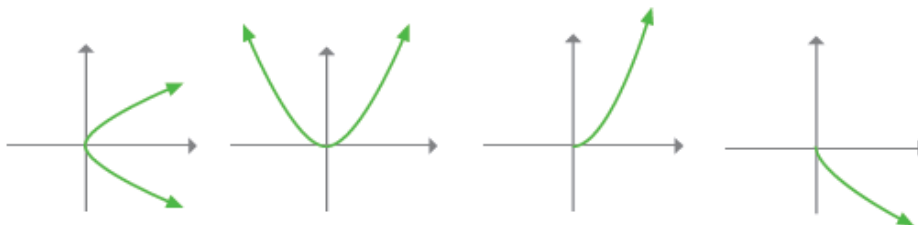
۴. جبری یا ضابطه ای: زمانی که هر  $x$  فقط یک  $y$  بدهد.

$$y = 2x - 1 \quad \text{یا} \quad f(x) = 2x - 1$$

**سوال:** در رابطه  $f = \{(1,2), (2, m+1), (1, m), (m, n)\}$  مقدار  $m, n$  را طوری بیابید که این رابطه یک تابع باشد.

سوال : تابعی که « به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ ، دو برابر آن منهای یک را نسبت دهد » را به هر ۴ طریق بازنمایی کنید .

سوال : کدام نمودار تابع نیست ؟



تمرین : سوالات صفحه ۱۰۰ کتاب را حل کنید .

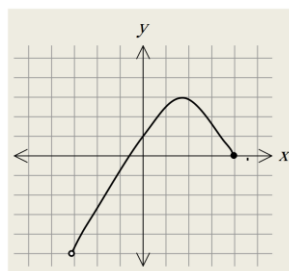
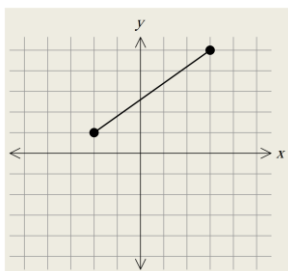
### درس دوم : دامنه و برد

دامنه : به مجموعه مولفه های اول یک تابع ، دامنه گفته می شود.

برد : به مجموعه مولفه های دوم یک تابع برد گفته می شود .

سوال : اگر تابع  $f(n) = 2n^2 + 1$  با دامنه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  باشد ، برد آن را بیابید .

سوال : در هر نمودار دامنه و برد را بیابید .



سوال : تابعی از مجموعه  $A = \{1, 2, 3\}$  به  $B = \{-2, 5\}$  بنویسید که برد آن دو عضو داشته باشد . سپس تابع دیگری بنویسید که برد آن یک عضو داشته باشد .

سوال : تابعی رسم کنید که دامنه و برد آن به ترتیب  $[-1, 1]$  و  $[1, 3]$  باشد .

سوال : تابعی مثال بزنید که دامنه آن فقط یک عضو داشته باشد .

سوال : تابعی مثال بزنید که دامنه آن نامتهای و برد آن فقط دو عضو داشته باشد .

سوال : کدام جمله الزاماً درست است ؟

(الف) اگر دامنه متناهی باشد ، برد نیز متناهی است .

(ب) اگر دامنه نامتناهی باشد ، برد نیز نامتناهی است .

(ج) در یک تابع می تواند تعداد اعضای دامنه از تعداد اعضای برد کمتر باشد .

(د) دامنه و برد می توانند اعداد یکسان باشند .

### درس سوم : انواع تابع

**تابع خطی :** هر تابع که در آن نسبت تغییرات  $y$  به تغییرات  $x$  ثابت باشد را تابع خطی می گویند و این نسبت را شیب تابع می نامند . هر تابع خطی را می توان به صورت  $y = ax + b$  نوشت که  $a$  شیب خط و  $b$  عرض از مبدا ( محل برخورد نمودار خط با محور  $y$  ها است ) خواهد بود .

**دانستنی :** زمان جنگ برای آنکه سربازان بتوانند فاصله مواضع دشمن را از خودشان تخمین بزنند از تابع خطی استفاده می کردند!!!!  
به این ترتیب که چون سرعت صوت در هوای خشک  $343$  متر بر ثانیه است هنگام دیدن نور توپ شلیک شده از طرف دشمن شروع به گرفتن زمان می کردند و هنگام شنیدن صدای شلیک آن توپ زمان را قطع می کردند ( زیرا سرعت نور آنقدر زیاد است که تقریباً همان لحظه به چشم ما می رسد ) و مثلاً اگر  $4$  ثانیه طول می کشید با توجه به سرعت صوت مشخص می شد فاصله دشمن حدوداً  $1$  کیلومتر است (  $972 = 243 \times 4$  ) . در واقع آنها از رابطه خطی  $x = 343t$  استفاده می کردند .

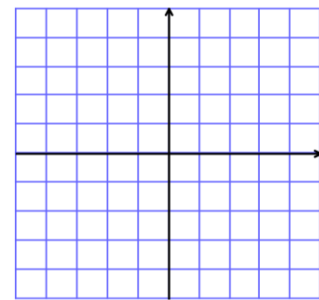
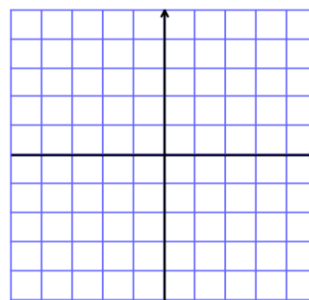
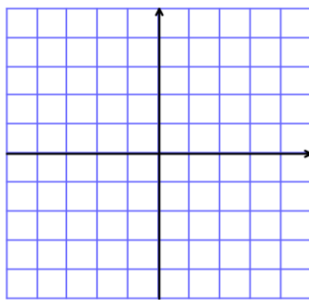
سوال : کدام رابطه زیر خطی است ؟ چرا ؟

$x$	-۲	۱	۵	۸
$y$	-۷	۲	۱۴	۲۳

$x$	-۲	۰	۱	۲
$y$	-۵	۳	۷	۱۰

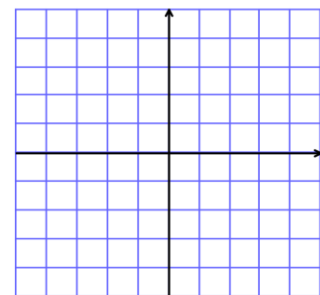
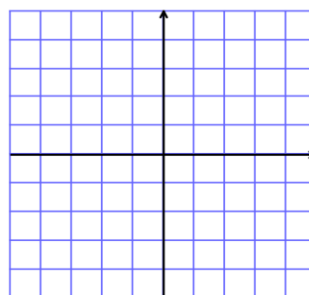
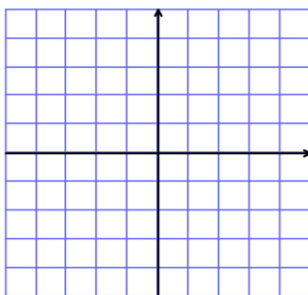
سوال : نمودار تابع  $y = 3x + 1$  را با دامنه های زیر رسم کنید .

- الف)  $\{-1, 2, 3, 4\}$       ب)  $[-1, 4]$       ج)  $R$



سوال : نمودار تابع  $y = 2$  را با دامنه های زیر رسم کنید . آیا  $x = 2$  تابع است ؟

- الف)  $\{-1, 2, 3, 4\}$       ب)  $[-1, 4]$       ج)  $R$



سوال : در یک تابع خطی  $f(0) = 7, f(2) = 11$  است . نمایش جبری آن را نوشته و نمودار آن را رسم کنید .

سوال: نمودار یک تابع خطی از نقاط  $(-1, 1)$ ,  $(1, 2)$  می‌گذرد. نمایش جبری آن را بنویسید.

توابع چند جمله‌ای: توابعی که نمایش جبری آنها چند جمله‌ای از یک متغیر هستند را توابع چند جمله‌ای می‌نامند.

مانند:  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$  و  $y = 2x - \sqrt{2}$

سوال: تابع حجم مکعب را بر حسب طول ضلع آن  $(a)$  بنویسید. چه نوع تابعی است؟

تابع همانی: تابعی با دامنه و برد یکسان که هر عضو دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود. اگر دامنه این نوع تابع  $R$  باشد نمایش جبری آن  $y = x$  یا  $f(x) = x$  است.

سوال: تابع همانی برد  $\{1, 3, 7\}$  دارای چه بردی است؟

تابع ثابت: تابعی که برد آن فقط دارای یکی عضو است. اگر دامنه این نوع تابع  $R$  باشد نمایش جبری آن به صورت  $y = c$  یا  $f(x) = c$  است.

سوال: تابع  $y = \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 1}$  چه نوع تابعی است؟

الف) همانی      ب) ثابت      ج) هیچ کدام      د) سهمی

تابع قدر مطلق: تابعی که هر مقدار از دامنه را به قدر مطلق آن نسبت دهد. اگر دامنه این نوع تابع  $R$  باشد نمایش جبری آن به صورت  $y = |x|$  یا  $f(x) = |x|$  است.



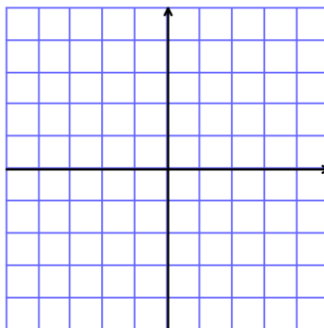
سوال: برد تابع  $y = |x|$  با دامنه  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  را بیابید.

توابع چند ضابطه ای: توابعی که در دامنه های مختلف ضابطه های مختلف دارد.

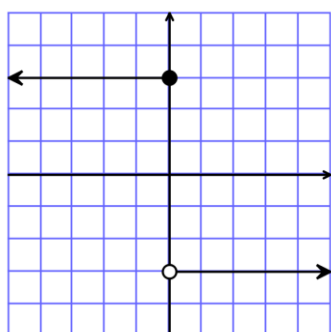
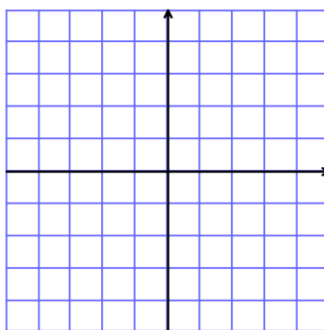
سوال: در تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ x + 1 & -1 \leq x \leq 2 \\ -3x - 3 & x < -1 \end{cases}$  مقدار  $f(3)$  و  $f(0)$  و  $f(-2)$  را بیابید.

سوال: توابع زیر را رسم رکنید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

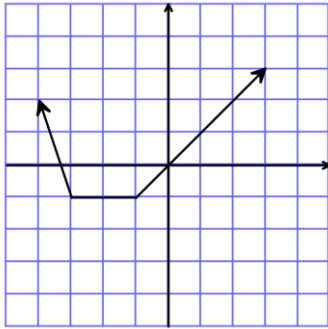
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 2x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$



سوال: برای نمودارهای زیر تابع چند ضابطه ای بنویسید.

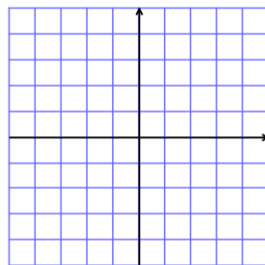


درس چهارم : انتقال

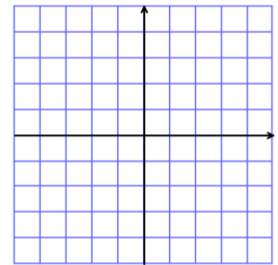
- اگر نمودار تابع  $f(x)$  را داشته باشیم می توانیم نمودار توابع  $f(x \pm k)$  و  $f(x) \pm k$  و  $-f(x)$  را رسم کنیم .
- رسم  $f(x+k)$  : نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد به چپ منتقل می کنیم .
- رسم  $f(x-k)$  : نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد به راست منتقل می کنیم .
- رسم  $f(x)+k$  : نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد به بالا منتقل می کنیم .
- رسم  $f(x)-k$  : نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد به پایین منتقل می کنیم .
- رسم  $-f(x)$  : نمودار تابع  $f(x)$  را نسبت به محور  $x$  قرینه می کنیم .

سوال : به کمک نمودار  $y = x^2, y = |x|$  نمودار توابع زیر را رسم کنید .

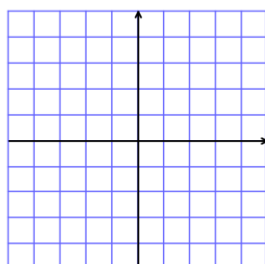
$y = -|x| + 1$



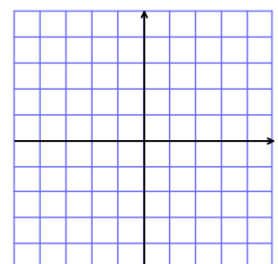
$y = -x^2 + 1$



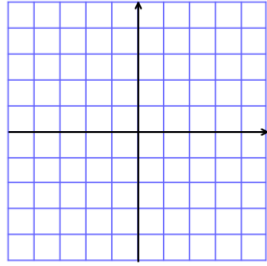
$y = |x - 1| + 1$



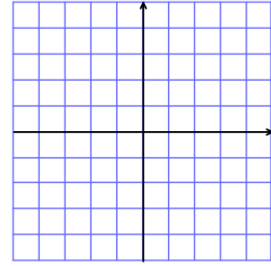
$y = (x - 1)^2 + 1$



$$y = -|x + 2| + 1$$



$$y = -(x + 2)^2 + 1$$



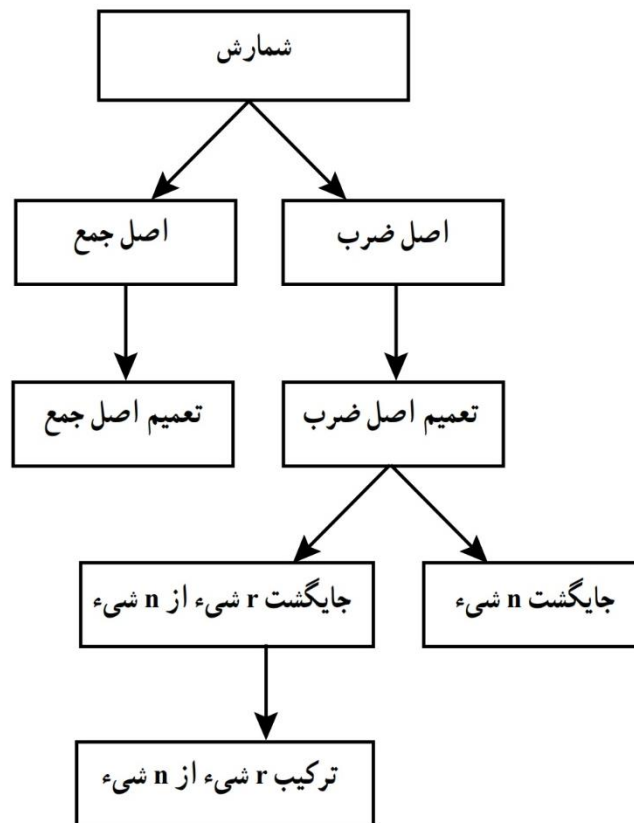
# فصل نهم

## شمارش، بدون شماردن

درس اول : شمارش

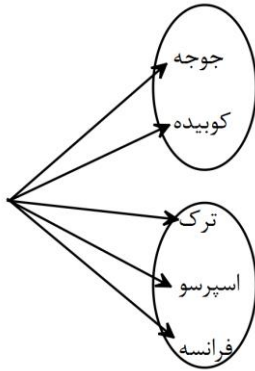
درس دوم : جایگشت

درس سوم : ترکیب و تکریم



## درس اول : شمارش

شمارش یک عمل ساده است که ما به کرات آن را انجام داده ایم اما مسأله اینجاست که آیا همیشه این کار ساده است؟ به نظر شما چند عدد کارت ملی می توان تولید کرد .



**مسأله :** شخصی می خواهد برای تولد دوستش او را به رستوران « یا » کافی شاپ دعوت کند .

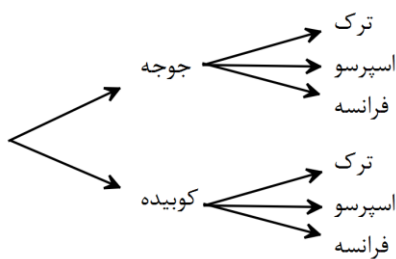
اگر به رستوران ببرد یکی از ۲ نوع غذا جوجه ، کوبیده را می تواند انتخاب کند و اگر به کافی

شاپ ببرد یکی از ۳ نوع قهوه ترک ، اسپرسو ، فرانسه را می تواند انتخاب کند .

چند انتخاب برای دوستش وجود دارد ؟

**اصل جمع :** هرگاه یک عمل کامل را بتوان به چند روش مختلف انجام داد و هر روش چند انتخاب برای انجام داشته باشد ، تعداد تمام راه های ممکن برای انجام آن عمل برابر با مجموع تعداد انتخاب هاست .

**مسأله :** شخصی می خواهد برای تولد دوستش او را به رستوران « و » کافی شاپ دعوت کند .



در رستوران یکی از ۲ نوع غذا جوجه ، کوبیده را می تواند انتخاب کند و در کافی

شاپ یکی از ۳ نوع قهوه ترک ، اسپرسو ، فرانسه را می تواند انتخاب کند .

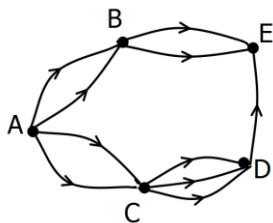
چند انتخاب برای دوستش وجود دارد ؟

**اصل ضرب :** هرگاه یک عمل کامل از چند قسمت ناقص تشکیل شده باشد و هر قسمت چند انتخاب برای انجام داشته باشد ، تعداد تمام راه های ممکن برای انجام آن عمل برابر با حاصل ضرب تعداد انتخاب هاست .

**سوال :** فردی می خواهد از تهران به اصفهان برود و قصد دارد از قم عبور کند . از تهران تا قم ۲ مسیر مختلف و از قم به اصفهان ۳ مسیر مختلف وجود دارد . به چند طریق این کار امکان پذیر است ؟

**سوال :** فردی قصد دارد از تهران به اصفهان برود او می خواهد با خودرو خود و یا با قطار برود . اگر با قطار برود ۳ نوع قطار وجود دارد و اگر با خودرو خود برود مسیر های سوال قبل خواهد بود . به چند طریق این کار امکان پذیر است ؟

**سوال :** در شکل زیر که جاده ها همه یک طرفه هستند به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت ؟



**سوال :** ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را در نظر بگیرید . با این ارقام :

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت ؟

ب) چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟

ج) چند عدد ۳ رقمی زوج می توان نوشت ؟

**سوال :** ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را در نظر بگیرید . با این ارقام :

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت ؟

ب) چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟

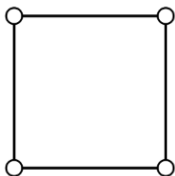
ج) چند عدد ۳ رقمی زوج می توان نوشت ؟

**سوال :** رمز دستگاهی از دو قسمت تشکیل شده که یا هر دو عدد یا هر دو حروف لاتین هستند. این رمز چند حالت ممکن دارد ؟

**سوال :** رمز دستگاهی از سه قسمت تشکیل شده است که هر قسمت می تواند حروف فارسی یا لاتین باشد . اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند . برای این رمز چند حالت وجود دارد ؟

**سوال:** با حروف a,b,c,d,e,f چند رمز ۴ حرفی می توان نوشت که حرف اول صدا دار و حرف دوم a بوده و حرف آخر d نباشد؟

**سوال:** رئوس شکل مقابل را می خواهیم با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کنیم .



الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

ب) به چند طریق می توان این کار را کرد که راسهایی که به هم وصل هستند هم رنگ نباشند؟

**سوال:** پلاک های تهران به صورت مقابل تولید می شوند که ارقام سمت چپ ارقام ۱ تا ۹ هستند



و ارقام سمت راست از مجموعه  $\{۱۰, ۱۱, ۲۲, ۳۳, ۴۴, ۵۵, ۶۶, ۷۷, ۸۸, ۹۹\}$  و

حروف از مجموعه  $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۸, ۲۹, ۳۰, ۳۱, ۳۲, ۳۳, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۳۷, ۳۸, ۳۹, ۴۰, ۴۱, ۴۲, ۴۳, ۴۴, ۴۵, ۴۶, ۴۷, ۴۸, ۴۹, ۵۰, ۵۱, ۵۲, ۵۳, ۵۴, ۵۵, ۵۶, ۵۷, ۵۸, ۵۹, ۶۰, ۶۱, ۶۲, ۶۳, ۶۴, ۶۵, ۶۶, ۶۷, ۶۸, ۶۹, ۷۰, ۷۱, ۷۲, ۷۳, ۷۴, ۷۵, ۷۶, ۷۷, ۷۸, ۷۹, ۸۰, ۸۱, ۸۲, ۸۳, ۸۴, ۸۵, ۸۶, ۸۷, ۸۸, ۸۹, ۹۰, ۹۱, ۹۲, ۹۳, ۹۴, ۹۵, ۹۶, ۹۷, ۹۸, ۹۹, ۱۰۰, ۱۰۱, ۱۰۲, ۱۰۳, ۱۰۴, ۱۰۵, ۱۰۶, ۱۰۷, ۱۰۸, ۱۰۹, ۱۱۰, ۱۱۱, ۱۱۲, ۱۱۳, ۱۱۴, ۱۱۵, ۱۱۶, ۱۱۷, ۱۱۸, ۱۱۹, ۱۲۰\}$  انتخاب می شوند. تعداد پلاک های تولید شده چقدر خواهد بود؟

**سوال:** در یک آزمون ۵ سوال ۲ گزینه ای و ۴ سوال ۳ گزینه ای وجود دارد به چند طریق می توان به این آزمون پاسخ داد اگر:

الف) پاسخ دادن به همه سوالات اجباری باشد.

ب) پاسخ دادن به همه سوالات اجباری نباشد.

### درس دوم: جایگشت

در قسمت قبل با اصل ضرب آشنا شدیم حال فرض کنید ۵ نفر از دوستانتان را می خواهید در یک ردیف کنار هم قرار دهید طبق اصل

ضرب برای جایگاه اول ۵ انتخاب دارید و برای جایگاه دوم ۴ انتخاب و ... پس  $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

اگر می خواستیم ۱۰ نامه مختلف را در ۱۰ پاکت مختلف قرار دهیم چند راه وجود داشت؟

به هر نحوه قرار گرفتن چند شی در کنار هم یک جایگشت از آن اشیا گفته می شود. آیا درست است بگوییم تعداد کل

جایگشت های  $n$  شی مختلف برابر با  $۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (n-1) \times n$  است؟



همانطور که دیدیم نوشتن این ضرب های متوالی طولانی خواهد بود پس بهتر است راهی برای ساده نویسی آن بیابیم .

برای ساده نویسی حاصل ضرب های اعداد طبیعی از ۱ تا  $n$  از نمادی به نام **فاکتوریل** استفاده می شود :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad \begin{cases} 2! = 2 \times 1 = 2 \\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \end{cases}$$

و قرار داد می کنیم که  $0! = 1$  و  $1! = 1$  باشد .

در ضمن می توانیم عدد فاکتوریل دار را تا جایی که می خواهیم باز کنیم و برای ادامه ندادن بیشتر با فاکتوریل انتهای آن را ببندیم :

$$n! = n(n-1)! \quad , \quad 8! = 8 \times 7 \times 6!$$

**هشدار !!!** : برای انجام عملیات ریاضی بین دو عدد فاکتوریلی باید ابتدا آنها را از حالت فاکتوریلی خارج کنیم :

$$4! + 2! \neq 6! \quad , \quad 4! \times 2! \neq 8! \quad , \quad \frac{4!}{2!} \neq 2!$$

**سوال** : حاصل عبارت های زیر را بیابید .

$$2! + 3! + 4! = \quad (2!)! =$$

$$3! \times 4! = \quad \frac{6!}{4!} =$$

$$\frac{8!}{2! \times 6!} = \quad \frac{(n+1)!}{(n-1)!} =$$

**سوال** : عبارت های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید .

$$6 \times 5! = \quad 9 \times 8 \times 7 = \quad n(n-1) =$$

**سوال** : به چند طریق ۵ افسر و ۳ سرباز می توانند در کنار هم قرار بگیرند به طوری که :

الف) سرباز ها کنار هم باشند .

ب) افسر ها کنار هم باشند .

ج) هم درجه ها کنار هم باشند .

**سوال :** چند کلمه ۵ حرفی با حروف کلمه « گلزار » بدون تکرار حروف می توان نوشت که کلمه « گل » داشته باشد ؟

**سوال :** چند جایگشت با حروف کلمه « جهانگردی » می توان نوشت که حروف کلمه « جهان » در کنار هم باشند ؟

بیشتر بدانیم :

اگر اشیاء تکراری وجود داشته باشد برای یافتن تعداد جایگشت ها باید در مخرج تعداد تکراری ها با فاکتوریل نوشته شود.

مثال : حروف کلمه « امامان » چند جایگشت مختلف دارد ؟

$$\text{حل : } \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

### درس سوم : ترتیب و ترکیب

انتخاب  $r$  شی از  $n$  شی مختلف :

هر گاه قرار باشد از بین اشیاء مختلف تعدادی از آنها را انتخاب کنیم بنا به اهمیت ترتیب انتخاب دو حالت به وجود می آید :

۱. ترتیب ( یا جایگشت  $r$  شی از  $n$  شی ) :

وقتی ترتیب انتخاب مهم باشد : مثل زمانی که قرار است سمت ، جایگاه ، مقام ، جایزه داده شود .

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۲. ترکیب :

وقتی ترتیب انتخاب مهم نباشد : مثل زمانی که قرار است گروه، تیم ، مجموعه ، دسته تشکیل شود .

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

توجه شود که ترکیب  $r$  تایی از  $n$  شی را بیشتر با نماد  $\binom{n}{r}$  نمایش می دهند .

**سوال :** از بین ۱۰ کارمند به چند طریق می توان سه نفر را برای سمت های مدیریت ، معاونت ، خزانه داری انتخاب کرد ؟

**سوال :** از بین ۱۰ کارمند به چند طریق می توان سه نفر را برای تشکیل هیأت مدیره انتخاب کرد ؟

**سوال :** اگر از بین چند کتاب مختلف ۳ تا آن را انتخاب و در قفسه بچینیم و این کار به ۲۱۰ حالت ممکن باشد .تعداد کتاب ها چند تا است ؟

**سوال :** با حروف کلمه « جهان گردی » بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که انتهای آن به « ان » ختم شود ؟

**سوال :** یک مجموعه ۷ عضوی چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد ؟

**سوال :** با نقطه روز دایره چند مثلث می توان رسم کرد ؟

**سوال :** از بین ۸ ورزشکار به چند طریق می توان مدال های طلا ، نقره و برنز را توزیع کرد ؟

**نکته :** برای ساده شدن محاسبات موارد زیر را به خاطر داشته باشید :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad , \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

**سوال :** از بین ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود . به چند طریق می توان این کار را انجام داد که :

الف) کمیته ۶ نفره و از هر رشته ۲ نفر .

(ب) کمیته ۴ نفره و حداقل یک ریاضی دان

(ج) کمیته ۵ نفره و حداکثر دو شیمی دان

(د) کمیته ۳ نفره و هر سه نفر از یک رشته

(ه) کمیته ۳ نفره و هیچ دو نفری هم رشته نباشند.

نکته: طبق قاعده  $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$  می توان مجموع فرمول دو ترکیب را به یک فرمول تبدیل کرد.

سوال: حاصل را به صورت یک فرمول ترکیب بنویسید.

$$\binom{11}{4} + \binom{11}{5} =$$

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{6} =$$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} =$$

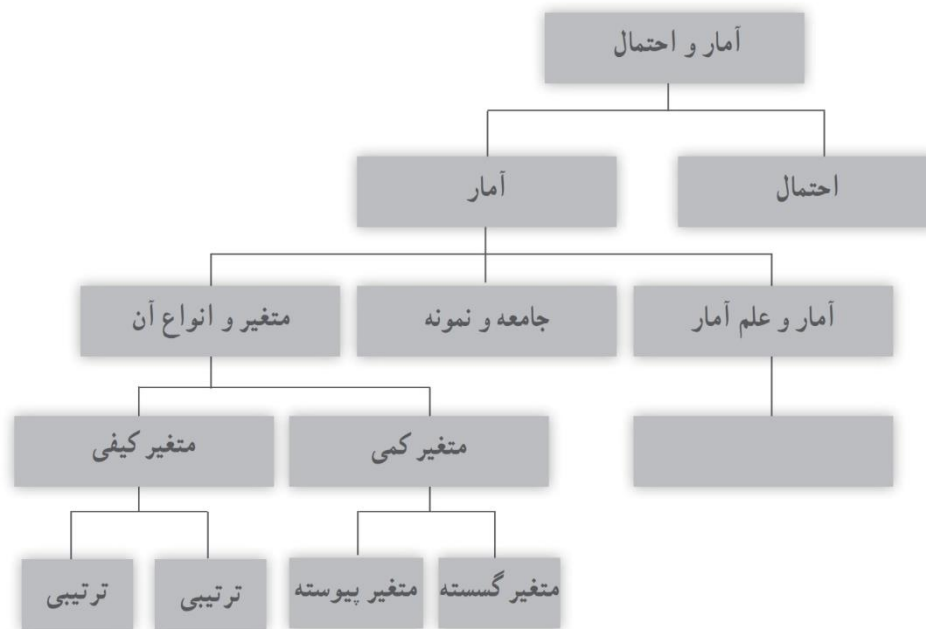
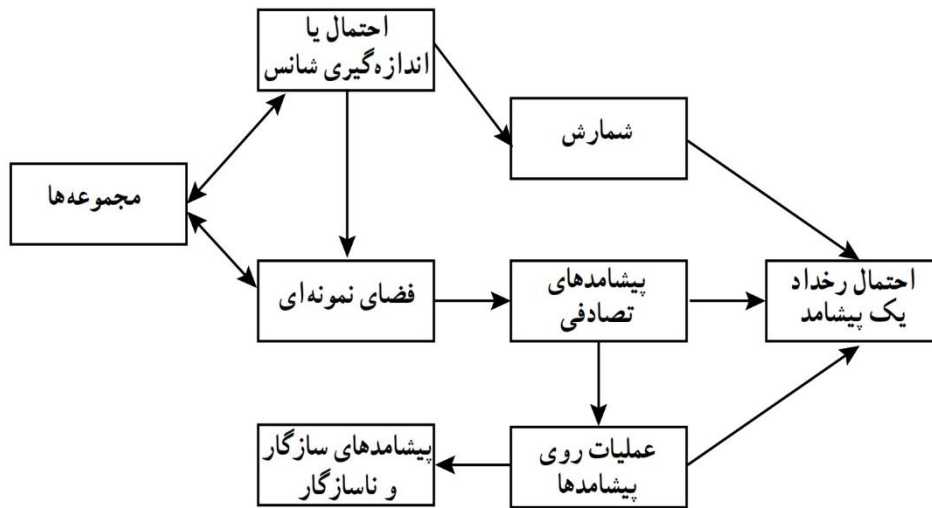
تمرین: تمرین های صفحه ۳۹ و ۴۰ را انجام دهید.

# آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس

درس دوم: تقریباً ای بر علم آمار

درس سوم: متغیر و انواع آن



## درس اول: احتمال یا اندازه اندازه گیری شانس

**فضای نمونه ای:** به مجموعه تمام حالت های ممکن برای رخ دادن یک پدیده یا آزمایش تصادفی، فضای نمونه ای گفته می شود. و معمولاً با حرف  $S$  نمایش می دهند.

**سوال:** فضای نمونه ای هر یک از پدیده های تصادفی زیر را بنویسید.

الف) پرتاب دو سکه مختلف

ب) پرتاب یک سکه و یک تاس

ج) پرتاب دو تاس مختلف

د) پرتاب یک تاس و دو سکه مختلف

ه) داشتن سه فرزند برای یک خانواده

**پیشامد:** هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد از آن فضای نمونه ای می گویند.

**سوال:** دو تاس را پرتاب می کنیم، پیشامد های زیر را بنویسید.

الف) تاس اول فرد و تاس دوم عدد اول بیاید.

ب) هر دو تاس بزرگ تر از ۴ بیاید.

ج) مجموع دو تاس عدد ۷ بیاید.

د) مجموع دو تاس مضرب ۵ باشد.

**سوال :** در خانواده ای با سه فرزند پیشامد های زیر را بنویسید .

الف) فرزند اول پسر باشد .

ب) فقط دو دختر به طور متوالی باشد .

ج) حداقل یک فرزند پسر باشد .

د) حداکثر یک فرزند پسر باشد .

**سوال :** اعداد ۱ تا ۲۰ را روی کارت هایی نوشته ایم و به تصادف یکی را انتخاب می کنیم . پیشامد های زیر را بنویسید .

الف) مضرب ۵ باشد .

ب) مقسوم علیه های ۱۲ باشد .

ج) مضرب ۲ و ۳ باشد .

د) مضرب ۲ یا ۳ باشد .

**سوال :** با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ اعداد دو رقمی ساخته و یکی را به تصادف انتخاب می کنیم . پیشامد آن را بنویسید که :

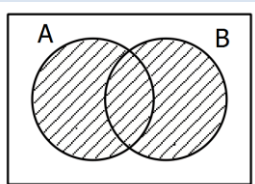
الف) بزرگ تر از ۳۰ باشد .

ب) پیشامد آن که مضرب ۳ باشد .

ج) فرد و کمتر از ۲۵ باشد .

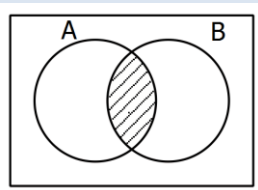
**اعمال روی پیشامد ها :** از آنجایی که پیشامد ها مجموعه هستند پس می توان برای آنها اجتماع ، اشتراک و... تعریف کرد .

$A \cup B$  یعنی : حداقل یکی از پیشامد ها رخ دهد . (  $A$  یا  $B$  یا هر دو )

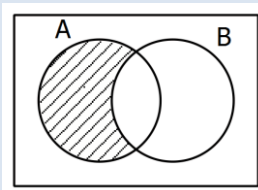




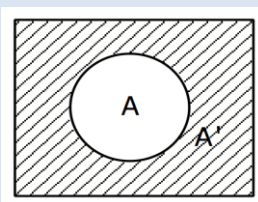
$A \cap B$  یعنی: هر دو پیشامد با هم رخ دهد. ( $B$  و  $A$ )



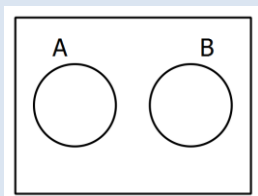
$A - B$  یعنی: فقط پیشامد  $A$  رخ دهد. ( $A$  رخ دهد و  $B$  رخ ندهد)



$A'$  یعنی: پیشامد  $A$  رخ ندهد.



**نکته:** دو پیشامد از یک فضای نمونه ای که اشتراک آنها تهی باشد را، پیشامد های ناسازگار می گویند.



**سوال:** در پرتاب دو تاس اگر  $A$  پیشامد آن باشد که دو تاس فرد بیایند و  $B$  پیشامد آن باشد که مجموع دو تاس ۶ شود و  $C$  پیشامد آن باشد که تاس اول مضرب ۳ باشد. پیشامد های زیر را مشخص کنید.

الف) هر دو تاس فرد و مجموع ۶ باشد.

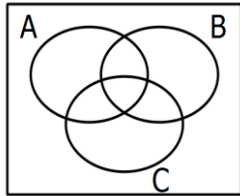
ب) هر دو تاس فرد یا مجموع ۶ باشد.

ج) پیشامد  $A-C$  را نوشته و توصیف کنید.

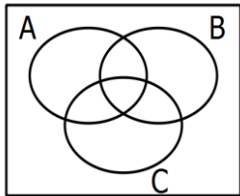
**سوال:** در پرتاب دو تاس اگر  $A$  پیشامد آن باشد که مجموع دو تاس ۷ شود و  $B$  پیشامد آن باشد که هر دو تاس زوج باشند. آیا دو پیشامد ذکر شده ناسازگارند؟ چرا؟

سوال : فرض کنید  $A, B, C$  سه پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشد . عبارت های زیر را به صورت نمودار ون نمایش داده و هاشور بزنید .

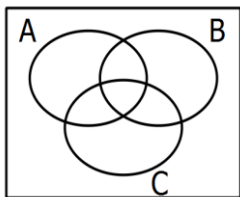
الف) پیشامد  $A, C$  رخ بدهد ولی  $B$  رخ ندهد .



ب) فقط پیشامد  $B$  رخ بدهد .



ج) پیشامد  $B$  رخ بدهد ولی  $C$  رخ ندهد.



**احتمال :** اندازه گیری شانس رخ دادن یک پیشامد را احتمال آن پیشامد می گویند که از نسبت تعداد اعضای پیشامد بر تعداد اعضای

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad \text{فضای نمونه ای اصل می شود :}$$

این شانس همواره بین عدد  $0$  و  $1$  است و زمانی  $0$  خواهد بود که پیشامد تهی باشد و زمانی  $1$  است که پیشامد همان فضای نمونه ای

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\phi) = 0, \quad P(S) = 1 \quad \text{باشد :}$$

سوال : در جعبه ای با ۴ مهره آبی ، ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سبز . سه مهره به تصادف خارج می کنیم . چقدر احتمال دارد :

الف) هر سه مهره آبی باشد.

ب) هر سه مهره هم رنگ باشند .

ج) دقیقاً دو مهره سبز باشد .

د) حداقل دو مهره قرمز باشد .

ه) هیچ دو مهره ای هم‌رنگ نباشند .

**سوال :** در پرتاب دو تاس چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس ۷ شود ؟

**سوال :** با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ اعداد دو رقمی ساخته و یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم . چقدر احتمال دارد :

الف) عدد مضرب ۳ یا بزرگ‌تر از ۴۰ باشد ؟

ب) مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۴ نباشد ؟

**سوال :** در خانواده ای با ۴ فرزند با چه احتمالی حداقل ۴ فرزند پسر است ؟

**احتمال متمم :** در یافتن احتمالاتی که مشخص کردن تعداد اعضای پیشامد سخت است یا تعداد حالت‌های زیادی دارد می‌توان از قانون احتمال متمم استفاده کرد . به این صورت که احتمال متمم را یافته و از یک کم کنیم :  $P(A) = 1 - P(A')$

**سوال :** در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده بیش از ۳ باشد چقدر است ؟

**سوال :** در خانواده ای با ۴ فرزند چقدر احتمال دارد حداقل یک فرزند پسر باشد ؟

**سوال :** از بین ۵ مرد و ۴ زن قرار است ۴ نفر برای کمیته ای انتخاب شوند . چقدر احتمال دارد حداکثر ۳ مرد در کمیته باشد ؟

**سوال :** اگر ۷ نفر را که دو نفر آنها برادرند در یک صف قرار دهیم چقدر احتمال دارد آن دو برادر در کنار هم نباشند ؟

**مجموع احتمال :** برای دو پیشامد  $A, B$  از یک فضای نمونه ای ، همواره تساوی زیر برقرار است :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

و اگر دو پیشامد ناسازگار باشند تساوی به صورت زیر خواهد بود :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

اثبات : با توجه به نمودار ون دو پیشامد می توان به راحتی دریافت که  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$  و با تقسیم طرفین تساوی بر  $n(S)$  حکم ثابت می شود .

**سوال :** درصد قبولی علی در کنکور ۵۷ درصد و درصد قبولی حسن ۳۲ درصد است اگر احتمال قبولی هر دو آنها با هم ۱۸ درصد باشد چقدر احتمال دارد حداقل یکی از آنها قبول شود ؟

**سوال :** ۳۴ درصد از مشتریان یک فروشگاه با عابر کارت  $A$  و ۶۲ درصد آنها با عابر کارت  $B$  خرید می کنند . اگر ۱۵ درصد آنها با هر دو کارت خرید کنند چقدر احتمال دارد شخصی حداقل با یکی از این کارت ها خرید کند ؟

**سوال :** اگر  $A, B$  دو پیشامد از یک فضای نمونه ای باشند ثابت کنید اگر  $A \leq B$  آنگاه  $P(A) \leq P(B)$  .

## درس دوم: مقدمه ای بر علم آمار

علم آمار: مجموعه ای از روش ها شامل جمع آوری اعداد، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر و نتیجه گیری است.

جامعه: مجموعه همه افراد یا اشیاء مورد مطالعه در آمار را جامعه می گویند. به تعداد اعضای جامعه اندازه جامعه گفته می شود.  
نمونه: بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می شود را نمونه می گویند. به تعداد اعضای نمونه اندازه نمونه گفته می شود.

سوال: از بین افراد کلاس خود یک نمونه انتخاب کنید.

## چکیده درس سوم: متغیر و انواع آن (از روی کتاب تدریس شود)

متغیر: ویژگی یا صفتی از جامعه که مورد مطالعه قرار می گیرد و از فردی به فرد دیگر تغییر می کند را متغیر می نامند.

## انواع متغیر:

متغیر کمی: متغیرهایی که قابل اندازه گیری هستند (عدد دارند) مثل: وزن افراد، میزان آلودگی هوا، تعداد فرزندان ...

متغیر کیفی: متغیرهایی که قابل اندازه گیری نیستند (عدد ندارند) مثل: رنگ چشم افراد، گروه خونی، میزان علاقه به چیزی ...

## انواع متغیر کمی:

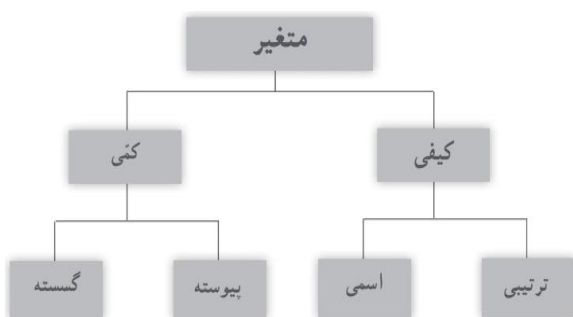
گسسته: تعداد دارد. مثل تعداد تصادفات، تعداد کارمندان یک شرکت ...

پیوسته: مقدار دارد. مثل مقدار آلودگی هوا، قد و وزن افراد ...

## انواع متغیر کیفی:

ترتیبی: ترتیب ذاتی دارد. مثل درجات نظامی، مراحل تحصیل و ...

اسمی: ترتیب ذاتی ندارد. مثل گروه خونی، جنسیت و ...



تمرین: تمرین های انتهای کتاب را حل کنید.

موفق و پیروز باشید.