۱ نظریه ترکیبیاتی مجموعه ها ۲

۱. فرض کنید F خانواده ای از مجموعه ها باشد که کوچکترین آنها k عضو دارد. اگر هر $k+1$ عضو از F با یکدیگر اشتراک داشته باشند، ثابت کنید اشتراک همه ی انها تهی نیست.

۲. فرض کنید $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ زیرمجموعه هایی متمایز از اعداد طبیعی باشند به طوری که

۱) برای هر i داریم $|A_i| = r$ و $|B_i| = s$

۲) برای هر i داریم $A_i \cap B_i = \varnothing$

۳) برای هر $i \neq j$ داریم $A_i \cap B_j \neq \varnothing$

ثابت کنید

$$n \leq \binom{r+s}{r}$$

۳. فرض کنید $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ زیرمجموعه هایی متمایز و متناهی از مجموعه ی اعداد طبیعی باشند به طوری

۱) برای هر i داریم $A_i \cap B_i = \varnothing$

۲) برای هر $i \neq j$ داریم $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \varnothing$

ثابت کنید به ازای هر عددی حقیقی $0 \leq p \leq 1$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n} p^{|A_i|}(1-p)^{|B_i|} \leq 1$$

٤. فرض کنید F مجموعه ی تمام n تایی های $(A_1, \ldots, A_n)$ است که هر کدام از A_i ها زیرمجموعه ای از $\{1, 2 \ldots, 1998\}$ هستند. می دانیم $|A|$ برابر با تعداد اعضای مجموعه ی A است . مقدار عبارت زیر را حساب کنید

$$\sum_{(A_1, \ldots, A_n)} |A_1 \cup \ldots \cup A_n|$$

۵. یازده گروه تئاتر در جشنواره شرکت کرده اند. در هر روز بعضی از گروها به اجرا پرداختند. در حالی که دیگر گروه ها که در ان روز برنامه ای نداشتند به همراه دیگر تماشاگران مشغول دیدن برنامه انها شدند. در مراسم پایانی جشنواره معلوم شد که هر گروه ، برنامه ی گروه های دیگر را دیه است. به نظر شما جشنواره حداقل چند روز طول کشیده است.

٦. نامتناهی مجمومه ی r عضوی داریم که هر دوتایی با هم اشتراک دارند. ثابت کنید مجموعه ای $r-1$ عضوی وجود دارد که با هم کدام از این مجموعه ها اشتراک دارد.