انحنا در کیهان FRW

احسان ابراهیمیان

معادله اول فریدمان انحنا را به سرعت انبساط و مقدار ماده مربوط می‌کند:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = -k \qquad (۱)$$

که k همان انحنای متریک است:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right) \qquad (۲)$$

به نظر عجیب می‌رسد که انحنای فضایی به مقدار ماده موجود و تنظیم سرعت آن با مقدارش ربط دارد اما چطور؟ مثالی می‌تواند مفید باشد: بدترین حالت عدم وجود ماده است که $\rho = 0$ است، در این حالت:

$$\dot{a}^2 = -k \Rightarrow a = \sqrt{k'}t, \quad k' = -k > 0 \qquad (۳)$$

و متریک تبدیل می‌شود به :

$$ds^2 = -dt^2 + k't^2\left(\frac{dr^2}{1+k'r^2} + r^2 d\Omega^2\right) \qquad (۴)$$

که یعنی یک کیهان منبسط شونده با انحنای فضایی منفی، اما این در واقع یک متریک مینکوفسکی است که در مختصات بدی نوشته شده، با تبدیل مختصات زیر متریک کاملا به فرم مینکوفسکی خواهد بود:

$$\begin{matrix} T = t\sqrt{1+k'r^2} & & t = \sqrt{T^2 - R^2} \\ & \Leftrightarrow & \\ R = \sqrt{k'}tr & & r = \frac{R}{\sqrt{k'}\sqrt{T^2-R^2}} \end{matrix} \qquad (۵)$$

پس به نظر می‌رسد که انحنای فضایی به مختصات انتخابی بستگی دارد، پس بیاید یک بار دیگر تشکیل متریک FRW را بررسی کنیم، اما این بار از منظر یک ناظر سقوط آزاد که در یک زمینه همگن و همسانگرد ماده، نسبت به آن ساکن است.

۱ متریک ناظر سقوط آزاد در دنیای همسانگرد

فرض کنید ناظری در حال سقوط آزاد در کیهان است به این معنی او اطراف خودش یک متریک موضعا تخت را تجربه می‌کند اگر او در فضای موضعا تخت خودش مختصات نرمال فرمی را انتخاب کند [1] تصحیحات متریک را به صورت زیر می‌بیند:

$$g_{00} = -1 + R_{0ij0}x^i x^j + ... \tag{۶}$$

$$g_{0i} = +\frac{2}{3}R_{0jki}x^j x^k + ... \tag{۷}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{iklj}x^k x^l \tag{۸}$$

و همچنین همسوتارهای غیر صفر که به کار می‌آیند:

$$\Gamma^i_{jk,l} = \frac{1}{3}(R_{ijlk} + R_{iklj}) \tag{۹}$$

$$\Gamma^\rho_{\mu 0,\nu} = R^\rho_{\mu\nu 0} \implies \Gamma^0_{i0,j} = -R_{0ij0}, \Gamma^i_{0j,l} = R_{ijl0}, \Gamma^i_{00,l} = R_{i0l0} \tag{۱۰}$$

$$\Gamma^0_{jk,l} = -\frac{1}{3}(R_{0jlk} + R_{0klj}) \tag{۱۱}$$

اما این تصحیحات به محتوای مادی کیهان او مربوط هستند. حالا می‌توانیم با استفاده از معادله اینشتین ضرایب تانسور ریمان را به محتوی مادی موجود وصل کنیم بیست ضریب مستقل تانسور ریمان را این ضرایب در نظر می‌گیریم:

$$\begin{matrix} R_{1212} & R_{1313} & R_{2323} & R_{1213} \\ R_{2123} & R_{3132} & R_{0101} & R_{0202} \\ R_{0303} & R_{0102} & R_{0203} & R_{0103} \\ R_{1012} & R_{1013} & R_{2023} & R_{2021} \\ R_{3032} & R_{3031} & R_{0123} & R_{0321} \end{matrix} \tag{۱۲}$$

با استفاده از این بیست ضریب تانسور اینشتین به این صورت در می‌آید:

---

[1] انتخاب های این ناظر برای دستگاه مختصات تنها مختصات نرمال فرمی نیست، می‌تواند مختصات های دیگری را هم انتخاب کند، مثلا فضا را با رفت و برگشت نور مدرج کند.

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R_{2323}+R_{1212}+R_{1313} & R_{3031}+R_{2021} & R_{3032}+R_{1012} & R_{2023}+R_{1013} \\ same & R_{1313}+R_{1212}-R_{0101} & R_{3132}-R_{0102} & R_{2123}-R_{0103} \\ same & same & R_{2323}+R_{1212}-R_{0202} & R_{1213}-R_{0203} \\ same & same & same & R_{2323}-R_{0303}+R_{1313} \end{pmatrix}$$

از طرف دیگر طبق معادله اینشتین این تانسور برابر است با $8\pi G T_{\mu\nu}$ که در مبدا به شکل زیر است:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(t) \end{pmatrix} \tag{۱۴}$$

البته این تنها در صورتی است که ناظر نسبت به سیال کیهانی ساکن باشد. به وضوح این تعداد معادلات (ده معادله) برای پیدا کردن این بیست ضریب کافی نیست (حتی ضرایبی مثل R_{0123} بالکل در اینجا غایب‌اند) در واقع در حالت کلی تعیین کل تانسور ریمان از روی ماده موجود غیر ممکن است و ما به شرایط اولیه نیاز داریم وگرنه حل خلا همیشه فضا_زمان تخت بود اما در مورد جهان ما، تقارن چرخشی مهمی وجود دارد. اگر ضرایب R_{0i0j} که i و j با هم مخالف هستند وجود داشته باشد آنگاه هم در معادله پیوستگی تانسور انرژی تکانه و هم در معادله ژئودزی حرکت ذرات در این فضا_زمان، نیروهای برشی وجود خواهند داشت در راستای شعاعی نیست از طرفی تنها حالتی که تانسور R_{0i0j} تقارن دورانی داشته باشد این است که:

$$R_{0i0j} \propto \delta_{ij} \tag{۱۵}$$

بنا بر این برای داشتن و حفظ تقارن دورانی باید $R_{0102} = R_{0203} = R_{0103} = 0$ باشند. با اعمال این شرط روی معادلات بالا خواهیم داشت $R_{1213} = R_{2123} = R_{3132} = 0$ و همین طور برای حفظ تقارن دورانی باید اندیس فضایی در مقدار تابع تفاوت ایجاد نکند بنا بر این باید داشته باشیم:

$$R_{0i0j} = Z\delta_{ij} \tag{۱۶}$$

$$R_{ijkl} = S(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}) \tag{۱۷}$$

همچنین از روی همین استدلال‌های مبتنی بر تقارن فهمید که:

$$R_{0ijk} = 0 \tag{۱۸}$$

در نتیجه کلا از بیست مجهول تانسور ریمان ۲ مجهول باقی خواهد ماند و هموستارهای متناظر و غیر صفر باقی مانده:

$$\Gamma^i_{jk,l} = \frac{S}{3}(2\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{jl}\delta_{ik} - \delta_{kl}\delta_{ij}) \tag{۱۹}$$

$$\Gamma^0_{i0,j} = Z\delta_{ij}, \Gamma^i_{00,l} = Z\delta_{il} \quad (۲۰)$$

با جاگذاری در معادله مرتبه صفر اینشتین خواهیم داشت:

$$Z = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p); S = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (۲۱)$$

بنا بر این ما تصحیحات متریک را برای این ناظر در حال سقوط آزاد پیدا کرده ایم. جالب توجه است که فقط چگالی و فشار موضعی در این تصحیحات موثر هستند و هیچ نیازی به ثابت هابل یا چیز دیگری برای یافتن این تصحیحات نیست. اما معادلات فریدمان کجا هستند؟ این موضوع بخش بعدی است.

۲ پیدا کردن معادله حرکت

حالا علاقه مند هستیم که معادله حرکت را برای این کیهان پیدا کنیم، یعنی این سوال که ماده چگونه روی این فضا_زمان حرکت می کند؟ اگر یک شاره هابلی داشته باشیم که از ما دور می‌شود، برای یافتن رابطه بین H و ρ و p یک راه این است که از معادلات پیوستگی تانسور انرژی تکانه استفاده کنیم، برای این کار باید مشتق همورد تانسور انرژی_ تکانه یعنی $\nabla_\mu T^\mu_\nu$ را محاسبه کنیم و برابر صفر قرار دهیم. اگر کیهان اطراف ناظر بخش قبل یک سیال ایده‌آل مثل کیهان شناسی باشد لاجرم:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (۲۲)$$

از روی همسانگردی شاره هابلی:

$$u^i = H(t)x^i \quad (۲۳)$$

که با توجه به تصحیحات مرتبه دو متریک تصحیحات بعدی این رابطه از مرتبه سه خواهد بود که قابل صرف نظر است همچنین از روی متریک تا مرتبه دو داریم:

$$-1 = g_{00}(u^0)^2 + 2g_{0i}u^0u^i + g_{ij}u^iu^j \quad (۲۴)$$

با توجه به مرتبه ۳ بودن جمله $g_{oi}u^iu^0$ تا مرتبه دو خواهیم داشت:

$$(u^0)^2 = \frac{-1}{g_{00}}(1 + H^2x^ix^i) = 1 + H^2x^ix^i + R_{0ij0}x^ix^j \quad (۲۵)$$

در نتیجه:

$$u^0 = 1 + \frac{1}{2}(H^2\delta_{ij} + R_{0ij0})x^ix^j \quad (۲۶)$$

و

$$u_0 = -1 - \frac{1}{2}(H^2\delta_{ij} - R_{0ij0})x^i x^j \tag{۲۷}$$

از طرفی:

$$u_i = g_{ij}u^j + g_{i0}u^0 = Hx^i + \frac{2}{3}R_{0jki}x^j x^k \tag{۲۸}$$

با این حساب:

$$T_{00} = (\rho + p)(1 + (H^2\delta_{ij} - R_{0ij0})x^i x^j) - p + pR_{0ij0}x^i x^j \tag{۲۹}$$

در نتیجه:

$$T_{00} = \rho + \rho(H^2\delta_{ij} - R_{0ij0})x^i x^j + pH^2 r^2 \tag{۳۰}$$

و در مورد T_{0i} خواهیم داشت:

$$T_{0i} = -\rho(Hx^i + \frac{2}{3}R_{0jki}x^j x^k) - pHx^i \tag{۳۱}$$

و در نهایت:

$$T_{ij} = (\rho + p)H^2 x^i x^j + p(\delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{iklj}x^k x^l) \tag{۳۲}$$

همچنین داریم:

$$T^0_0 = -\rho - (\rho + p)H^2 x^2 \tag{۳۳}$$

$$T^i_0 = -(\rho + p)Hx^i \tag{۳۴}$$

$$T^0_i = (\rho + p)Hx^i \tag{۳۵}$$

$$T^i_j = (\rho + p)(H^2 x^i x^j) + \delta_{ij}p \tag{۳۶}$$

حالا باید معادلات پیوستگی را بنویسیم:

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = \partial_\nu T^\nu_\mu + \Gamma^\nu_{\nu\lambda}T^\lambda_\mu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}T^\nu_\lambda \tag{۳۷}$$

$$\implies \nabla_\nu T^\nu_0 = \partial_0(T^0_0) + \partial_j(T^j_0) + \Gamma^\nu_{\nu 0}T^0_0 + \Gamma^\nu_{\nu i}T^i_0 - \Gamma^\lambda_{0\nu}T^\nu_\lambda \tag{۳۸}$$

$$\implies \nabla_\nu T^\nu_i = \partial_0(T^0_i) + \partial_j(T^j_i) + \Gamma^\nu_{\nu 0}T^0_i + \Gamma^\nu_{\nu j}T^j_i - \Gamma^\lambda_{i\nu}T^\nu_\lambda \tag{۳۹}$$

در نظر بگیرید که تمام هموستارها فقط از مرتبه یک به بالا موجود دارند و طبق تعریف مختصات نرمال در مبدا صفر هستند. با قرار دادن $\mu = 0$ خواهیم داشت:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \tag{۴۰}$$

این همان معادله پیوستگی شاره در کیهان شناسی است که انتظارش را داشتیم. اما اگر $\mu = i$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$x^i \times \left(4H^2(\rho+p) + \frac{d}{dt}\left(H(\rho+p)\right) + (\rho+p)Z\right) + \partial_i p = 0 \tag{۴۱}$$

این شبیه هیچ معادله‌ای در کیهان شناسی نیست. اگر ادعا کنیم که «فشار همگن است» معادله مرتبه یک به ما می‌گوید که

$$4H^2(\rho+p) + \frac{d}{dt}\left(H(\rho+p)\right) + (\rho+p)Z = 0$$

که هیچ شباهتی به هیچ معادله ای در کیهان شناسی ندارد در واقع این معادله فقط وقتی برقرار است که $p = 0$ باشد یعنی یک جهان بدون فشار (و البته در $p = -\rho$ هم برقرار است اما فقط در این دو حالت) و می‌توان نشان داد به ازای جهان دارای فشار در حالت کلی از هیچ معادله کیهان‌شناسی نمی‌توان به این معادله رسید. مشکل کجاست؟ بیاید مشتق تانسور انرژی‌ـ تکانه را بدون جایگذاری سرعت‌ها بنویسیم:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = u^\nu u^\mu \partial_\mu(\rho+p) + (\rho+p)(u^\mu \nabla_\mu u^\nu + u^\nu \nabla_\mu u^\mu) + \nabla^\nu p \tag{۴۲}$$

با استفاده از این حقیقت که $u^\mu u_\mu = -1 \implies u^\mu \nabla_\nu u^\mu = 0$ و ضرب معادله بالا در u_ν برای به دست آوردن تصویر مشتق تانسور انرژی‌ـ تکانه روی بردار سرعت خواهیم داشت:

$$u_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = -u^\mu \nabla_\mu \rho - (\rho+p)\nabla_\mu u^\mu = 0 \tag{۴۳}$$

این تا مرتبه اول همان معادله ۴۰ است. اما کم کردن این مولفه از مشتق اصلی معادله دیگری به دست می‌دهد:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} + u^\nu u_\lambda \nabla_\mu T^{\mu\lambda} = u^\nu u^\mu \nabla_\mu p + (\rho+p)u^\mu \nabla_\mu u^\nu + g^{\mu\nu}\nabla_\mu p = 0 \tag{۴۴}$$

این معادله در واقع تصویر معادله پیوستگی بر فضای عمود بر چهار سرعت است و نهایتا به دست می‌دهد:

$$u^\mu \nabla_\mu u^\nu = -\frac{g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu}{\rho + p} \nabla_\mu p \tag{۴۵}$$

قبل از این که این معادله را تحلیل کنیم اجازه دهید یادآوری کنیم که $\frac{du^\nu}{ds} = u^\mu \nabla_\mu u^\nu$ بنا بر این معادله بالا می‌گوید که شتاب حرکت سرعت سیال متناسب است با تصویر گرادیان فشار عمود بر سرعت [۲] و این چیز عجیبی نیست: گرادیان فشار باعث شتاب می‌شود. اما اشکال کار اینجاست : ناظر در حال سقوط آزاد است و باید لزوما داشته باشیم: $\frac{du^\mu}{ds} = 0$ یا:

$$u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0 \tag{۴۶}$$

به همین خاطر است که در جهان بدون فشار همه چیز با معادلات فریدمان سازگار است. در واقع معادله ۴۴ همان معادله ۴۱ است، با جایگذاری سرعت‌ها و محاسبه تا مرتبه اول:

$$(\rho + p)\frac{du^\mu}{ds} = (\rho + p)(H^2 + \dot{H} + Z)x^i = -\partial_i p - \dot{p} H x^i \tag{۴۷}$$

که با کمی تلاش و استفاده از معادله ۴۰ به معادله ۴۱ خواهیم رسید. نکته این جاست که آنچه از معادلات فریدمان در کیهان شناسی انتظار داریم معادله زیر است:

$$(H^2 + \dot{H} + Z)x^i = 0 \implies H^2 + \dot{H} + \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = 0 \tag{۴۸}$$

بنا بر این طبق معادله ۴۷ اگر بخواهیم به معادلات فریدمان برسیم باید لزوما داشته باشیم:

$$\partial_i p + \dot{p} H x^i = 0 \tag{۴۹}$$

که این یعنی باید از ادعای همگن بودن فشار دست کم تا مرتبه اول دست بکشیم. اما دلیل موجهی برای انکار همگنی فشار وجود دارد: ما هنوز بحثی راجع به انتخاب صفحات زمان‌ـ ثابت نکرده ایم. در متریک FRW صفحات زمان ثابت به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که فشار و چگالی روی آن ثابت باشد اما ما مختصات نرمال فرمی برای یک ناظر سقوط آزاد را انتخاب کرده ایم که لزوما صفحات زمان‌ـ ثابت روی این متریک با صفحات زمان‌ـ ثابت متریک سرتاسری FRW یکسان نیست (چه این که اگر چنین بود g_{00} نباید هیچ تصحیحی می‌داشت) با این همه هنوز معادلات موجود برای به دست آوردن معادله باقی مانده فریدمان کافی نیست، ما نیاز به شکل ماده در اطراف نیاز داریم

[۲] در نسبیت معنای عمود متفاوت است

تا معادله فریدمان را به دست آوریم. یعنی باید از روی دانستن شکل ماده اطراف و صفحه بندی مختصات مستقیما ۴۹ را نتیجه بگیریم (به عنوان یک شرایط اولیه، به راحتی می‌توان مثال نقضی ساخت که این معادله برقرار نباشد بنا بر این شکل ماده اطراف به عنوان شرایط اولیه مهم است).
راه دیگر استدلال از روی همگنی است: همان طوری که ناظر مرکزی همراه با شاره حرکت می‌کند و نسبت به آن ساکن است، همگنی ایجاب می‌کند که هر ناظر سقوط آزاد اطراف هم باید همراه با شاره حرکت کند، نسبت به آن ساکن باشد و ساکن بماند، به عبارتی اگر معادله ۴۶ برای ناظر مرکزی برقرار است به خاطر همگنی باید برای هر ناظر دیگری هم برقرار باشد بنا بر این برای ناظران اطراف هم باید برقرار باشد و معادلات فریدمان از این طریق به دست می‌آید. البته پایستگی تکانه همچنان برقرار است اما به قیمت همگن نبودن فشار که البته به جهت آزادی انتخاب صفحات زمان‌ثابت این موضوع عجیب نیست که فشار تا مرتبه اول همگن نباشد (مشتق مکانی آن جمله مرتبه اول داشته باشد).

هر صورت معادلات حرکت نهایی شاره همگن و همسانگرد به صورت زیر خواهد بود که معادلات فریدمان هستند:

$$\begin{aligned}
&u^i = Hx^i \\
&\dot\rho + 3H(\rho + p) = 0 \\
&\dot H + H^2 + \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = 0
\end{aligned} \tag{۵۰}$$

نکته جالب توجه اینجاست که آنچه ما به عنوان معادلات فضا_زمان یا متریک می‌شناختیم، یعنی معادلات فریدمان، در واقع معادلات حرکت شاره یا ماده اطراف است، نسبیت عام در اینجا صرفا ارتباط بین این توزیع ماده و متریک اطراف یک ناظر را معین می‌کند و معادلات حرکت صرفا از روی این که مسیر باید ژئودزی باشد به دست می‌آید. البته هنوز فرم این معادلات حرکت با معادلات فریدمان که می‌شناختیم یکسان نیست، اولا باید $H = \dot a/a$ را جاگذاری کنیم و حتی با این حال باز هم معادله اول فریدمان و انحنا غایب هستند. فرم متریک FRW هنوز غایب است و در بخش بعدی می‌خواهیم متریک FRW را دست کم برای ناظر موضعی به دست آوریم.

۳ به هم پیوستن ناظران همراه: متریک FRW

حالا تغییر شکل متریک یک مختصات موضعی را مطابق با معادلات فریدمان در دست داریم، اما چگونه این ناظران با متریک‌های موضعی‌شان را به هم پیوند بزنیم؟ مسئله‌ای که وجود دارد این است که تعیین مختصات نرمال فرمی، صرفا فضا_زمان اطراف یک ناظر سقوط آزاد را با انتخاب‌های طبیعی مختصات، برچسب‌گذاری می‌کند و تنها چیزی که اصیل است انحنای اطراف این ناظر است، اما مسئله متریک سرتاسری یک مسئله جدید پیش رو می‌گذارد: چگونه مختصات سرتاسری را تعیین کنیم؟ یا برچسب‌گذاری سراسری ما بر چه مبنایی باشد؟ با توجه به این که شکل متریک به

برچسب‌گذاری ما شدیدا وابسته است، پاسخ دادن به این سوال در شکل نهایی متریک تعیین کننده است.

قبل از این که پیشتر برویم ابتدا مروری بر رشته رشته کردن یا Threading انجام می‌دهیم چرا که ناظران کیهان شناسی فضایشان را واقعا رشته رشته می‌کنند. فرض کنید خانواده‌ای از مسیرها (که لزوما ژئودزیک نیستند اما زمانگونه هستند) وجود دارند که همدیگر را قطع نمی کنند. این مسیرها را می‌توان با مختصاتی سه بعدی مثل y^i برچسب‌گذاری کرد. هر مسیر با یک برچسب t پارامتریزه می‌شود به طوری که مسیر همسایه آن هم کمابیش پارامتری نزدیک و مشابه دارد. فرض کنید پارامتر t به اندازه Δt روی مسیر تغییر کند، آنگاه تغییر ویژه زمان به صورت:

$$\Delta s^2 = -M^2 \Delta t^2 \tag{۵۱}$$

خواهد بود. فرض کنید نقطه t روی تمام مسیرها را به هم متصل کنید، نتیجه‌اش ابر رویه‌ای سه بعدی خواهد بود که با مختصات y^i برچسب‌گذاری شده است. بنا بر این فضاـ‌زمان را می‌توان با این مسیرها ورقه ورقه کرد و از شهودهای هندسی متریک ADM استفاده کرد. متریک ADM به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(N^i dt + dy^i)(N^j dt + dy^j) \tag{۵۲}$$

بنا بر این $M^2 = N^2 - N^i N_i$ و h_{ij} متریک رویه به دست آمده از اتصال تمام نقاط با t یکسان است. حالا نقطه t_0 را روی مسیر y^i در نظر بگیرید، نزدیکترین نقطه روی مسیر همسایه $y^i + \Delta y^i$ در چه فاصله‌ای است و کجاست؟ (چه Δs^2 دارد و مقدار پارامتر t روی مسیر همسایه در نزدیکترین نقطه چیست؟) برای پاسخ دادن به این سوال فرض کنید پارامتر روی مسیر کناری برابر $t_0 + \Delta t$ باشد در نتیجه:

$$\Delta s^2 = -N^2 \Delta t^2 + h_{ij}(N^i \Delta t + \Delta y^i)(N^j \Delta t + \Delta y^j) \tag{۵۳}$$

با کمینه کردن مقدار Δs^2 نسبت به Δt خواهیم داشت:

$$\Delta t = N_i \Delta y^i / M^2 = M_i \Delta y^i \tag{۵۴}$$

و مقدار Δs^2 برابر با:

$$\Delta s^2_{min} = (h_{ij} + M^2 M_i M_j)\Delta y^i \Delta y^j = p_{ij} \Delta y^j \Delta y^i \tag{۵۵}$$

که p_{ij} نوع خاصی از متریک فضایی است که نزدیکترین فاصله (فضا گونه) بین مسیر y^i و $y^i + \Delta y^i$ را به دست می‌دهد. این نزدیکترین فاصله به هر دو مسیر کنار هم عمود است [۳] اما لزوما همزمان نیست و زمان این نقطه (نقطه برخورد خط واصل عمود بر مسیر y^i و $y^i + \Delta y^i$) در مسیر کناری به اندازه $M_i \Delta y^i$ جلوتر است، بنا بر این اگر نقطه‌ای روی مسیر کناری دارای Δt دلخواهی با مسیر

[۳] عمود به معنای نسبیتی

کنونی باشد فاصله فضا ــ زمانی بین این دو نقطه به دو قسمت زمان ــ گونه و فضاگونه عمود بر هم تفکیک می‌شود:

$$\Delta s^2 = -M^2(\Delta t - M_i \Delta y^i)^2 + p_{ij}\Delta y^i \Delta y^j \qquad (۵۶)$$

$$\Delta s^2 = -M^2\Delta t^2 + 2M^2 M_i \Delta y^i \Delta t + (p_{ij} - M^2 M_i M_j)\Delta y^i \Delta y^j \qquad (۵۷)$$

روابطی که به دست آوردیم کاملا با تجزیه متریک ADM سازگار است اما معنای هندسی عبارتها متفاوت است، M^2 وزن گذر زمان روی مسیر را نشان می‌دهد، M_i برداری است که نشان می‌دهد مسیر کناری چه قدر زمان جلوتر یا عقب‌تری از مسیر اصلی دارد و k_{ij} تانسوری است که کوتاه‌ترین فاصله فضاگونه بین دو مسیر در یک زمان t مشخص را به دست می‌دهد.

حالا فرض کنید رشته‌های ما برای برچسب‌گذاری فضا در واقع ژئودزیک باشند، در این صورت مختصات y^i یک مختصات همراه است و می‌توان نشان داد که در این صورت باید:

$$\partial_i M = -\partial_t(MM_i) \qquad (۵۸)$$

اکنون می‌توانیم به مسئله کیهان شناسی بازگردیم، از دو مسیر می‌توان ین کار را کرد، مسیر اول ادامه دادن متریک موضعی فضا ــ زمان و مسیر دوم استفاده مستقیم از ایده نخ بندی فضا ــ زمان است. با ادامه دادن مسیر اول، تصحیحات متریک تا اینجا برای یک ناظر همراه با مختصات فرمی به صورت زیر بوده است:

$$g_{00} = -1 - Zx^2, g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{S}{3}(x^i x^j - \delta_{ij}x^2) \qquad (۵۹)$$

که به دست آوردیم:

$$Z = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p); S = \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad (۶۰)$$

این متریک به وضوح یک متریک همراه نیست، اما می‌توان پرسید که اگر ناظران اطراف همراه با ماده اطراف حرکت کنند چه پیش می‌آید؟ در بخش قبل استدلال کردیم که مواد اطراف هم قطع نظر از وجود فشار باید روی ژئودزی حرکت کنند بنا بر این هر ناظر اطراف که همراه با ماده حرکت کند هم روی یک ژئودزی حرکت می کند. بنابر این برای مواد و ژئودزی‌های همراه مواد معادله حرکتی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{dx^i}{dt} = H(t)x^i \implies \frac{dx^i}{x^i} = Hdt \implies x^i(t) = x^i(t_0)\exp\int_{t_0}^{t} H(t')dt' \qquad (۶۱)$$

رابطه بالا پیشنهاد می‌کند که مواد اطراف دائم در حال مقیاس شدن هستند، با معرفی ضریب مقیاس به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \exp\int_{t_0}^{t} H(t')dt' \implies H(t) = \frac{\dot a}{a} \qquad (۶۲)$$

حالا اگر این H را درون معادلات حرکت ماده، ۵۰ قرار دهیم باید به دست آوریم:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\pi) = -Z \qquad (۶۳)$$

همچنین به کمک معادله پیوستگی و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$S = \frac{8\pi G}{3}\rho = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} \qquad (۶۴)$$

که k ثابت انتگرال گیری است. این‌ها فرم معروف معادلات فریدمان هستند و در اینجا کاملا واضح است که معادلات فریدمان نه معادلات تحول متریک فضاـزمان بلکه معادلات حرکت ماده است. اکنون اگر از مختصات جدیدی به صورت زیر معرفی کنیم این مختصات باید همراه باشد چرا که تغییر مسیر ژئودزی‌ها از آن حذف شده است:

$$X^i = \frac{x^i}{a(t)} \qquad (۶۵)$$

با این تغییر مختصات و جاگذاری معادلات حرکت، متریک متریک به صورت زیر نوشته می شود:
(۶۶)

$$ds^2 = -(1-(\ddot{a}a+\dot{a}^2)X^2)dt^2+2a\dot{a}X^i dt dX^i+a^2[\delta_{ij}+\frac{Sa^2}{3}(X^iX^j-\delta_{ij}X^2)]dX^i dX^j$$

از روی شرط ۵۸ به راحتی می‌توان تحقیق کرد که این متریک در دستگاه همراه نوشته شده است، با وجود این که این متریک تماما بر حسب a نوشته شده است (فرض کنید S هم بر حسب a باشد که صرفا به خاطر کوتاه نویسی هنوز به صورت S نوشته ایم) اما توجه داریم که ربط متریک مستقیما به ماده است و ما فقط معادلات حرکت را جاگذاری کردیم. اما این فرم متریک بردار M_i غیر صفر دارد:

$$M_i = a\dot{a}X^i \qquad (۶۷)$$

به یاد داشته باشید وجود این بردار به این معنی است که در مسیر (دیفرانسیلی) کنار مسیر X^i ،یعنی مسیر $X^i + dX^i$، فاصله نزدیکترین نقطه از tدر زمان $t + dt$ قرار دارد که $dt = M_i dX^i =$ $\dot{a}aX^i dX^i$، بنا بر این باید پارامتر t مسیرهای کناری به اندازه $\frac{1}{2}a\dot{a}X^2$ عقب کشیده شود در نتیجه

$$t \to \tilde{t} = t - \frac{1}{2}a\dot{a}X^2 \qquad (۶۸)$$

در نتیجه داریم:

$$dt \to dt(1 + \frac{1}{2}(\dot{a}^2 + a\ddot{a})X^2) + a\dot{a}X^i dX^i \qquad (۶۹)$$

$$a(t)^2 \to a(t)^2 \times (1 + \dot{a}^2 X^2) \tag{۷۰}$$

بنا بر این متریک به فرم زیر مبدل می شود:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2[\delta_{ij} + (\frac{Sa^2}{3} + \dot{a}^2)X^iX^j - (\frac{Sa^2}{3} - \dot{a}^2)X^2\delta_{ij})]dX^idX^j \tag{۷۱}$$

علی‌رغم ظاهر عجیب این متریک، همچنان با معادلات فریدمان سازگار است، (امتحان کنید!) از این گذشته صفحات زمان ثابت اکنون مطابق متریک FRW است (ضریب dt تابع زمان و مکان نیست) و البته ضریب a^2 پشت قسمت فضایی متریک هم وجود دارد، تنها انحنا در این متریک غایب است. می‌توان با تبدیل مختصات کلی زیر متریک بالا را به فرم‌های دیگری نیز تبدیل کرد:

$$X^i \to X^i(1 + \frac{1}{2}A(t)X^2/a^2) \tag{۷۲}$$

که $A(t)$ یک تابع دلخواه با زمان است، اگر از تصحیحات مرتبه سه و بالاتر صرف نظر کنیم این تبدیل هیچ سهمی به جمله dt نمی دهد و فقط قسمت فضایی را عوض می‌کند:

$$dX^i \to dX^i(1 + \frac{1}{2}A(t)X^2/a^2) + A(t)X^iX^jdX^j/a^2 \tag{۷۳}$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2[\delta_{ij} + (\frac{Sa^2}{3} + \dot{a}^2 + 2A(t))X^iX^j - (\frac{Sa^2}{3} - \dot{a}^2 - A(t))X^2\delta_{ij})]dX^idX^j \tag{۷۴}$$

این چیزی شبیه آزادی پیمانه است، اگر ضریب x^2 را به اندازه A کم کنیم و به ضریب x^ix^j به اندازه $2A$ اضافه کنیم تفاوتی در تانسور ریمان ایجاد نمی‌شود، بنا بر این با انتخاب $A(t) = \frac{Sa^2}{3} - \dot{a}^2$ خواهیم داشت:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2[\delta_{ij} + (Sa^2 - \dot{a}^2)X^iX^j]dX^idX^j \tag{۷۵}$$

با توجه به معادله ۶۴ که همان معادله اول فریدمان است خواهیم داشت:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2[\delta_{ij} + kX^iX^j]dX^idX^j \tag{۷۶}$$

که این دقیقا بسط متریک FRW تا اولین جمله غیر صفر است. ملاحظه می‌کنیم که انحنای فضا صرفا به خاطر انتخاب دستگاه مختصات ایجاد شده است، معادلات فریدمان هم به عنوان معادلات حرکت ماده ظاهر شده اند و ماهیت معادلات دینامیکی فضا ـ زمان را ندارند. این متریک غیر از بردارهای چرخش سه بردار کیلینگ دیگر دارد که به صورت زیر است:

$$\xi^i(j) = \delta^i_j(1 - \frac{1}{2}kX^2); \xi^0 = 0 \tag{۷۷}$$

که دقیقا بسط اول بردارهای کیلینگ متریک سراسری FRW است:

$$\xi^i(j) = \delta^i_j \sqrt{1 - kX^2} \tag{۷۸}$$

که نشان می‌دهد این متریک تقارن فضایی کامل را دارد و می‌توان صفحات فضاـ گونه همگن برای آن نوشت که فرم آن مشخص است.

روش دیگر برای به دست آوردن متریک، استفاده مستقیم از رشته رشته کردن فضاـ زمان است که بسیار مشابه نحوه استدلال فُرم مرتیک FRW است، به این صورت که می توان با بازتعریف زمان $M = 1$ را به دست آورد و از روی همگنی و همسانگردی نتیجه گرفت که $M_i = 0$ است و $\dot{p}_{ij} \propto p_{ij}$ یا $p_{ij}(t) = a(t)^2 \tilde{p}_{ij}$ است، هم چنین از روی همگنی و همسانگردی می‌توان فهمید که انحنای فضایی این صفحات فضاگونه t ثابت تنها به یک پارامتر k بستگی دارد (یا متریک $\tilde{p}$ یک متریک متقارن بیشینه است) و در نهایت با جاگذاری در معادلات نسبیت عام رابطه این انحنا با معادلات a و ماده را به دست آورد. این روش گرچه متریک را به صورت سرتاسری به دست می‌دهد اما ماهیت معادله‌ـ حرکت گونه معادلات فریدمان را پنهان می‌کند. اما در روش اول ماهیت معادلات حرکت بودن معادلات فریدمان آشکار است، این که وجود ضریب مقیاس یک انتخاب دستگاه مختصات هوشمندانه است و این که انحنای فضایی چه ارتباطی با این انتخاب دستگاه مختصات دارد و ... همگی واضح و آشکار هستند.

به عنوان آخرین نکته برای این که به طور صریح نشان دهیم انحنای فضایی کاملا وابسته به انتخاب دستگاه مختصات است، در تبدیل ۷۲ ضریب A را به صورت $A(t) = -\frac{1}{2}(Sa^2/3 + \dot{a})$ انتخاب می‌کنیم بنا بر این متریک به صورت زیر در می‌آید:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(\delta_{ij} - \frac{1}{2}(Sa^2 - \dot{a}^2)X^2) = -dt^2 + a(t)^2\delta_{ij}(1 - \frac{1}{2}kX^2) \tag{۷۹}$$

بنا بر این با تبدیل

$$t \to \tilde{t} = t - \frac{kX^2}{4\dot{a}} \tag{۸۰}$$

قسمت فضایی متریک به طور کامل تخت می شود که کاملا نشان از ماهیت مختصاتی انحنای فضایی دارد.