



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پرستان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی

پایه ی هشتم

(ویژه ی مدارس استعداد های درخشان استان اصفهان)



مرکز علمی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره‌ی استعدادهای درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی هنرمندان پایه‌ی هشتم

شناسنامه جزوه:

ریاضی تکمیلی

پایه‌ی هشتم

(ویرایش مدارس استعدادهای درخشان استان اصفهان)

دسته‌بندی مطالب توسط:

گروه ریاضی دبیرستان شهید آره‌ای (۱) اصفهان (دوره‌ی اول)

تنظیم توسط:

حمید شیخ الاسلامی

معاون فناوری دبیرستان شهید آره‌ای (۱) اصفهان (دوره‌ی اول)

آبان ماه ۱۳۹۳

جهت دریافت فایل جزوه به آدرس www.mrse1.ir بخش نشریه الکترونیکی مراجعه فرمایید.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
اداره‌ی استعدادهای درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی نهم و شان پایه‌ی هشتم

بسم الله الرحمن الرحيم

حضرت آیت الله خامنه‌ای در دیدار با نخبگان و برگزیدگان علمی:

تهیه‌ی سند ملی نخبگان یکی از اقدامات بسیار ضروری و مهم

است، زیرا مسیر شناسایی و پرورش استعدادها را مشخص خواهد کرد.



فهرست:

صفحه	عنوان
۵	فصل یکم اعداد صحیح و گویا
۱۵	فصل دوم اعداد طبیعی
۲۵	فصل سوم چند ضلعی‌ها
۳۷	فصل چهارم جبر و معادله
۵۲	فصل پنجم بردار مختصات
۷۱	فصل ششم مثلث
۸۳	فصل هفتم توان و جذر
۹۸	فصل هشتم آمار
۱۰۰	فصل نهم دایره
۱۱۱	منابع و مراجع



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان
اداره‌ی استعدادهای درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی نهم و شان پایه‌ی هشتم

فصل یکم

اعداد صحیح

و گویا



۱) در موارد زیر، اعداد پشت پرانتز را در داخل پرانتز پخش کنید.

الف) $43 \times (11 + 13 - 6) =$

ب) $12 \times (-12 + 7/2) =$

ج) $-2 \times (101 + 202) =$

د) $-(14 + 18 - 33) =$

ه) $2^2 \times (3 + 5^3) =$

و) $7^2 \times 3^3 \times (2^3 - 6 + 15) =$

ز) $-12 \times (3 + 7 \times 2) =$

ح) $3^2 \times 4 \times (17 - (6 \times 5)) =$

حال که با خاصیت پخشی آشنا شدید، به راحتی می‌توانید با عملیاتی آشنا شوید که به «فاکتورگیری» معروف است. عملیات فاکتورگیری دقیقاً عکس خاصیت پخشی است. یعنی اگر به عنوان مثال طرفین تساوی

$$220 \times (18 + 42 + 6 + 22) = 220 \times 18 + 220 \times 42 + 220 \times 6 + 220 \times 22$$

را جابه‌جا کنیم، به عملیات فاکتورگیری می‌رسیم.

$$220 \times 18 + 220 \times 42 + 220 \times 6 + 220 \times 22 = 220 \times (18 + 42 + 6 + 22)$$

در واقع در تساوی بالا از عدد ۲۲۰ فاکتور گرفته‌ایم.

مثال: در تساوی‌های زیر، از عدد ۶ فاکتور گرفته شده است.

الف) $6 \times 11 + 6 \times 15 - 6 \times 12 = 6 \times (11 + 15 - 12)$

ب) $24 - 36 - 30 = 6 \times 4 - 6 \times 6 - 6 \times 5 = 6 \times (4 - 6 - 5)$



۲) در موارد زیر، از بزرگ‌ترین عدد ممکن فاکتور بگیرید.

الف) $9 \times 15 + 9 \times 3 + 9 \times 5 =$

ب) $2 \times 12 + 2 \times 18 - 2 \times 21 =$

ج) $24 + 32 + 40 - 56 =$

د) $120 + 24 - 72 =$

ه) $2^2 \times 6 - 2 \times 14 + 4 \times 10 =$

و) $2^2 \times 3^2 - 2^3 \times 3^2 =$

ز) $2^5 \times 3^2 \times 7 \times 11 - 2^4 \times 3^3 \times 5 \times 7 + 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 =$

ح) $40 + 400 - 8 \times 25 =$

تمرین

۱) حاصل عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $[-2 - (-8)] \times [-24 \div 4] =$

ب) $[(-2) - (+3)] + [-(-4) - +6] =$

ج) $(-10 + 5)(-9 + 5)(-8 + 5) \dots (-2 + 5)(-1 + 5) =$

د) $\frac{75 \times (-72)}{(-50) \times (-27)} =$

ه) $\frac{(-70) \times (-48)}{(-42) \times (40)} =$

و) $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots + 98 - 99 + 100 =$



۲) در دنباله‌های زیر، ۲ عدد بعدی را بگویید.

الف) $1, 4, -9, 16, \dots$

ب) $1, -2, 3, -5, 8, \dots$

۳) کدام یک از این دو عدد، به -51 نزدیک‌تر است؟ -48 یا -55 ؟

۴) کدام یک از این دو عدد، از قرینه‌ی 10 - کوچکتر است؟ 3 یا -3 ؟

۵) الف) جاهای خالی را با دو عدد پر کنید به طوری که تساوی درست شود.

$$(\square \times (+3)) - (\square \times (-2)) = 8$$

ب) برای «الف» جوابی دیگر بیابید.

۶) درست یا غلط؟

«اعداد صحیح منفی بزرگتر از -5 ، پنج عضو دارد.»

ب) برای «الف» جوابی دیگر بیابید.

۶) درست یا غلط؟

«اعداد صحیح منفی بزرگتر از -5 ، پنج عضو دارد.»



تمرین

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $4^2 - 3^2 + 2^2$

ب) $4^3 + 3^2 - 2 \times 5^2$

ج) $6 \times 2^3 - 7^0 \times 6^2$

د) $(7^2 - 5^2)(6 \times 3^2 + 4) \times 2^0 - 2^5$

ه) $(5^3 - 3^5)(3^2 - 2^3)^4 - 5^4$

و) $(-5 \times 4)^2 \div 2^4 \times (-3)^2$

ز) $(2 - 3^2 \times 5^2 \div 15 - 2^3) \times (7 + 2)$

ح) $(4^3 - 5^2 \times 2)^2 - 8 \div 2^{(3-1 \times 2)} - 4 \times (8 + 3^2)$

ط) $5^2 - (3^2 - 1^2) \times 2^2 \div 4^2$

ی) $((1 \times 2 \div (3 \times 4) - 5) \times 6 - 7) \div (8 \times 9)$



تمرین

۱. عبارات زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

الف) $3 - 2\frac{1}{3}$

ب) $(12 - 3\frac{1}{5}) - 4$

ج) $\frac{-20}{35} + \frac{-2}{7} - \frac{10}{5}$

د) $(\frac{3}{8} - \frac{2}{6}) \div (\frac{1}{2\frac{2}{5} + 3\frac{3}{5}})$

ه) $\frac{\frac{15}{32} \times \frac{13}{4}}{-\frac{3}{8} \times \frac{4}{16}} \div 52$

۲. در هر دسته، حاصل عبارات را به دست آورید:

الف) $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$

ب) $\frac{8}{5} \div 4$

دسته‌ی اول:

الف) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{6}}$

ب) $\frac{-\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}}$

دسته‌ی دوم:

الف) $\frac{2}{\frac{3}{4}}$

ب) $\frac{\frac{1}{5}}{-3}$

دسته‌ی سوم:

الف) $\frac{\frac{8}{2}}{\frac{5}{6}}$

ب) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$

ج) $\frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{18}}$

د) $\frac{\frac{18}{2}}{\frac{8}{6}}$

دسته‌ی چهارم:



۳. بین دو عدد ۹ و ۱۰، سی عدد گویا بنویسید.

۴. اگر $\frac{1}{x} + \frac{5}{x} + \frac{8}{x} + \frac{13}{x} = \frac{3}{2}$ مقدار x را پیدا کنید.

۵. اگر به مخرج کسر $\frac{10}{15}$ عدد ۶ را اضافه کنیم، چه عددی باید به صورت آن اضافه کرد تا مقدار کسر تغییر نکند.

۶. حاصل عبارت زیر تقریباً چند است؟

$$\frac{1023}{2048} + \frac{513}{511} - \frac{301}{900} + \frac{5}{6}$$

۷. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \dots \times \frac{1}{99} =$

ب) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right) =$

ج) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{100}\right) =$

د) $\left(2 - \frac{2}{3}\right) \left(2 - \frac{2}{4}\right) \left(2 - \frac{2}{5}\right) \dots \left(2 - \frac{2}{100}\right) =$



۸. در تساوی زیر مقدار m و n را به دست آورید.

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{m}{n} = 3$$

۹. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} =$

ب) $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{49 \times 51} =$

ج) $\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \dots + \frac{1}{32 \times 35} =$

د) $\frac{2+4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4+6}{4 \times 5 \times 6} + \frac{6+8}{6 \times 7 \times 8} + \dots + \frac{18+20}{18 \times 19 \times 20} =$

ه) $\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{46 \times 51} =$

و) $\frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \dots + \frac{1}{21 \times 24} =$

ز) $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{98 \times 100} =$



کسره‌های مصری

در این قسمت هر موقع که نام عدد گویا را می‌آوریم، منظورمان یک عدد گویا بین 0 و 1 است. یکی از جذاب‌ترین و شاید هم پیچیده‌ترین کارهای محاسباتی در ریاضیات، تبدیل کردن یک عدد گویا به کسره‌های مصری است. کاری که مصری‌ها علاقه‌ی زیادی به انجام دادن آن داشتند.

نوشتن یک عدد گویا به صورت کسره‌های مصری، نوشتن آن عدد به صورت مجموعی از کسرهایی است که صورت آن کسرها 1 و مخرج‌شان یک عدد طبیعی است به طوری که مخرج کسرها تکراری نباشند.

این‌که مصری‌ها با چه انگیزه‌ای به محاسبه‌ی این کسرها می‌پرداختند، جای سؤال است.

برای تبدیل کردن یک عدد گویا به کسره‌های مصری، روش‌های فراوانی وجود دارد.

در مثال‌های زیر، هر عدد گویا به صورت کسره‌های مصری نوشته شده است.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{13} + \frac{1}{156}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

کسر $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ به صورت کسره‌های مصری نوشته نشده است. زیرا از مخرج 8 دوبار استفاده شده

است. امروزه ریاضی‌دانان می‌دانند که هر عدد گویا را می‌توان به صورت کسره‌های مصری نوشت.



تمرین

۱. اعداد زیر را به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{5}{6} =$$

$$\frac{4}{13} =$$

$$\frac{5}{121} =$$

$$\frac{7}{12} =$$

$$\frac{2}{7} =$$

$$\frac{6}{23} =$$

$$\frac{43}{48} =$$

$$\frac{2}{35} =$$

$$\frac{5}{29} =$$

اگر حل تمرین بالا برایتان دشوار است، می‌توانید «کسره‌های مصری» را از وبگاه ریاضی بخوانید، تا بتوانید تمرین بالا را به راحتی حل کنید.

۲. اعداد زیر را به صورت کسره‌های مصری بنویسید.

$$\frac{823}{1024} =$$

$$\frac{400}{729} =$$

$$\frac{371}{512} =$$

$$\frac{73}{81} =$$

$$\frac{59}{64} =$$

$$\frac{13}{27} =$$



فصل دوم

حساب و

اعداد طبیعی



کاربرد تجزیه

۱. آیا 5×2^9 بر ۸ بخش پذیر است؟
۲. آیا 3×2^9 بر ۹ بخش پذیر است؟
۳. آیا 3×2^9 بر ۶ بخش پذیر است؟
۴. اگر یک عدد طبیعی به ۳ و ۴ بخش پذیر باشد، آیا بر ۱۲ نیز بخش پذیر می‌باشد؟
۵. اگر یک عدد طبیعی به ۶ و ۴ بخش پذیر باشد، آیا بر ۲۴ نیز بخش پذیر است؟
۶. عدد A بر ۳ بخش پذیر نیست، آیا ممکن است پنج برابر آن عدد ($5A$) بر ۳ بخش پذیر باشد؟
۷. عدد A زوج است، آیا $3A$ بر ۶ بخش پذیر است؟

الک اراتستن

۱. وقتی بخواهند دانه‌های گندم را از اضافه‌های آن جدا کنند از الک خاصی استفاده می‌کنند که سوراخ‌های آن با اندازه‌های دانه‌های گندم متناسب باشد. اراتستن، ۲۰۰۰ سال پیش، روش بسیار دقیق و قابل اعتماد خود را ارائه کرد. او روی مضارب ۲ و ۳ و ۵ و ... را خط نمی‌کشید، بلکه آن‌ها را با یک چوب کوچک، سوراخ می‌کرد مثل اینکه عددهای غیر اول را، از سوراخ‌های الک بیرون می‌کرد و تنها عددهای اول را نگاه می‌داشت.
- اژدر که خود را یکی از نوادگان اراتستن معرفی کرده است، معتقد است در روش جدش، رازهایی موجود می‌باشد. او می‌گوید یکی از این رازها مربوط به آخرین عدد اولی است که مضاربش در الک حذف می‌شود. مثلاً در الک اعداد ۱ تا ۸ آخرین عدد اولی که مضاربش خط می‌خورند عدد ۲ می‌باشد. او برای کشف این راز دو جدول زیر را تهیه کرد. جداول اژدر را کامل کنید.



(جدول الف)

۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	عدد آخر الک
۵	۴/۹	۴/۸	۴/۷	۴/۶	۴/۵	۴/۳	۴/۲	۴/۱	۴	۳/۸	۳/۷	۳/۶	۳/۴	۳/۳	۳/۱	۳	۲/۸	جذر تقریبی عدد آخر الک
					۳				۳				۳				۲	آخرین عدد اول استفاده‌شده

(جدول ب)

۱۲۱	۱۰۰	۸۱	۶۴	۴۹	۳۶	۲۵	۱۶	۹	عدد آخر الک
						۵	۴	۳	جذر عدد آخر الک
							۳	۳	آخرین عدد اول استفاده‌شده

الف) در جدول اول، آخرین عدد اول استفاده شده در چه ستون‌هایی تغییر می‌کند؟

ب) در جدول اول، ستون بعدی که ردیف سوم روی آن تغییر می‌کند چند است؟

پ) در جدول دوم، عدد بعدی که، ستونش هاشور خواهد خورد چه عددی می‌باشد؟

ت) آیا می‌توانید رابطه‌ای میان آخرین عدد اول استفاده شده در الک و عدد آخر الک بیابید؟

۲. قاعده‌ای برای یافتن آخرین عدد اول استفاده شده در الک اعداد ۱ تا n بیابید؟

۳. هژبر و هژبر یک بازی اختراع کرده‌اند. آن‌ها اعداد طبیعی بین ۱ تا ۶۰ را نوشته‌اند و طبق روش الک



اراتستن اعداد غیر اول را به نوبت حذف می‌کنند. هر کس عدد ۴۵ را حذف کند برنده است.

➔ هزیر بازی را شروع می‌کند و ۱ را حذف می‌کند.

➔ هزیر عدد ۴ را حذف می‌کند.

➔ هزیر ۶ را حذف می‌کند و این کار ادامه می‌یابد.

به نظر شما چه کسی برنده است؟

۴. هزیر و هزیر بازی خود را کمی پیشرفته‌تر کرده اند! در بازی جدید باز هم الگ اراتستن اعداد بین ۱

تا ۶۰ استفاده می‌شود اما کسی که آخرین عدد را حذف کند برنده است! به نظر شما کدام عدد

آخرین عدد حذف شده خواهد بود؟ و اگر هزیر بازی را شروع کند چه کسی برنده خواهد شد؟

۵. در بازی بین هزیر و هزیر ۴۱ امین عددی که خط می‌خورد کدام عدد است؟

۶. الگ اراتستن، روش خوب و قابل اعتمادی می‌باشد و برای نیازهای کوچک، همیشه می‌توان از همان

«الگ دستی اراتستن» استفاده کرد. این روش هم در گذر تاریخ به تدریج پیشرفت‌هایی کرده است و

روش جستجوی عددهای اول ساده‌تر شده است. مثلاً یک دانشجو در سال ۱۳۲۳ شمسی و در ایام

جنگ جهانی دوم، یکی از این «الگ»‌های جدید را درست کرده است که آن را بررسی می‌کنیم:



به اعداد زیر دقت کنید. آیا رابطه‌ای میان اعداد این جدول مشاهده می‌کنید؟

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	...
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	۳۲	...
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	۴۵	...
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	...
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	...
۱۹	۳۲	۴۵	۵۸	۷۱	۸۴	...

اگر عددی مثل n در این جدول وجود داشته باشد، عدد $2n+1$ غیر اول است، و اگر عدد n در جدول وجود نداشته باشد $2n+1$ عددی است اول.

مثلاً:

(۱) در جدول عدد $n=3$ وجود ندارد، بنابراین $2n+1=7$ عدد اول است.

(۲) در جدول عدد $n=5$ وجود ندارد، بنابراین $2n+1=11$ عدد اول است.

(۳) عدد $n=6$ هم در جدول نیست، بنابراین $2n+1=13$ عدد اول است.

(۴) در جدول عدد $n=7$ وجود دارد، بنابراین $2n+1=15$ عددی است غیر اول و غیره.

اگر اعدادی را که در این جدول نیستند را دو برابر کرده با یک جمع کنیم، می‌توانیم تمام اعداد اول را به دست آوریم. با این روش ۳۰ عدد اول به دست آورید.



کاربرد اعداد اول

۱- آیا اعداد زیر اول هستند؟ چرا؟

الف) $۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۶۰۳$

ب) ۲۰۰۹

پ) $(۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۲۰) + ۱۷$

ت) $۲^{۵۰} + ۱$

ث) $۳^{۱۷} + ۱$

۲- چنگیز دانش‌آموز سوم راهنمایی است. او می‌داند که اعداد اول کاربردهای بسیاری دارند. او در یک وب‌گاه معتبر خوانده است که ارتش‌های کشورهای مختلف از اعداد اول برای رمزنگاری استفاده می‌کنند و هر کشوری که عدد اول بزرگتری در اختیار داشته باشد که دیگر کشورها هنوز از آن مطلع نباشند دارای قدرت فوق‌العاده‌ای در رمز کردن اطلاعات خود خواهد بود. او در این وب‌گاه همچنین خواند که اعداد اول بزرگ قیمت زیادی دارند و می‌توان آن‌ها را فروخت.

چنگیز بعد از خواندن این مطلب شروع به یافتن بزرگ‌ترین عدد اول کرد. او می‌خواهد عدد اولی از کنار هم قرار دادن اعداد اول متوالی به‌دست آورد مثلاً ۲۳۵۷۱۱۱۳۱۷۱۹۲۳ . اما او می‌داند برای هر کشفی باید پله‌پله و آرام‌آرام حرکت کند. چنگیز در حالی که زیر لب زمزمه می‌کرد: «رهرو آن



نیست که گه تند و گهی خسته رود ، رهرو آنست که آهسته و پیوسته رود» کار جستجوی خود را

با عدد ۲۳۵۷ شروع کرد. آیا عدد ۲۳۵۷ اول است؟ ۲۳۵۷۱۱؟ چطور؟

۳- چنگیز این بار می‌خواهد از جمع چند عدد مربعی یک عدد اول بیابد. به همین دلیل جدولی مانند زیر

درست کرده است. جدول چنگیز را کامل کنید و درباره‌ی اول یا مرکب بودن این مجموع در حالت

کلی $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ تصمیم بگیرید؟

اول است یا مرکب	حاصل	عدد
اول است.	$\frac{2 \times (2+1) \times (2 \times 2 + 1)}{6}$	$1^2 + 2^2$
مرکب است.	$\frac{3 \times (3+1) \times (2 \times 3 + 1)}{6}$	$1^2 + 2^2 + 3^2$
	$\frac{4 \times (4+1) \times (2 \times 4 + 1)}{6}$	$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
		$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$
		$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2$
		$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 7^2$
		$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$



۴- روح‌انگیز نیز به دنبال یک عدد اول است. او می‌خواهد ۵ عدد متوالی بیابد که مجموع آنها اول باشد.

او جدولی مانند جدول زیر رسم کرده است. به او در پر کردن جدول کمک کنید. آیا او موفق به

یافتن این ۵ عدد می‌شود؟

اعداد	حاصل	اول یا مرکب
$1+2+3+4+5$	۱۵	مرکب
$2+3+4+5+6$		
$3+4+5+6+7$		
$4+5+6+7+8$		
$5+6+7+8+9$		
$6+7+8+9+10$		
$7+8+9+10+11$		

فرمول‌هایی برای اعداد اول

۱- برای کشف رازهای اعداد اول در طول تاریخ سعی و تلاش‌های بسیاری شده است. بسیاری از

ریاضی‌دانان به دنبال یافتن رابطه‌ای میان اعداد اول بوده‌اند و فرمول‌های بسیاری در این زمینه تولید

شده‌اند یکی از این فرمول‌های جالب، مربوط به اویلر ریاضیدان معروف سوئیسی می‌باشد.



فرمول اویلر: ای فرزندی، راز یافتن یک عدد اول اینک پیش روی توست. یک عدد طبیعی انتخاب کن. آن را با مربعش و عدد ۴۱ جمع کن. حاصل این مجموع حتماً عددی اول است.

جدولی مانند زیر تشکیل داده و فرمول اویلر را برای اعداد ۱ تا ۲۰ بررسی کنید.

عدد	فرمول اویلر	حاصل	اول است ؟
۱	$1 + 1^2 + 41$	۴۳	✓
۲	$2 + 2^2 + 41$	۴۷	✓
۳	$3 + 3^2 + 41$	۵۳	✓
۴	$4 + 4^2 + 41$	۶۱	✓
۲۰	$20 + 20^2 + 41$	۴۶۱	

۲- مارتین مرسن (۱۰۲۷-۹۶۷ هجری شمسی) یک کشیش ریاضی کار بود. این ریاضی کار فرانسوی نیز

علاقه‌ی زیادی به اعداد اول داشت. او ادعا کرد که «تمام اعداد به شکل $2^p - 1$ اگر p یک عدد اول باشد» عدد اول می‌باشند. ادعای مرسن را برای اعداد مختلف بررسی کنید.

۳- «مرادخان» روزهای بسیاری صرف کشف رازهای اعداد اول کرد و این کار را آنقدر ادامه داد تا اینکه خسته و منصرف شد. او برای فراموش کردن اعداد اول به تازگی شروع به نواختن ویولن کرده است. او مجموعه‌ای از نت‌های کوتاه و کشیده را می‌نوازد که می‌توان آن‌ها را با صفر (نت‌های



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان

۲- مارتین مرسن (۱۰۲۷-۹۶۷ هجری شمسی) یک کشیش ریاضی کار بود. این ریاضی کار فرانسوی نیز علاقه‌ی زیادی به اعداد اول داشت. او ادعا کرد که «تمام اعداد به شکل $2^p - 1$ اگر p یک عدد اول باشد» عدد اول می‌باشند. ادعای مرسن را برای اعداد مختلف بررسی کنید.

۳- «مرادخان» روزهای بسیاری صرف کشف رازهای اعداد اول کرد و این کار را آنقدر ادامه داد تا اینکه خسته و منصرف شد. او برای فراموش کردن اعداد اول به تازگی شروع به نواختن ویولن کرده است. او مجموعه‌ای از نت‌های کوتاه و کشیده را می‌نوازد که می‌توان آن‌ها را با صفر (نت‌های کشیده) و یک (نت‌های کوتاه) نشان داد:

$\cdot \mid \mid \mid \cdot \mid \cdot \cdot \cdot \mid \cdot \mid \cdot \cdot \cdot \mid \cdot \mid \cdot \cdot \cdot \mid \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mid \cdot \mid \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mid \cdot \cdot \cdot \mid \cdot \mid \cdot$

به نظر شما مرادخان چه قاعده‌ای برای نواختن دارد؟ آیا او عدد اول را فراموش کرده است؟

۴- در اینجا، در یک سطر رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ و در زیر آن‌ها حروف الفبای فارسی را از «الف» تا «د» نوشته شده است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰
الف	ب	پ	ت	ث	ج	چ	ح	خ	د

می‌توانیم واژه‌ی «باد» را با عدد «۲۱۰» نشان دهیم: حرف‌های واژه‌ی باد، یعنی «ب»، «ا» و «د» با عدد‌های «۲»، «۱» و «۰» مشخص می‌شوند و اگر رقم‌ها را از چپ به راست بنویسیم، به عدد ۲۱۰ می‌رسیم.

الف) اکنون شما عددهای مربوط به واژه‌های «تاب»، «تخت» و «ادب» را با عدد بنویسید.

(ب) عددهای مرکب ۹۰۱، ۴۸۴ و ۱۵۱۵ برای کدام واژه‌ها هستند؟ معنی این واژه‌ها را بگویید.

(پ) با این ده رقم، آیا می‌توانید عدد اولی بنویسید که واژه‌ی نظیر آن، معنا داشته باشد؟ بزرگ‌ترین عدد اولی که واژه نظیر آن با معنی باشد، در این سؤال چند است؟



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی نهم و شان پایه ی هشتم

فصل سوم

چند ضلعی ها



تمرین

۱. الف) یک شکل رسم کنید که ۷ محور تقارن داشته باشد.
- ب) آیا شکلی وجود دارد که ۱۰۰ محور تقارن داشته باشد؟
- ج) آیا شکلی وجود دارد که ۱۰۱ محور تقارن داشته باشد؟
۲. الف) آیا یک ۵ ضلعی وجود دارد که مرکز تقارن داشته باشد؟
- ب) آیا یک ۶ ضلعی وجود دارد که مرکز تقارن داشته باشد؟
- ج) به جای اعداد ۵ و ۶ چه اعدادی می توان قرار داد تا پاسخ مثبت باشد.
۳. به چند حالت می توان مثلثی رسم کرد که فقط یک محور تقارن داشته باشد به طوری که یکی از زاویه های آن 30° درجه و ضلع مجاور به آن زاویه ۳ سانتی متر باشد. تمام حالت های ممکن را رسم کنید.
۴. به چند حالت می توان یک چهارضلعی رسم کرد به طوری که فقط دو محور تقارن داشته باشد و اندازه ی یک زاویه ی آن 30° درجه و ضلع مجاور به آن زاویه ۳ سانتی متر باشد. تمام حالت های ممکن را رسم کنید.
۵. الف) آیا می توان یک مثلث رسم کرد که دقیقاً ۳ محور تقارن داشته باشد؟
- ب) آیا می توان یک چهارضلعی رسم کرد که دقیقاً ۳ محور تقارن داشته باشد؟
۶. نشان دهید اگر یک متوازی الاضلاع محور تقارن داشته باشد، آن متوازی الاضلاع یا مستطیل است یا لوزی و یا مربع.
۷. آیا غیر از مربع، چهارضلعی وجود دارد که دقیقاً چهار محور تقارن داشته باشد؟



۸. آیا می‌توان بر روی صفحه‌ی کاغذ شکلی رسم کرد که:

الف) دو محور تقارن موازی داشته باشد.

ب) دو مرکز تقارن داشته باشد.

۹. می‌دانیم قرینه‌ی یک مثلث نسبت به یکی از اضلاع آن به همراه خود آن مثلث، تشکیل یک مربع می‌دهند. آن مثلث را توصیف کنید.

۱۰. آیا می‌توانید چهارضلعی بیابید که محور تقارن داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد؟

۱۱. یک چهارضلعی داریم که محور تقارن آن، یکی از قطرهای چهارضلعی است. زاویه‌ی بین قطرهای این چهارضلعی چند درجه است؟

۱۲. آیا می‌توانید بر روی صفحه‌ی کاغذ، شکلی غیر از دایره رسم کنید که بی‌شمار محور تقارن داشته باشد.

۱۳. آیا اگر شکلی دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد، آن دو محور برهم عمودند؟ برای ادعای خود دلیل بیاورید.

۱۴. آیا شکلی وجود دارد که زاویه‌ی بین دو محور تقارن متوالی آن ۱۱ درجه باشد؟

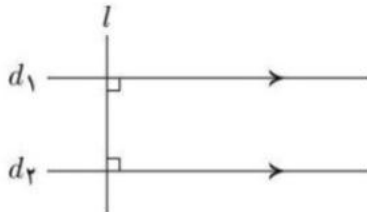
۱۵. آیا می‌توانید شکلی بیابید که فقط دو محور تقارن داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد؟

۱۶. شکلی را معرفی کنید که دقیقاً دارای ۱۱۵ محور تقارن باشد. کمترین زاویه‌ی بین دو محور تقارن از این شکل چقدر است؟



قضیه‌ی دو خط عمود بر یک خط:

دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.



۱. قضیه‌ی قبل را ثابت کنید.

باید ثابت کنید که اگر دو زاویه‌ی قائمه مطابق شکل داشته باشیم، d_1 و d_2 با هم موازی خواهند شد.

آنچه گذشت ...

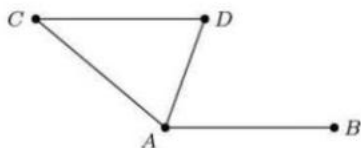


۲. روش رسم خطی گذرنده از نقطه‌ی P که با خط d موازی باشد را شرح دهید.

P .

_____ d

۳. فرض کنید AD نیمساز $\widehat{CAB}$ است و $CA = CD$. ثابت کنید AB و CD با هم موازی‌اند.





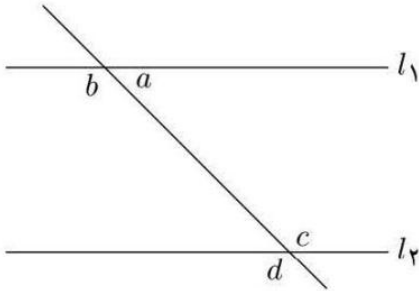
۴. در کدامیک از موارد زیر می‌توان نتیجه گرفت که $l_1 \parallel l_2$.

الف) $\hat{c} = 100^\circ$ و $\hat{a} = 80^\circ$

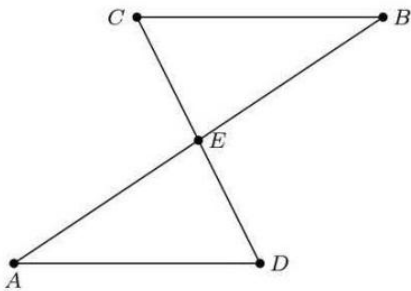
ب) $\hat{d} = 100^\circ$ و $\hat{b} = 120^\circ$

ج) $\hat{d} = 100^\circ$ و $\hat{a} = 70^\circ$

د) $\hat{c} = 90^\circ$ و $\hat{a} = 90^\circ$

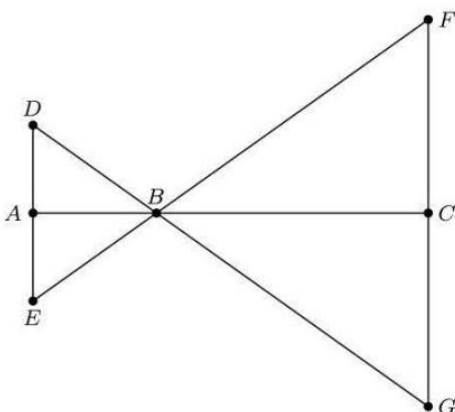


۵. AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند؛ ثابت کنید $AD \parallel CB$.



۶. در شکل زیر نقاط A, B و C روی یک خط قرار دارند. همچنین داریم: $BD = BE$, $AD = AE$.

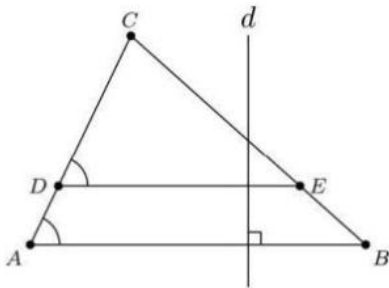
و $BF = BG$. ثابت کنید $DE \parallel FG$.





تمرین

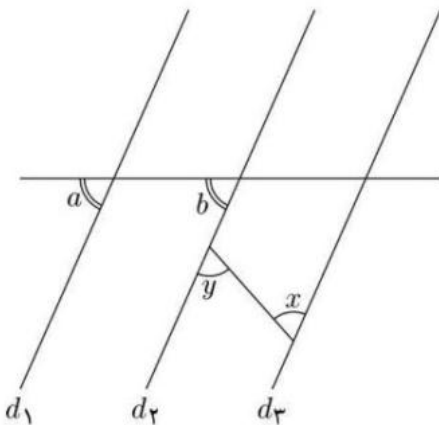
۱. در شکل زیر $\widehat{CDE} = \widehat{A}$ و $d \perp AB$ ؛ ثابت کنید $d \perp DE$.



۲. در چهار ضلعی $ABCD$ زاویه های $\widehat{A}$ ، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ قائمه هستند؛ ثابت کنید AD بر CD عمود است.



۳. در شکل زیر $\widehat{x} = \widehat{y}$ و همچنین $\widehat{a} = \widehat{b}$ ؛ ثابت کنید $d_1 \parallel d_3$.

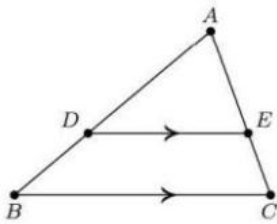




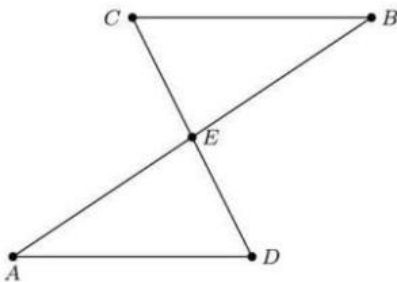
تمرین

۱. ثابت کنید اگر خطی به موازات قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقینی رسم شود و دوساق آن را در دو نقطه‌ی دیگر قطع کند، یک مثلث متساوی‌الساقین دیگر تشکیل می‌شود.

۲. در شکل زیر اگر $AB = BC$ و $BC \parallel DE$ ؛ ثابت کنید $AD = DE$.

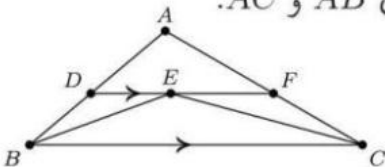


۳. در شکل زیر اگر $AD = CB$ و همچنین $AD \parallel CB$ ، ثابت کنید AB و CD یکدیگر را در E نصف می‌کنند.

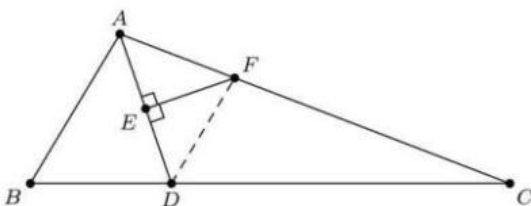


۴. با همان شرایط سؤال قبل، ثابت کنید $AC \parallel DB$.

۵. مطابق شکل، در مثلث $\triangle ABC$ ، BE نیمساز $\hat{B}$ ، CE نیمساز $\hat{C}$ و DF با BC موازی است. ثابت کنید محیط مثلث $\triangle ADF$ برابر است با مجموع اندازه‌ی طول ضلع‌های AB و AC .



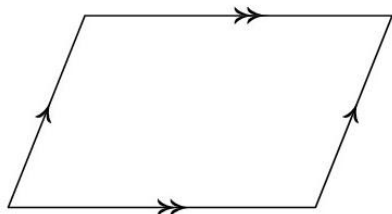
۶. مطابق شکل، در مثلث $\triangle ABC$ ، AD نیمساز $\hat{A}$ و همچنین EF عمود منصف AD است؛ ثابت کنید $DF \parallel AB$.





متوازی‌الاضلاع

تعریف. اگر اضلاع یک چهارضلعی دوه‌دو موازی باشند، به آن چهارضلعی «متوازی‌الاضلاع» گویند.



گزاره‌های زیر را ثابت کنید. این گزاره‌ها (به غیر از گزاره‌ی ۳)، خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع هستند.

۱. هر قطر، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث مساوی تقسیم می‌کند.

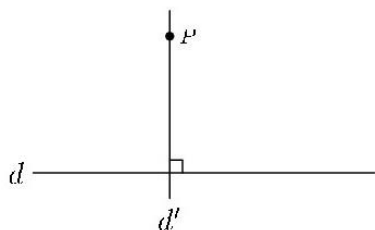
۲. در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل باهم مساوی‌اند.

تعریف. نقطه‌ی P و خط d را داریم.

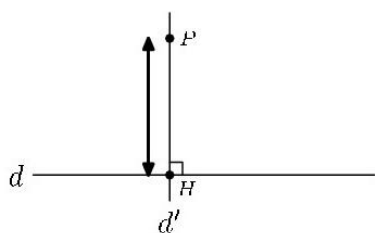
• P

d —————

همچنین می‌دانیم که خط d' از نقطه‌ی P می‌گذرد و بر خط d عمود است.



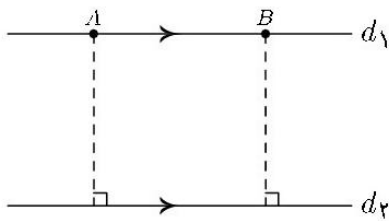
اگر محل تقاطع خط d و d' را H بنامیم، به اندازه‌ی پاره‌خط PH فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط d می‌گوییم.



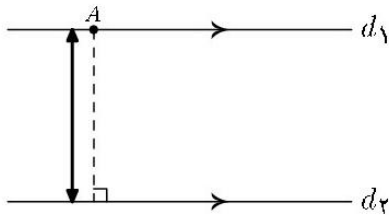


به عبارتی دیگر فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط d ، اندازه‌ی پاره‌خط عمودی است که از نقطه‌ی P برخط d رسم می‌شود.

۳. در هر دو خط موازی مانند $d_1 \parallel d_2$ ، تمام نقاط یک خط از خط دیگر به یک فاصله‌اند.



تعریفی با استفاده از گزاره‌ی ۳: فاصله‌ی بین دو خط موازی، فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه یک خط، از خط دیگر است.



۴. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مقابل مساوی‌اند.

۵. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.

۶. قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

گزاره‌های زیر را ثابت کنید. این گزاره‌ها کمک می‌کنند که تشخیص دهیم یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است یا خیر.

۱. اگر در یک چهارضلعی هر دو ضلع مقابل مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

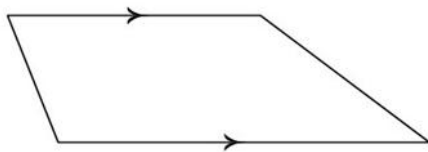
۲. اگر دو ضلع یک چهارضلعی موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۳. اگر دو قطر یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

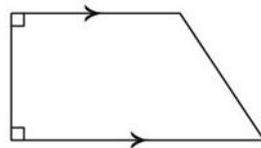
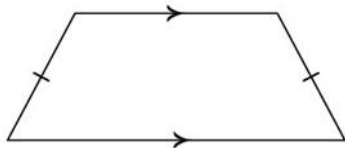


ذوزنقه

تعریف. اگر فقط دو ضلع یک چهارضلعی باهم موازی باشند، به آن چهارضلعی «ذوزنقه» گویند. دو ضلع موازی ذوزنقه را قاعده‌های ذوزنقه، و دو ضلع دیگر را ساق‌های ذوزنقه گویند.



ذوزنقه‌ای که دارای زاویه‌ی قائمه باشد، ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه و ذوزنقه‌ای که ساق‌های مساوی داشته باشد، ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین گویند.

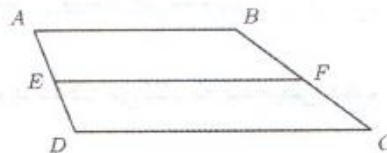


ذوزنقه‌ای که سه ضلع برابر داشته باشد را «ذوزنقه‌ی ایرانی» می‌گوییم. ایرانی‌ها از این ذوزنقه در کاشی کاری استفاده کرده‌اند.

میان خط ذوزنقه: میان خط پاره‌خطی است که وسط ساق‌های ذوزنقه را به هم وصل می‌کند. میان خط با قاعده‌های

$$EF = \frac{AB + CD}{2}$$

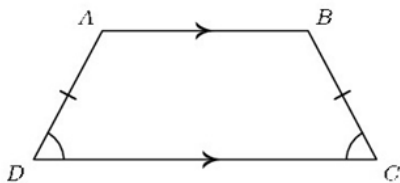
ذوزنقه موازی و اندازه‌ی آن برابر است با:





گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. زاویه‌های یک قاعده‌ی دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، باهم برابرند؛ یعنی $\hat{C} = \hat{D}$.



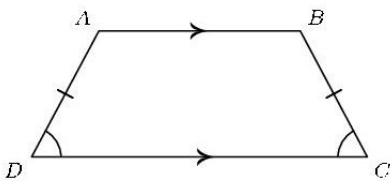
۲. قُصَرهای دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، مساوی‌اند.

۳. در هر دوزنقه، زوایای مجاور بر یک ساق مکمل هستند.

دوزنقه‌ای که سه ضلع برابر داشته باشد را «دوزنقه‌ی ایرانی» می‌گوییم. ایرانی‌ها از این دوزنقه در کاشی کاری استفاده کرده‌اند.

گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

۱. زاویه‌های یک قاعده‌ی دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، باهم برابرند؛ یعنی $\hat{C} = \hat{D}$.



۲. قُصَرهای دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، مساوی‌اند.

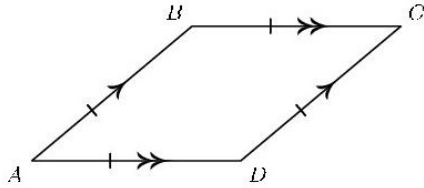
۳. در هر دوزنقه، زوایای مجاور بر یک ساق مکمل هستند.

دوزنقه‌ای که سه ضلع برابر داشته باشد را «دوزنقه‌ی ایرانی» می‌گوییم. ایرانی‌ها از این دوزنقه در کاشی کاری استفاده کرده‌اند.



لوزی

تعریف. لوزی، متوازی الاضلاعی است که اضلاعش مساوی اند.



گزاره های زیر را ثابت کنید.

۱. قطرهای لوزی برهم عمودند.
۲. اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند و برهم عمود باشند، آن چهارضلعی لوزی است.
۳. اگر در متوازی الاضلاعی دو ضلع مجاور برابر باشند، آن چهارضلعی لوزی خواهد بود.



فصل چهارم

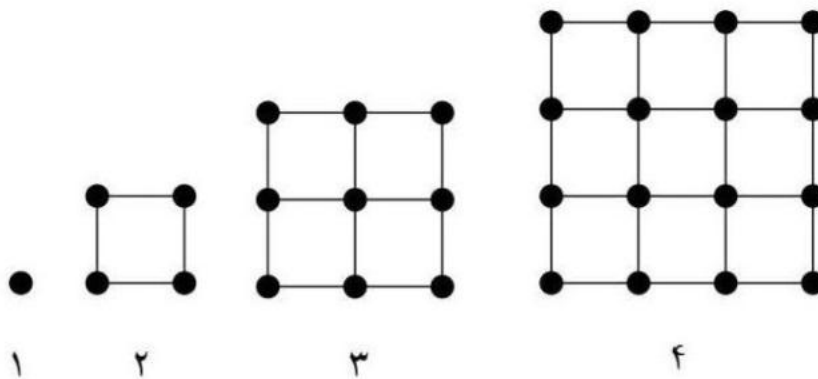
جبر و معادله



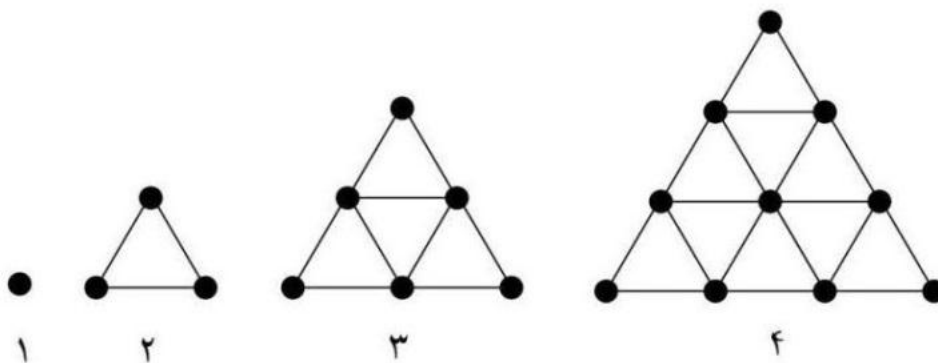
عبارت‌های جبری - یافتن جمله‌ی $n^{\text{ام}}$

۱. در ریاضیات بعضی دنباله‌ها بسیار معروف می‌باشند. در زیر چند دنباله‌ی شکلی آمده است. در این شکل‌ها تعداد دایره‌های سیاه موجود در شکل با شماره‌ی آن رابطه‌ای دارند. در مورد هر دنباله ابتدا شکل بعدی را رسم کرده و سپس تعداد دایره‌های سیاه $n^{\text{ام}}$ شکل را با یک رابطه‌ی جبری بیان کنید.

الف) اعداد مربعی

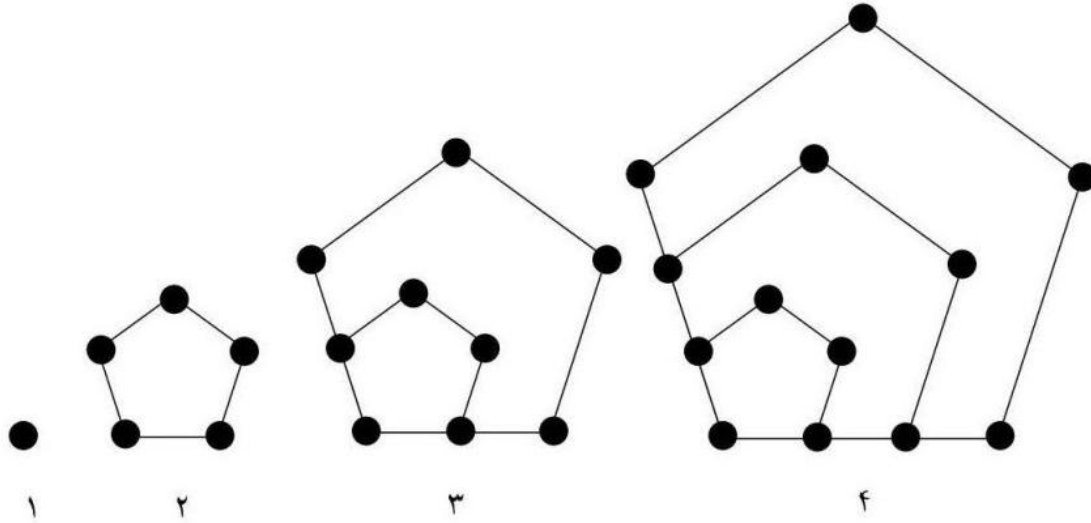


ب) اعداد مثلثی

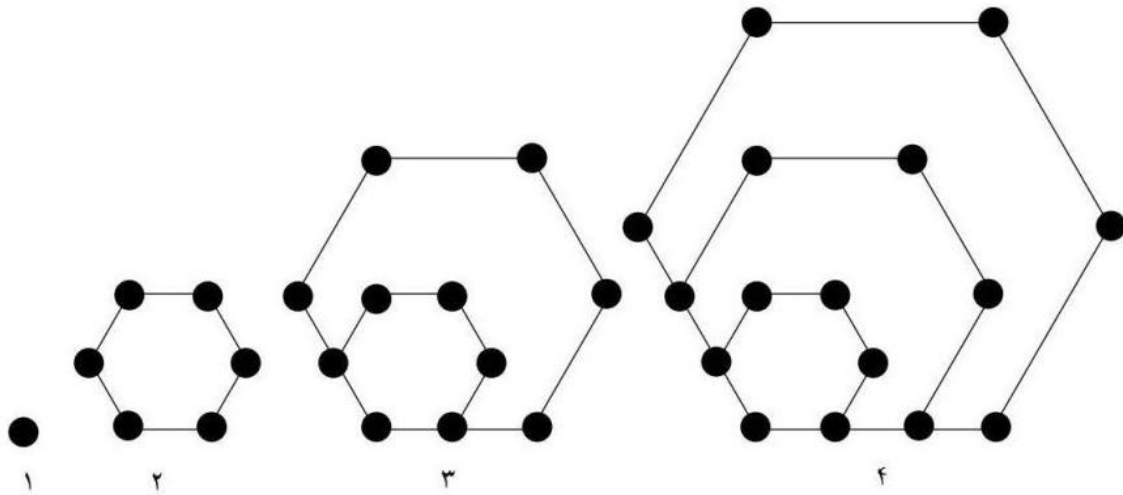




پ) اعداد مُخَمَّسی



ت) اعداد مُسَدَّسی





۲. «لیندا» با جمع و تفریق بعضی دنباله های بالا، دنباله های جدیدی به دست آورده است.
مثلاً با جمع کردن دو دنباله ی اول (اعداد مربعی و مثلثی) دنباله ی

$$۲, ۷, ۱۵, ۲۶, ۴۰, \dots$$

را ساخته است. جمله n ام هر یک دنباله های لیندا را بیابید.

الف) $۲, ۷, ۱۵, ۲۶, ۴۰, \dots$

ب) $۲, ۸, ۱۵, ۲۳, ۳۲, \dots$

پ) $۲, ۱۰, ۲۰, ۳۲, ۴۶, \dots$

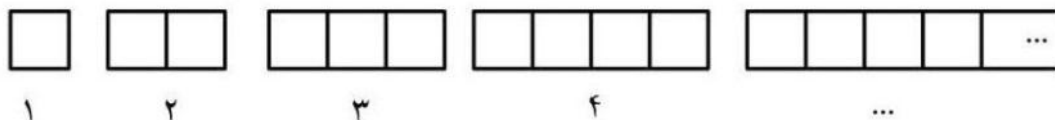
ت) $۲, ۹, ۱۸, ۲۹, ۴۲, \dots$

ث) $۲, ۱۱, ۲۰, ۲۹, ۳۸, \dots$

ج) $۳, ۱۴, ۲۶, ۳۹, ۵۳, \dots$

۳. نشان دهید جمع هر دو عدد مثلثی متوالی، یک عدد مربعی است.

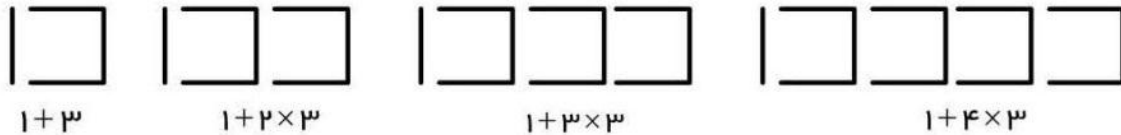
۴. آقای «ترنم» معلم ریاضی سال سوم راهنمایی است. او روی تخته ی کلاس با چوب-کبریت دنباله ی شکلی زیر را رسم کرد و از دانش آموزان خواست تعداد چوب کبریت-های n امین شکل را بیابند.



هر یک از دانش آموزان یک روش را برای شمارش تعداد چوب کبریت های هر شکل پیشنهاد کردند.



الف) «تفکر» گفت می‌توانیم تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل را بدین صورت بشماریم:



با روش تفکر، جمله‌ی n ام این دنباله را بیابید.

ب) «تحول» دوست تفکر نوشت:

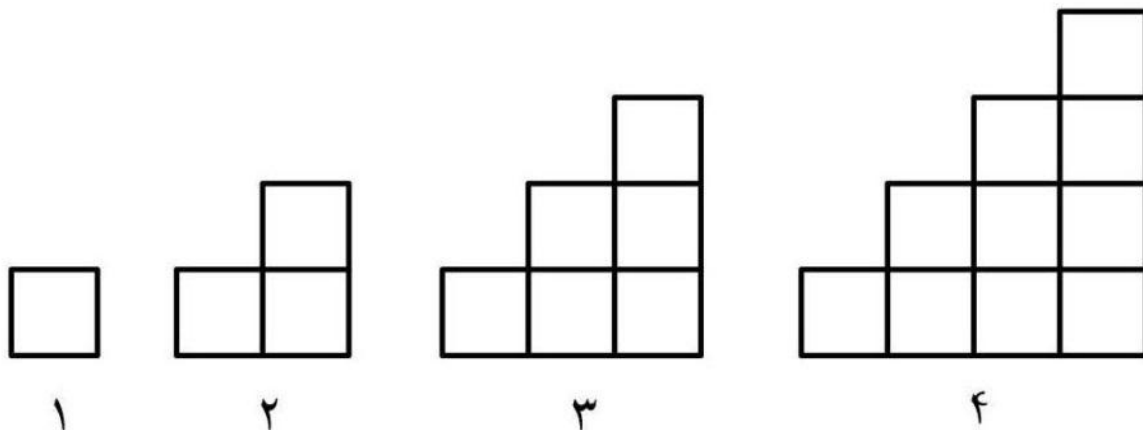
$$1 \times 4 - 0, 2 \times 4 - 1, 3 \times 4 - 2, 4 \times 4 - 3, 5 \times 4 - 4, \dots$$

تحول چگونه چوب‌کبریت‌ها را شمرده است.

پ) جمله‌ی n ام این دنباله به روش تحول به دست آورید.

ت) «تصور» شاگرد اول کلاس، جمله‌ی $pn + (n + 1)$ را پیشنهاد کرده است. او چگونه چوب‌کبریت‌ها را شمرده است.

۵. در دنباله‌ی شکلی زیر که با چوب‌کبریت می‌توان آن را نشان داد:



الف) تعداد مربع‌های 1×1 شکل n ام چندتا است؟

ب) تعداد چوب‌کبریت‌های شکل n ام را بیابید.



تمرین

۱. کدام یک از جملات زیر با هم متشابه‌اند؟

$$6x, 6xy, 8x, 3, 4xy^2, -2xy, -100, 15xy^2$$

$$3x^2y, 19x, -xy, x, 9y, 2y, 16xy, 0$$

۲. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $18x + 10y - 8x + y - 3x$

ب) $94x + 13xy - 44x - 9xy + 8y$

ج) $\frac{3}{y}x - \frac{3}{y}y - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y$

د) $8(a - 2y) + 4(4y - 2a)$

ه) $3(x - 2z) - (8x - 4z) - 3(x - 2z)$

و) $9(x - x^2 + 1) + 6x(2x - 4) + 16$

ز) $8x + \frac{6x^2}{x} - 2x^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{2x^2}{x^3} \right) \quad x \neq 0$

ح) $\frac{8a^6b^9x^4}{2a^3b^8x^4} + \frac{12a^3b^5y^2}{3b^4y^2} \quad a, b, x, y \neq 0$

۳. جاهای خالی را به‌طور مناسب پر کنید.

الف) $12m + \underline{\hspace{2cm}} - 3k + \underline{\hspace{2cm}} = 3m + 3k$

ب) $6(2x + \underline{\hspace{2cm}}) - 2(\underline{\hspace{2cm}} + 3y) = 6x + 6y$



۴. یک عدد در نظر بگیرید. ۱۱ واحد به آن اضافه کنید. مجموع را در ۲ ضرب کنید و از حاصل ضرب ۲۰ واحد کم کنید. آنچه را که به دست آمده در ۵ ضرب کنید و از حاصل ضرب، ۱۰ برابر عددی که در ابتدا در نظر گرفته بودید، کم کنید. حاصل برابر ۱۰ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۱۰ می‌رسید.

۵. سه رقم انتخاب کنید به طوری که همگی مخالف صفر باشند. با این سه رقم شش عدد دو رقمی مختلف درست کنید. مجموع این عددهای دو رقمی را بر مجموع سه رقم انتخابی تقسیم کنید. حاصل برابر ۲۲ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۲۲ می‌رسید.

ساده کردن عبارتهای جبری

۱. در هر یک از عبارات، زیر جملات متشابه خط بکشید و سپس آنها را ساده کنید.

$$(\pi = 3/1415...)$$

الف) $\pi a + 3a + \pi^2 a =$

ب) $3a + \pi^2 a - 2a + 4\sqrt{2} \times a =$

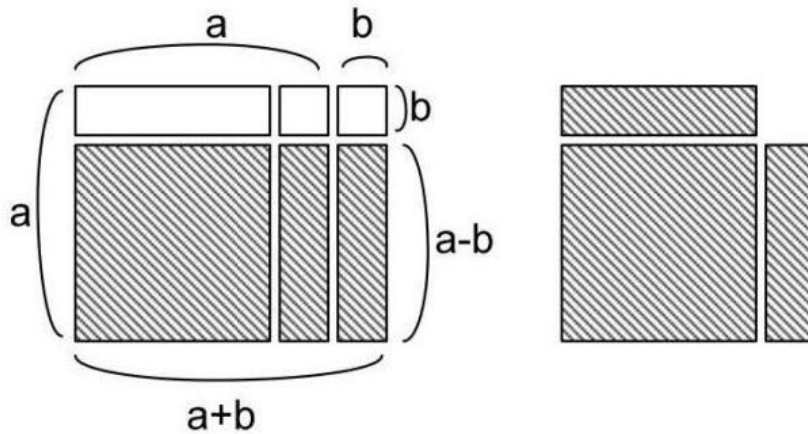
پ) $\sqrt{3}a^2b + \sqrt{2}ab^2 - \pi^2 ab^2 - \sqrt{6}a^2b =$

ت) $\sqrt{2}s^2b + \sqrt{8}b^2s - 2\sqrt{2}sb^2 - \sqrt{32}s^2b =$

ث) $\sqrt{2}\sqrt{p}^2m + \pi^3 pm^2 - \pi^2 pm^2 - \sqrt{3}p^2m =$



۲. با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) $(a+b)(a-b) =$

ب) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3}) =$

پ) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{1388}(\sqrt{5} - \sqrt{2})^{1388} =$

ت) $1999 \times 2001 =$

ث) $6002 \times 5998 =$

۳. عبارت $\frac{1}{\sqrt{12} - \sqrt{11}}$ را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت را در $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{11}}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$ ضرب کنید. آیا عبارت ساده‌تر نشده است؟

ب) عبارت $\frac{1}{\sqrt{2009} - \sqrt{1388}}$ را ساده کنید.



معادله

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{4(3x-6)+12}{5x^2-3x-1}=0$

ب) $3x-2(x^2-3x+1)=(-2x+1)(x-5)$

پ) $\frac{-(2x-3)(x^2-13)}{9-5x^2}=0$

ت) $\frac{\frac{4x-8}{10}-\frac{20-x}{4}+\frac{x+\frac{1}{2}}{2}-\frac{1}{6}}{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-x+17}=\frac{0}{17}$

ث) $x^2(x^2+8)=0$

ج) $(2x-3y+5)^{20}+(3x-6)^{32}+(z-2y)^8=0$

چ) $\frac{(x^2-8)^{20}(x^2-16)^{40}(x^3+125)^{50}((2x-6)^2+9)((2x+3)^2-(x+3)^2)(x^{88}-1)^{80}}{(x^3+27)^9(x^{80}+1)^{14}(x^2-625)(x^5-32)^8\left(\frac{x}{3}-14\right)^8}=0$

ح) $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}$

خ) $\frac{x-1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^2+x}$

د) $5^{x+1}+5^{x-1}=130$

ذ) $3^{x-2}=5^{6-3x}$

ر) $\sqrt{2^x \times 3^{y+1}}=72$

ز) $3^x \times 42 + 3^{x-1} \times 27 = 459$



کاربرد معادله

۱. تاجری مبلغی پول داشت، در سال اول صد میلیون خرج کرد و یک‌سوم آنچه که برایش باقیمانده بود به پولش اضافه شد. در سال بعد دوباره صد میلیون خرج کرد و یک‌سوم باقیمانده‌ی پولش به آنچه داشت اضافه شد. در سال سوم باز هم صد میلیون خرج کرد و بعد وقتی یک‌سوم دارایی حال حاضرش را به پولی که داشت اضافه کرد دید که دوبرابر سرمایه‌ی اولیه‌اش پول دارد. سرمایه‌ی اولیه‌ی این تاجر چقدر است؟
۲. درباره‌ی شرح حال «دیوفانت» ریاضی‌دان مشهور باستان، اطلاعات خیلی کمی داریم. همه آنچه درباره‌ی او می‌دانیم از نوشته‌ای بر روی کتیبه‌ی مقبره‌اش به دست آمده است: رهگذر! در اینجا دیوفانت خوابیده است. زندگی پرماجرایی او به این ترتیب است. یک‌ششم عمرش دوران خوش زندگی کودکی او بود. یک‌دوازدهم دیگر عمرش هم در وضعی گذشت که در حال تحصیل علوم ابتدایی بود. یک‌هفتم عمر دیوفانت در زندگی زناشویی ولی بدون بچه گذشت. بعد از ۵ سال با تولد اولین پسر زیبایش، خوشبختی به او رو کرد. ولی تقدیر چنین بود که فقط نیمی از عمرش پدرش را خوشبخت و روشن کند. بالاخره در چهار سال آخر عمرش با اندوه عمیقی زندگی کرد، زیرا که پسرش را از دست داده بود.



حالا بگویید وقتی که مرگ زندگی دیوفانت را درهم نوردید، چند سال داشت؟

۳. چند سیب لازم است تا چهار نفر از بین شش نفر به ترتیب یک‌سوم، یک‌هشتم، یک‌چهارم و یک‌پنجم تعداد کل آن‌ها را دریافت کنند و پنجمی ده سیب داشته باشد و یک سیب هم برای نفر ششم باقی بماند؟



۴. چهار شریک به نام‌های رها، راحله، الهه، الهام روی هم ۴۵ میلیون پول داشتند. اگر به پول رها ۲ میلیون اضافه کنیم، از پول راحله ۲ میلیون کم کنیم، پول الهه را دو برابر و پول الهام را نصف کنیم، پول هر چهار نفر مساوی می‌شود. هر کدام چقدر پول به اشتراک گذاشته‌اند.

۵. سه شکارچی، چند روز متوالی را در جنگل برای شکار گذراندند. صبح روز آخر، حادثه‌ای ناگواری پیش آمد. وقتی که آن‌ها پیاده از جوی آب می‌گذشتند، دو شکارچی در آب افتادند و فشنگ‌دان‌هایشان خیس شد و مقداری از فشنگ‌هایشان بی‌مصرف شد. سه دوست، فشنگ‌هایی را که برایشان باقی مانده بود، به طور مساوی بین خودشان تقسیم کردند. بعد از آن، هر یک از شکارچی‌ها ۴ تیر در کردند و برای همه‌ی آن‌ها روی هم همان‌قدر فشنگ باقی‌ماند که هر یک، بعد از تقسیم فشنگ‌ها داشتند. در موقع تقسیم، روی هم چقدر فشنگ داشتند.

۶. به مکالمه‌ی زیر بین «دکتر کاظم» و «حسین» توجه کنید و فاصله‌ی بین خانه آن‌ها را محاسبه کنید.

دکتر کاظم به یکی از آشنایانش به نام حسین گفت: فردا پیش من بیا!

- از شما متشکرم. من ساعت ۳ از منزل خارج می‌شود، ولی اگر شما تصمیم به گردش داشته باشید، می‌توانید در همین ساعت از منزل حرکت کنید تا در نیمه‌ی راه به هم برسیم و ادامه مسیر را با هم باشیم.



- ولی فراموش نکنند که سن من زیاد است و ساعتی بیش از ۳ کیلومتر نمی‌توانم راه بروم. ولی شما جوانید و اگر با قدم‌های آهسته هم راه بروید در هر ساعت ۴ کیلومتر می‌شود. عیبی ندارد اگر به هم کمی تخفیف بدهید ممنون می‌شوم.
- حق با شماست! چون من ساعتی یک کیلومتر بیشتر از شما راه می‌روم، این یک کیلومتر را به شما می‌دهم یعنی یک ربع زودتر از شما حرکت می‌کنم، به نظر شما کافی است؟

دکتر موافقت کرد و گفت: از محبت شما متشکرم. حسین همین کار را کرد. او یک ربع به ۳ از منزل خارج شد و با سرعت ۴ کیلومتر در ساعت به راه افتاد و دکتر هم درست ساعت ۳ از منزلش خارج شد و با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت به راه افتاد. وقتی به هم رسیدند، پیرمرد (دکتر کاظم) برگشت و با مرد جوان به طرف منزل خود قدم زدند. مرد جوان (حسین) وقتی به منزل خود بازگشت، پیش خود حساب کرد و دید که به خاطر تخفیف یک ربع ساعت، در مجموع درست چهار برابر دکتر راه رفته است.

۷. در کتیبه‌هایی که از قومی مربوط به قرون ابتدایی به دست آمده است نوشته شده بود:

$$۷۱ = ۸ \times ۸, \text{ به نظر شما این قوم بدوی، مقدار } ۸ \times ۵ \text{ را چه عددی می‌دانسته‌اند؟}$$

در یک مسابقه‌ی تلویزیونی، مجری به شرکت کننده‌ای که به مرحله‌ی کشف رمز گاوصندوق حاوی صد میلیون تومان رسیده بود راهنمایی به صورت زیر کرد:

رمز سه رقمی این گاوصندوق دارای خصوصیات زیر است:



رقم دهگان آن مساوی ۷، رقم صدگان آن ۴ واحد کمتر از یکان آن است و اگر ارقام عدد را به ترتیب عکس بنویسیم، عدد حاصل ۳۹۶ واحد از عدد مجهول بزرگ‌تر می‌شود.

آیا مجری با شرکت‌کننده فامیل بوده است؟!

۸. مرد بیکاری به نام «حسن کچل» این طرف آن طرف می‌رفت و بدون این که به فکر کار و تلاش باشد، دائماً از بی‌پولی خود گله می‌کرد. به هر کس می‌رسید، درد دلش باز می‌شد و از این که نمی‌تواند پول‌دار شود و زندگی راحتی داشته باشد، آه و ناله می‌کرد. کلاهبرداری تصمیم گرفت از طمع حسن استفاده کند. پیش او آمد و از موجودیش پرسید. وقتی که از موجودی حسن بیکاره آگاه شد، به او گفت:

- من راه‌حل ساده و خوبی برای پول‌دار شدن تو دارم.
- چطور؟
- در خارج این شهر پلی بر روی رودخانه است، تو هر بار که از پل عبور کنی، من پولت را دوبرابر خواهم کرد.
- تو چرا پولت را مجانی به من می‌دهی؟
- من بابت این کار از تو دستمزدی خواهم گرفت.
- چقدر؟
- هر بار که پول تو را دوبرابر کردم، ۲۴ هزار تومان بابت دستمزد به من پرداخت می‌کنی.
- همین!
- بله. همین!



بعد از قول و قرار، به بیرون شهر رفتند، حسن کچل بیکار طمع کار از پل گذشت و مرد حيله گر خبیث حقه‌باز پول او را دوبرابر کرد و بعد ۲۴ هزار تومان دستمزد از او گرفت. حسن دوباره از پل گذشت و باز هم پولش دوبرابر شد و مبلغ دستمزد را پرداخت. برای سومین بار عمل تکرار شد، ولی وقتی که این بار حسن بعد دوبرابر شدن پولش دستمزد کلاه‌بردار را پرداخت، دیگر چیزی برایش نمانده بود که برای دوبرابر کردن آن از پل عبور کند. طمع حسن کچل، تمام پولش را بر باد داده بود. موجودی حسن در ابتدا چقدر بوده است؟





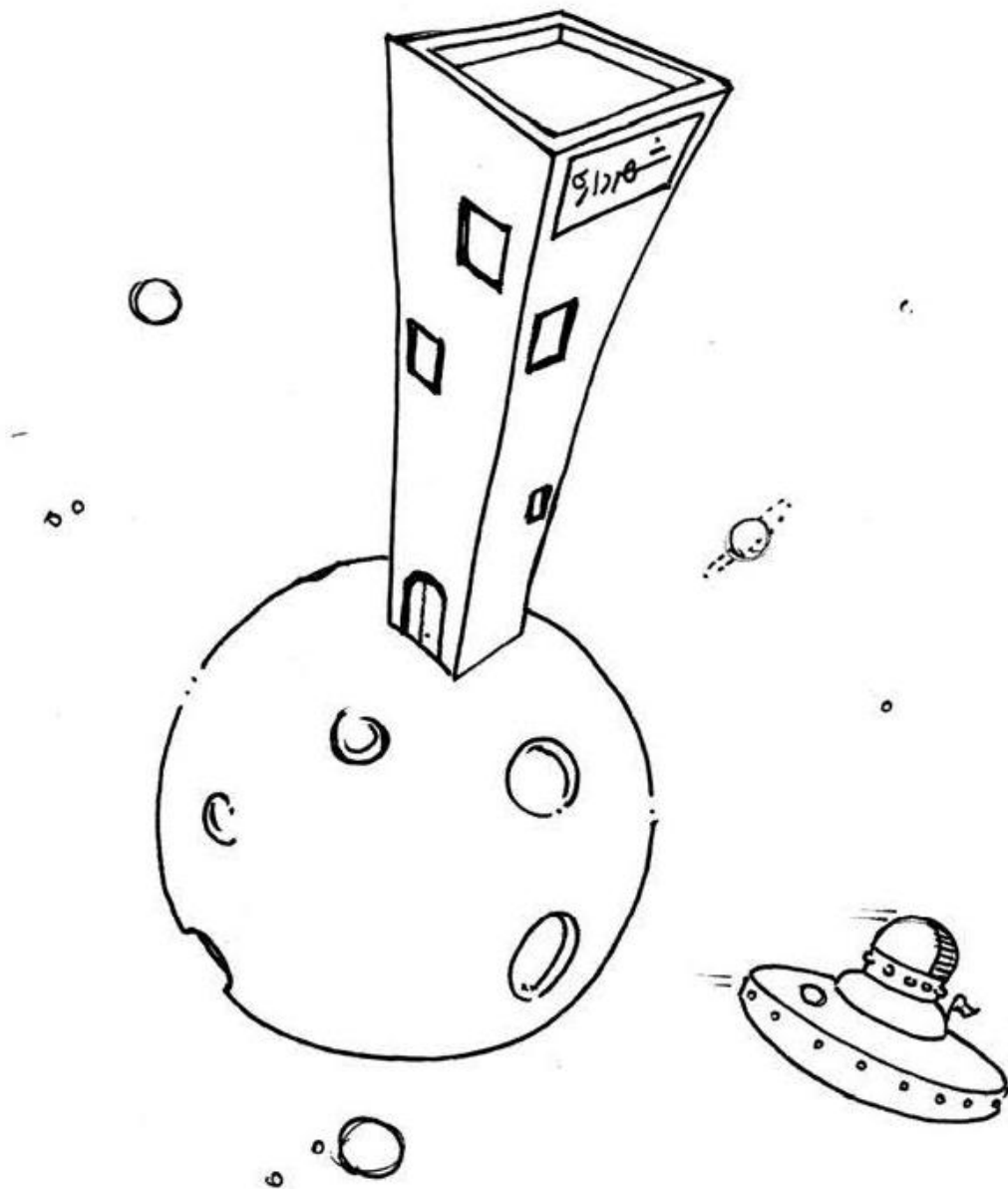
فصل پنجم

بردار مختصات



مختصات

به شهر «زارف» واقع در سیاره‌ی «زیتو ۹» خوش آمدید.





ساکنین این شهر «زاپو»ها هستند. شهرداری شهر زارف، در مرکز شهر واقع شده است. واحد اندازه‌گیری زاپوها به احترام مؤسس شهر، آقای «زافتا»، «زافت» نام دارد. آدرس هر نقطه از شهر زارف با توجه به مکان ساختمان شهرداری بیان می‌شود. برای مثال، خانه‌ای به آدرس ۳-۲ به این معناست که برای رسیدن به این خانه می‌بایست از ساختمان شهرداری ۳ زافت به سمت شمال رفته و سپس ۲ زافت به سمت شرق حرکت کنیم.



۱. آدرس سمپاد شهر زارف ۳-۷-۷ می‌باشد.

برای رفتن به سمپاد چه باید کرد؟

۲. سازمان آموزش و پرورش شهر زارف در ۲

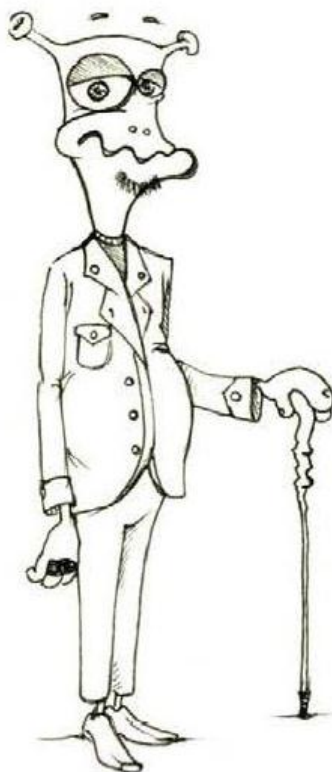
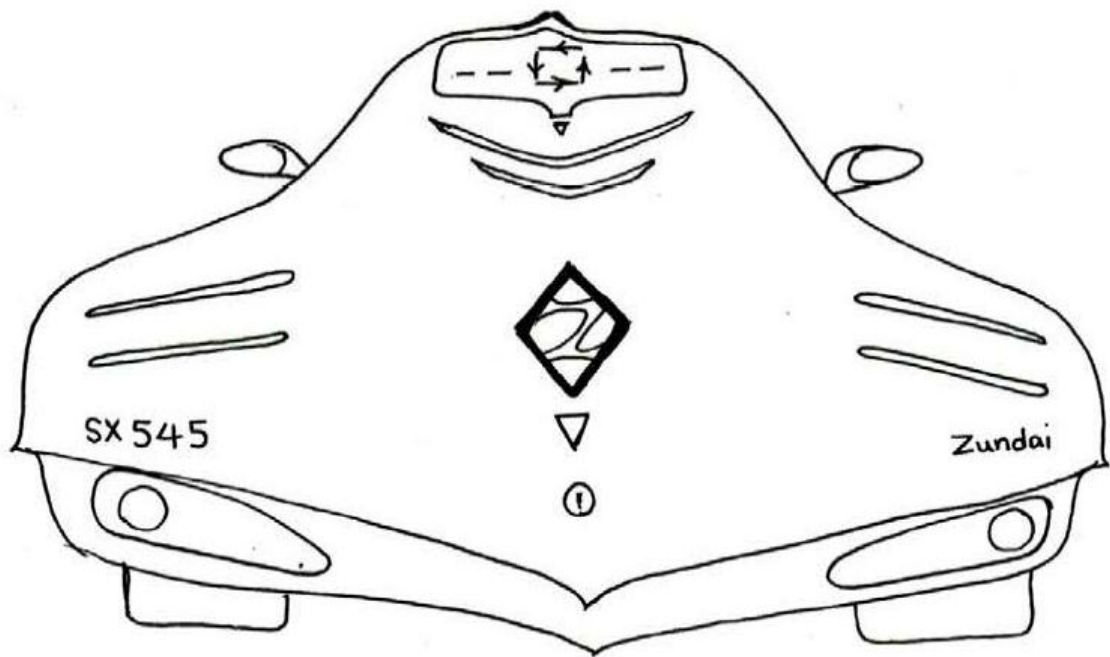
زافتی شمال سمپاد می‌باشد. آدرس سازمان

آموزش و پرورش چیست؟

۳. آدرس شهرداری چیست؟

مفهوم بردار

خیابان‌ها، اتوبان‌ها و تمام مسیرهای ماشینی زارف یا شمالی- جنوبی و یا شرقی- غربی هستند. بعضی از زاپوهای مُرّقه، اتوموبیل‌های بسیار پیشرفته و هوشمندی به نام «زیوندای» دارند. زیوندای‌ها تنها با وارد کردن دو عدد به راننده را به مقصد می‌رسانند. عدد اول مقدار زافت حرکت به سمت شمال و عدد دوم مقدار زافت حرکت به سمت شرق را مشخص می‌کند.



۱. «زانا» یکی از اهالی پولدار زارف است. او برای آنکه از قصر با شکوه خود به آدرس ۵۳-۴۷۴۳، به شرکت خود به آدرس ۳۲۴۳۲۱ برود، می‌بایست چه اعدادی را در زیوندای خود وارد کند؟
۲. زانا برای برگشت از شرکت به منزل خود چه اعدادی را می‌بایست وارد کند؟



۳. زانا یک روز، برای رفتن به خانه اعداد ۵۰-۵۴ را در زیوندای خود وارد کرد. زانا

کجا بوده است؟ آیا زانا تیزهوش است؟

۴. یک روز جمعه که زانا می‌خواست تعطیلات خود را به کنار دریاچه شهر به آدرس

۱۰۳۴۳ برود، اتوموبیل نازینش دچار مشکل شده و ارقام زوج را قبول نمی‌کرد. آیا

او می‌تواند بدون تعمیر ماشین از خانه به کنار دریاچه برود و از تعطیلات خود لذت

ببرد.

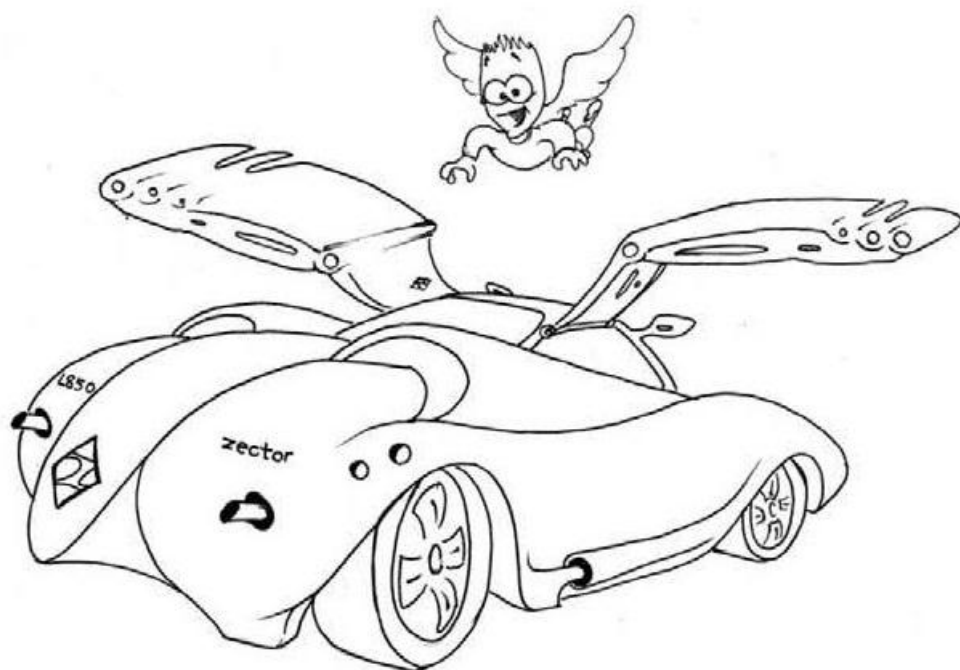
به تدریج و با افزایش سرمایه‌دارها، تعداد زیوندای‌های شهر زارف زیاد شده است و ترافیک

سنگین در ساعات مختلف روز در شهر زاپوها را کلافه کرده است. به همین منظور،

شرکت سازنده‌ی این خودروها نسل جدید آن‌ها را روانه‌ی بازار کرده است. سری جدید

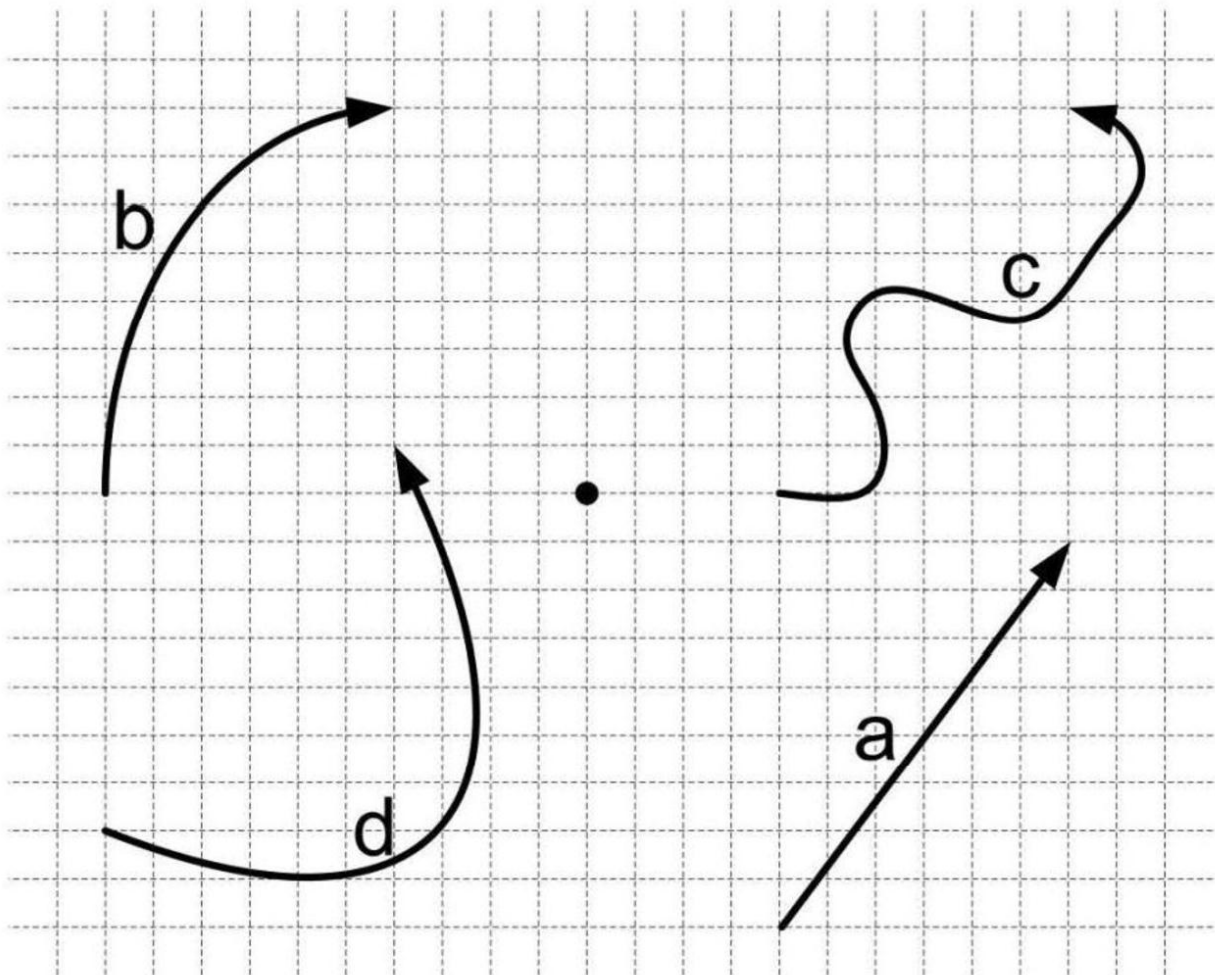
زیوندای‌ها به نام «زکتور» توانایی پرواز دارند و با وارد کردن دو عدد (مانند زیوندای‌ها)

به پرواز در آمده و به‌صورت کاملاً هوشمند به مقصد می‌روند.

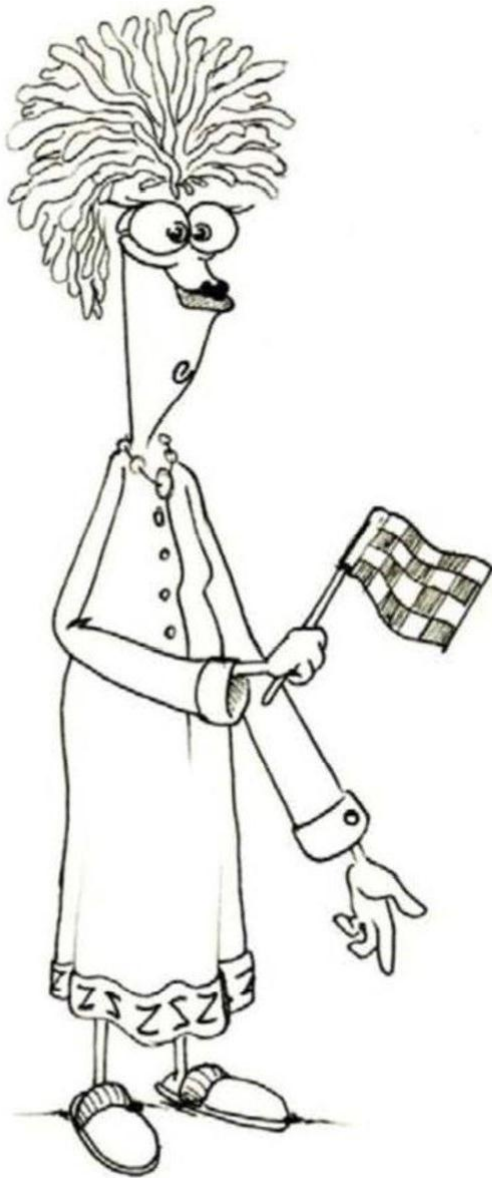




۵. سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف هم برای کنترل بهتر حرکت تمامی خودروها، مسیر حرکت آن‌ها را توسط یک سامانه‌ی بسیار هوشمند ثبت می‌کند. در شکل زیر بردار حرکت چهار زکتور در شهر زارف رسم شده است. اعداد وارد شده در کدام یک از این زکتورها با بقیه فرق می‌کند.



۶. زلاتان امروز صبح با زکتور خود به اداره رفت و بازگشت، سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک شهر زارف بردار حرکت هر این شهروند را چگونه ثبت خواهد کرد.



۷. شهردار شهر زارف، خانم «زن» تصمیم دارد

به مناسبت روز جهانی ورزش، مسابقه‌ی

اتوموبیل‌رانی دور شهر زارف را برگزار

کند. این مسابقه رأس ساعت ۸ صبح آغاز

شده و بعد از سه دور، حول شهر، به پایان

می‌رسد. «زویی» می‌خواهد با زکتور خود

در مسابقه‌ی اتوموبیل‌رانی دور زارف

شرکت کند.

الف) او باید چه اعدادی را در زکتور خود

وارد کند؟

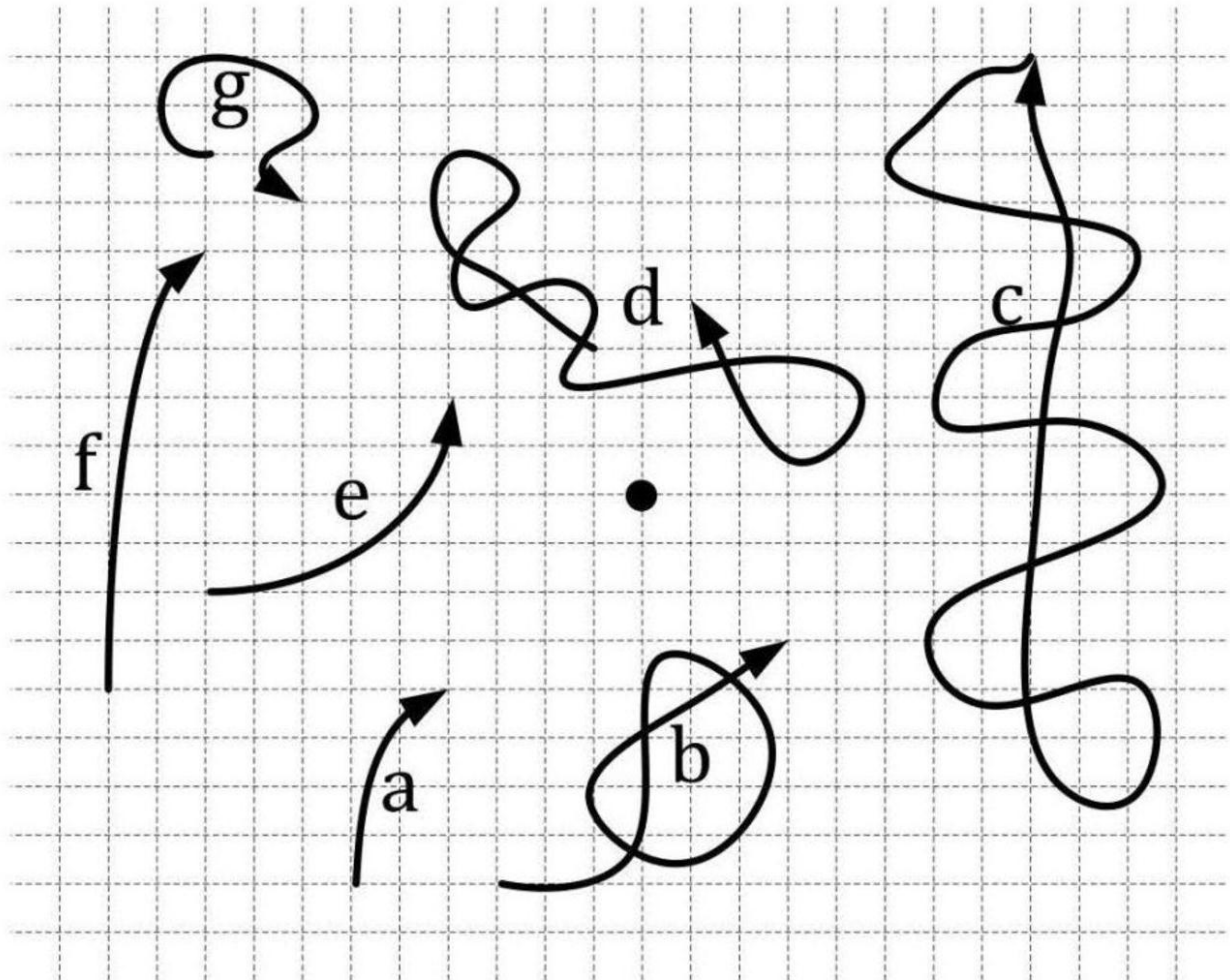
ب) سامانه‌ی هوشمند حمل و نقل و ترافیک

شهر زارف، بردار حرکت اتوموبیل‌های

شرکت کننده را چگونه ثبت خواهد کرد.



۸. مختصات هر یک از بردارهای زیر را بنویسید.



۹. «باب زایس» نقاش معروف، یک روش جدید برای آموزش نقاشی اختراع کرده است.

او به وسیله‌ی بردارها، رسم اشکال مختلف را آموزش می‌دهد. مثلاً در زیر یک روش

الگوی نقاشی آمده است. کفایت از نقطه‌ای دلخواه شروع کنید و پشت سر هم طبق

بردارهای آمده، شکلی را رسم کنید. آیا پیش از شروع کار می‌توانید حدس بزنید باب

زایس چه شکلی را برای شما آماده کرده است؟



$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

نقطه‌ی شروع را بیان کنید. مثلاً بردار $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$ ابتدا در $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$.



کاربرد بردارها

۱. در تمام علوم، دو نوع کمیت وجود دارد. کمیت های عددی مثل قد و کمیت های برداری مثل نیرو. چه تفاوت هایی بین این دو نوع کمیت می بینید؟
۲. سرعت یک خودرو چه نوع کمیتی است؟ جرم یک خودرو چگونه؟
۳. دو خودروی سواری با سرعت های ۲۰ و ۳۰ کیلومتر در ساعت در جاده کاشان - اصفهان در حال حرکت هستند. اگر این دو خودرو در یک لحظه در کنار هم باشند، بعد از گذشت ۲ ساعت در چه فاصله ای از یکدیگر قرار دارند؟



۴. شهر زارف که به خاطر می‌آورید! یک

تاجر به نام «زاجر» می‌خواهد یک فروشگاه زنجیره‌ای بزرگ به مساحت ۳۰۰ زافت مربع در این شهر بسازد. او می‌خواهد فروشگاهش را در نقطه‌ای از شهر بسازد که فاصله‌اش تا مجتمع‌های مسکونی شهر به آدرس ۱۶-۹۳ و استادیوم ورزشی زارف به آدرس ۱۰-۵۳ مساوی باشد و بدین ترتیب هم مردمی که در مجتمع‌های مسکونی زندگی می‌کنند و هم تماشاچیان مسابقات

ورزش به راحتی بتوانند به این فروشگاه رفت و آمد کنند. به زاجر کمک کنید و آدرسی را که باید در آن فروشگاه زنجیره‌ای خود را بنا کند بیابید.

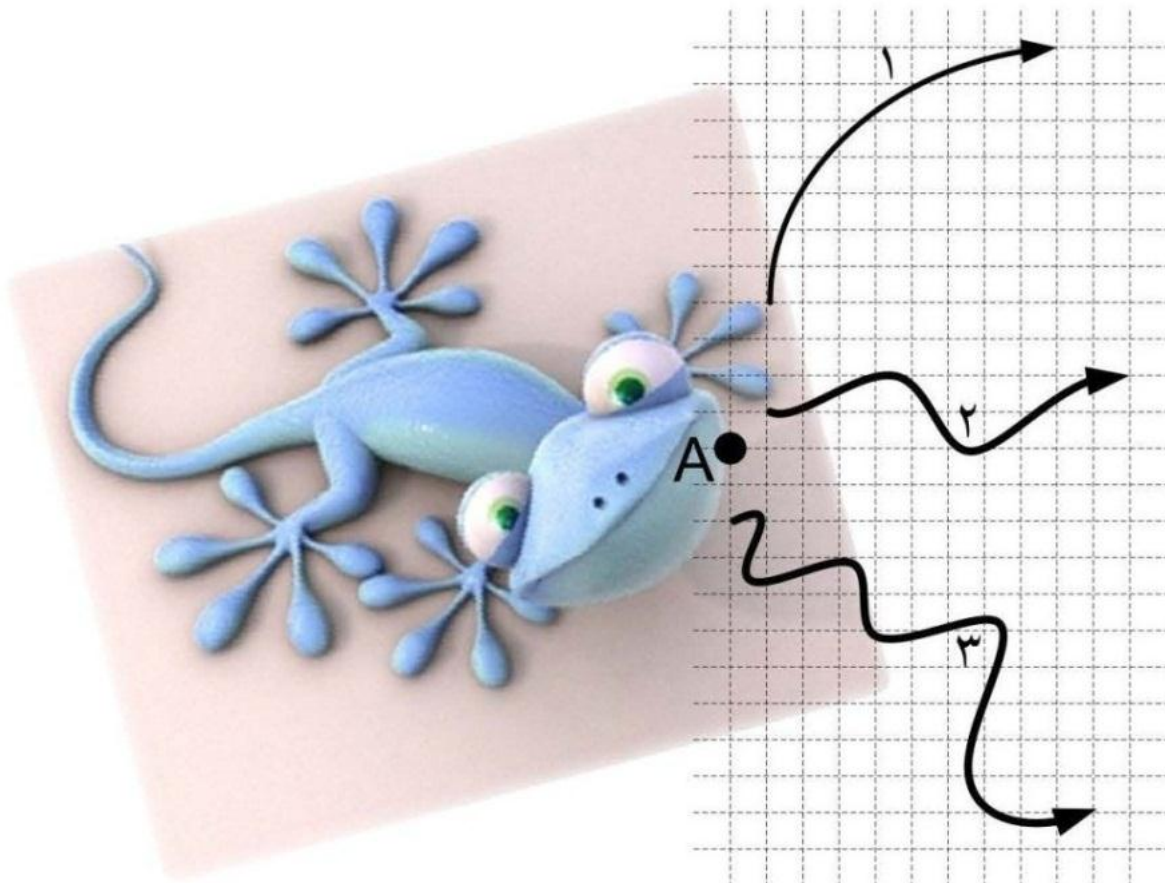
۵. قرینه‌ی نقطه‌ی $S = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ نسبت به $N = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۷ \end{bmatrix}$ را F می‌نامیم. مختصات F را

به‌دست آورید. (راهنمایی: نقطه‌ی وسط پاره‌خط FS نقطه‌ی N است.)



جمع بردارها

۱. عمومی الهه برای او یک عروسک کنترل بسیار پیشرفته خریده است. روی کنترل این عروسک ۳ دکمه وجود دارد. الهه هر بار که دکمه‌ای را می‌فشارد عروسک طبق بردار آن حرکت می‌کند. مثلاً وقتی دکمه‌ی ۱ را می‌فشارد، عروسک طبق بردار ۱ شروع به حرکت می‌کند و وقتی دو دکمه‌ی ۳ و ۲ را با هم می‌فشارد، عروسک طبق بردار مجموع ۲ و ۳ حرکت می‌کند.



الف) عروسک با فشردن به ترتیب دکمه‌های ۱ و ۲ و ۳ (هر کدام یک‌بار) از نقطه‌ی شروع (A) به چه نقطه‌ای می‌رسد؟



ب) اگر ترتیب فشردن دکمه‌ها را به صورت ۳ و ۲ و ۱ (هر کدام یک بار) تغییر دهیم، عروسک از نقطه‌ی شروع به کجا می‌رسد؟

پ) اگر الهه هر یک بار سه دکمه را با هم بفشرد عروسک از نقطه‌ی شروع به چه نقطه‌ای می‌رسد؟

ت) بهترین ترتیب فشردن دکمه‌ها برای آنکه عروسک به دورترین فاصله از مکان اولیه‌اش برسد، چیست؟ (به شرطی که هر دکمه را فقط یک بار بفشاریم)

۲. مورچه‌ها موجودات بسیار قدرتمند و پرکاری هستند و البته بعضی‌ها معتقدند که آن‌ها بسیار باهوش هم هستند. تا به حال حتماً حمل بار توسط تعداد زیادی از مورچه‌ها را دیدید که با یکدیگر و با نظم و ترتیب بار سنگینی رو تا لانه‌شان حمل می‌کنند. زیور یک دانشمند نوجوان و علاقه‌مند به کار روی زندگی مورچه‌هاست. او حالا که با بردارها تا حدی آشنا شده، می‌خواهد حمل بار توسط دسته‌ی مورچه‌ها را با بردار توصیف کند.

الف) به او در این کار کمک کنید و بردار حرکت تمام مورچه‌ها را رسم و بردار مجموع را بیاید. (توجه کنید یک مورچه می‌تواند جسمی را بکشد ولی نمی‌تواند هل دهد).

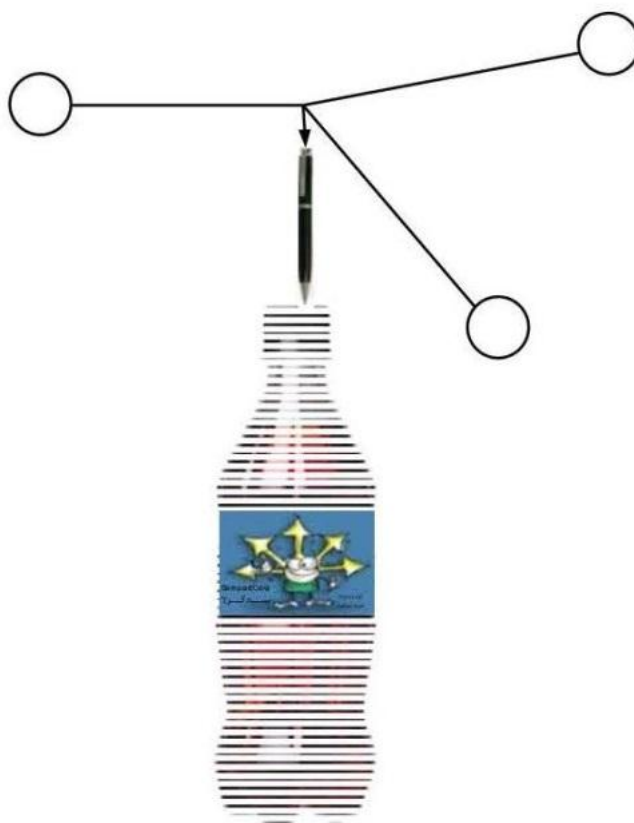
ب) اگر لانه‌ی این مورچه‌ها در شمال غرب تصویر واقع باشد، کدام جمله صحیح‌تر است؟
* مورچه‌های پایین تصویر اصلاً باهوش نیستند.

* هیچ مورچه‌ای در دنیا باهوش نیست.



مسابقه‌ی سمپاد کولا

یک شرکت سازنده‌ی نوشابه‌ی مبتکر به نام «سمپاد کولا»، دست به طراحی بازی تلویزیونی جذابی، برای جلب مشتری‌های بیشتر زده است. در این بازی چند گروه سه نفره شرکت می‌کنند. به دور کمر هر یک از نفرات گروه یک نخ کاموایی به طول ۱۵۰ سانتی‌متر متصل می‌باشد و طرف دیگر هر سه نخ به یک خودکار وصل است. نفرات گروه به گونه‌ای مثلی می‌ایستند و یک شیشه‌ی نوشابه در مرکز مثلث قرار می‌گیرد. افراد گروه باید سعی کنند بدون استفاده از دست و تنها با تکان خوردن، خودکار را به درون شیشه‌ی نوشابه‌ی سمپاد کولا ببرند. گروهی برنده‌ی بازی است که بتواند زودتر از بقیه‌ی گروه‌ها و بدون دست زدن به نخ‌ها و تنها با حرکات بدن، خودکار را داخل شیشه‌ی نوشابه ببرد.

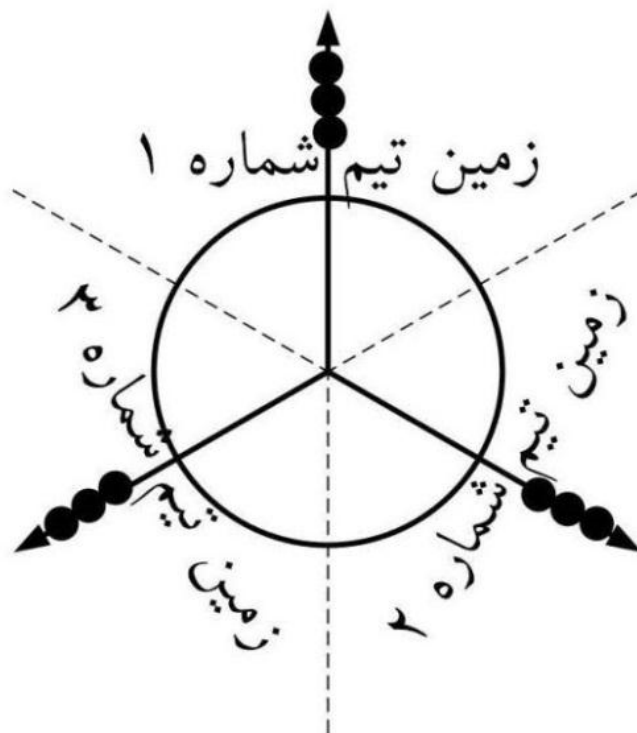


چه راهبردی برای بردن این بازی پیشنهاد می‌کنید؟



طناب‌کشی فوق حرفه‌ای

۹ قهرمان مسابقات جهانی طناب‌کشی توانسته‌اند بازی طناب‌کشی را ارتقا دهند. آن‌ها در ۳ گروه ۳ نفره و در زمینی به شکل زیر قرار می‌گیرند.

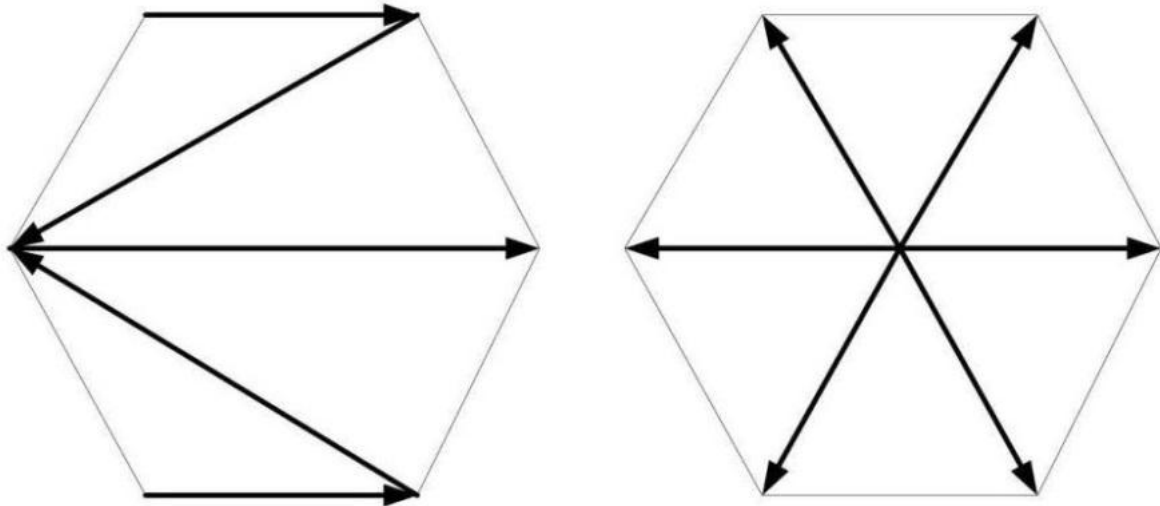


دایره‌ی مرکز زمین به شعاع نیم متر می‌باشد. سه طناب در مرکز زمین به یکدیگر گره خورده‌اند و به گره سه طناب یک پارچه‌ی وصل شده است. سه گروه ابتدا در زمین مربوط به خود مستقر شده و سپس هم‌زمان و با سوت داور شروع به کشیدن طناب می‌کنند. گروهی برنده است که بتواند پارچه متصل به گره را به زمین خود بیاورد. دقت کنید که در ابتدای بازی زاویه‌ی سه طناب با یکدیگر ۱۲۰ درجه باشد.

چه راهبردی برای بردن این بازی پیشنهاد می‌کنید؟



بردار مجموع بردارهای زیر را رسم کنید. (شش ضلعی‌هایی که می‌بینید منتظم هستند.)



تجزیه‌ی بردارها

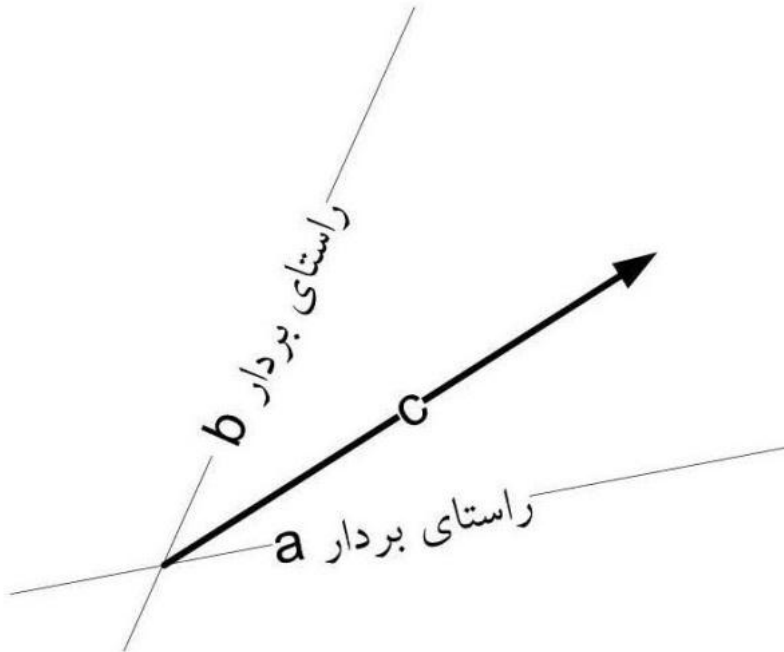
۱. بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ را رسم کنید.

الف) دو بردار را چنان رسم کنید که جمعشان برابر بردار $\vec{a}$ شود.

ب) چند جفت بردار وجود دارند که جمعشان برابر بردار $\vec{a}$ شود.



۲. بردار $\vec{c}$ رسم شده است و می‌دانیم که $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. راستاهای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داده شده‌اند. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را رسم کنید و روش رسم خود را توضیح دهید.



۳. تینا، ۴۰ کیلوگرم وزن دارد. او دیروز که به همراه خانواده‌اش به دل طبیعت رفته بود طنابی را به شاخه‌ی قطور یک درخت وصل کرد و مشغول تاب بازی شد. طناب‌هایی که او استفاده کرده است، می‌بایست توانایی تحمل حداقل چند کیلوگرم وزن را داشته باشند تا تینا دچار مشکل نشود؟

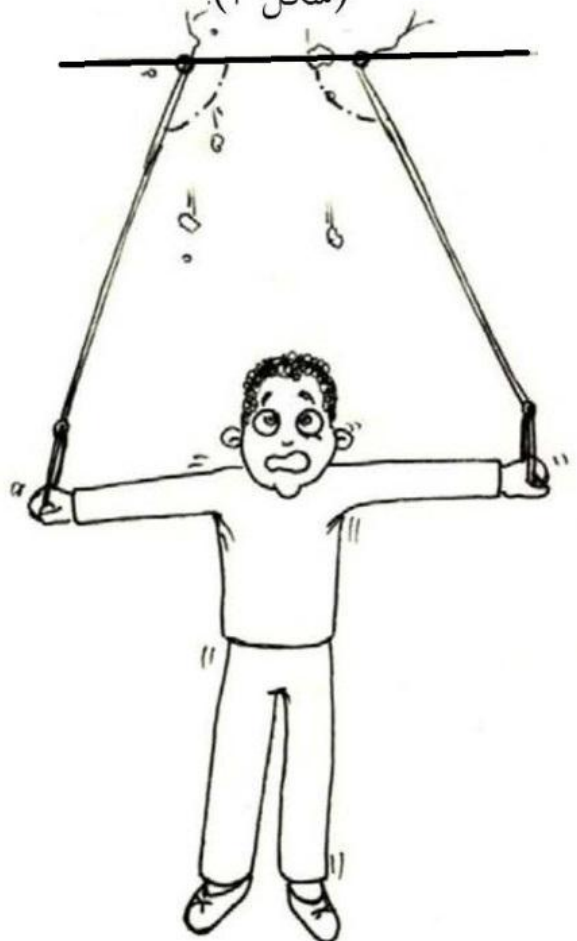


۴. تابک برادر تینا، یک ژیمناست نوجوان است. او خود را برای شرکت در مسابقات ژیمناستیک استان در دسته ۵۰ کیلوگرم آماده می‌کند. اتابک در بخش دارحلقه بسیار توانمند است. اما دیروز که همه‌ی خانواده برای گردش به دل طبیعت رفتند او در خانه برای تمرین بیشتر تنها ماند. او ابتدا مثل هر روز به دارحلقه‌ای که خودش ساخته بود آویزان شد (شکل ۱). پس از مدتی به سراغ یک حرکت جدید تعادلی رفت (شکل ۲). اگر طناب‌هایی که او استفاده کرده است توانایی تحمل ۲۵۰ نیوتن وزن را داشته باشند، چرا او امروز در بیمارستان بستری است؟!

(شکل ۱)



(شکل ۲)





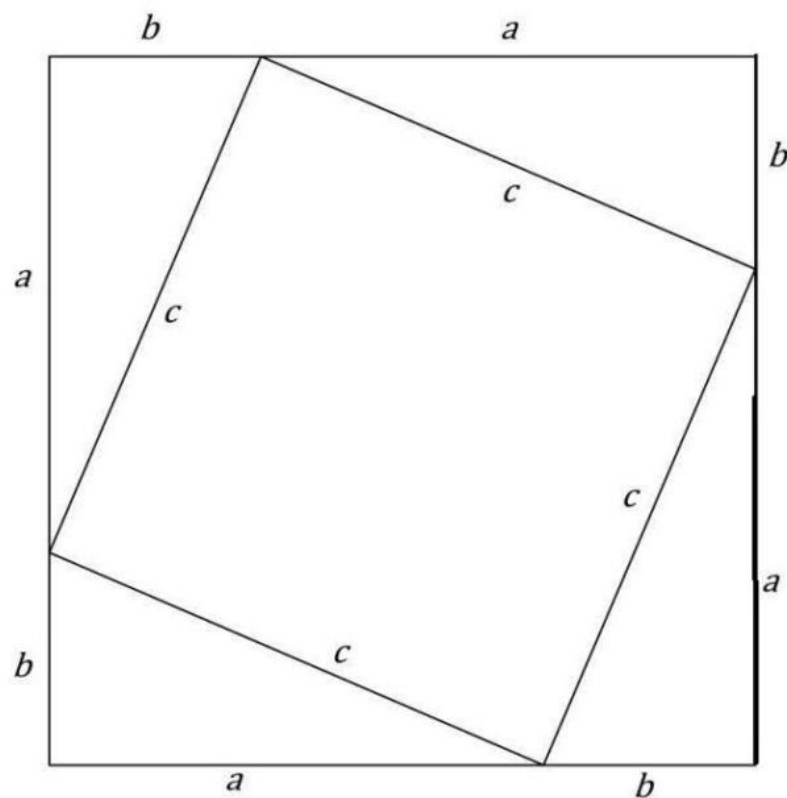
فصل ششم

مثلث



قضیه‌ی فیثاغورس

۱. «فردوس» قضیه‌ی فیثاغورس را خوانده است (در مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر). و می‌خواهد آن را اثبات کند. او مربعی به ضلع $a+b$ رسم کرده و چهار مثلث قائم‌الزاویه با ساق‌های a و b درون مربع رسم کرده است. روش اثبات او را با جواب دادن به سؤالات زیر بررسی کنید.



(الف) چرا چهار مثلث برابرند؟

(ب) چرا چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است؟



پ) با توجه به اینکه مساحت مربع بزرگ برابر مجموع مساحت‌های چهار مثلث و مربع کوچک‌تر است مقدار $(a+b)^2$ برابر چه عبارتی است؟

ت) از فصل قبل به خاطر دارید که $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. از این رابطه استفاده کنید و ثابت کنید $c^2 = a^2 + b^2$.

۲. «فرشاد» دوست فردوس، برای آن که در رقابت با دوست خود کم نیاورد، می‌خواهد برعکس قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کند.

اگر مجذور یک ضلع از مثلثی با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر آن مثلث برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است و زاویه‌ی قائمه‌اش روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

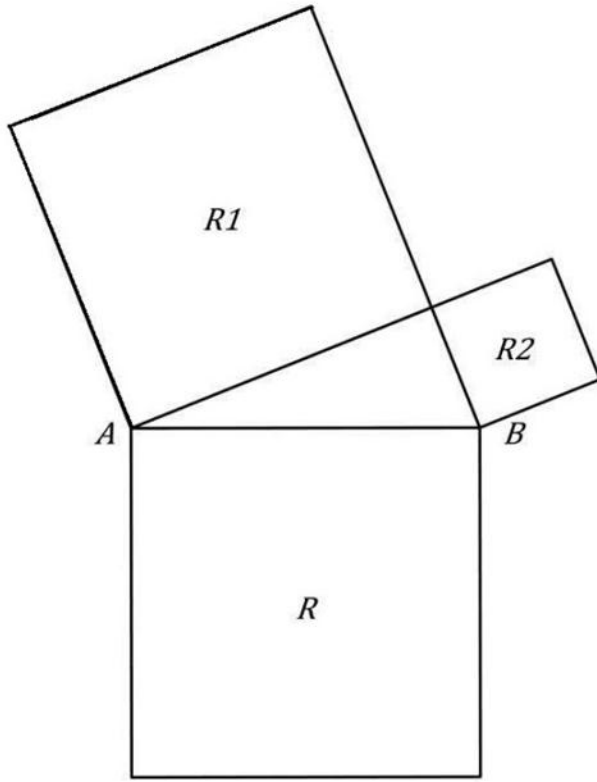
آیا قضیه‌ی جدید هم درست است؟ چرا؟

۳. یونانیان قدیم قضیه‌ی فیثاغورس را به صورت زیر می‌شناختند.

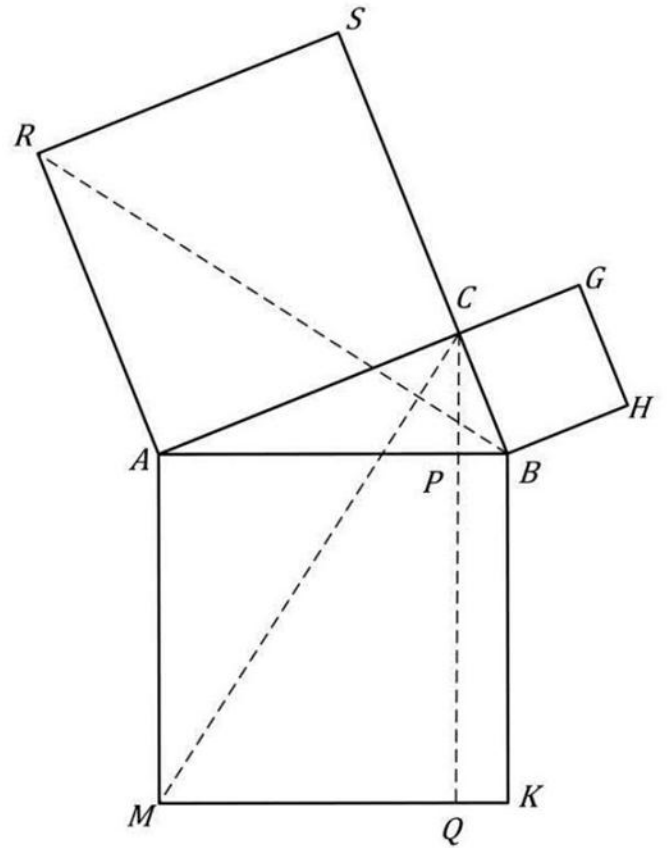
مساحت مربعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم شود برابر است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی ساق‌های آن مثلث رسم می‌شوند.



مرکز ملی پرورش استعدادی درخشان ودانش پژوهان جوان
اداروی استعدادی درخشان استان اصفهان

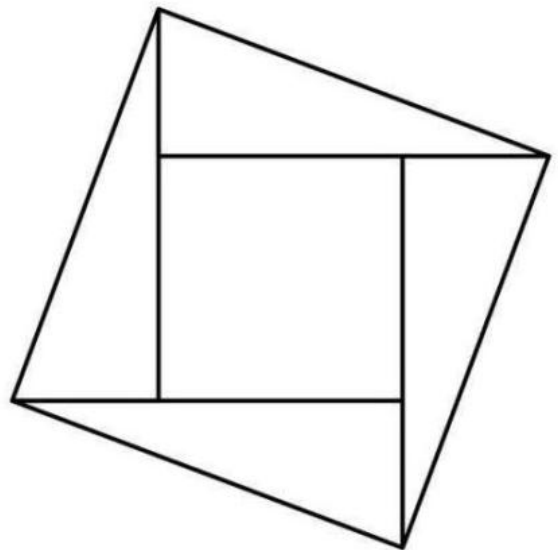
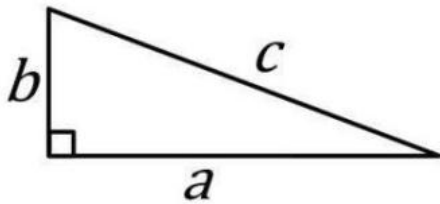


$$S(R)=S(R1)+S(R2)$$



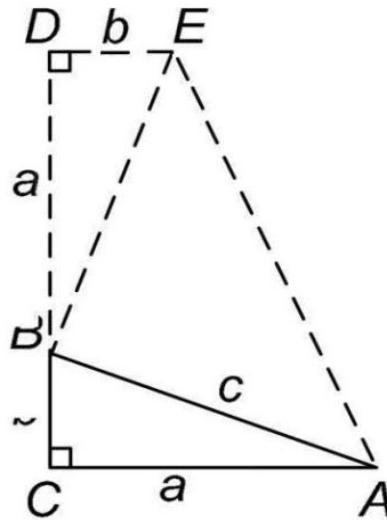
$$S(R)=S(R1)+S(R2)$$

۴. در شکل زیر چهار مثلث قائم الزاویه‌ی مساوی در کنار یکدیگر شکل زیر را تشکیل داده‌اند. آیا می‌توانید از روی شکل اثباتی برای قضیه‌ی فیثاغورس بیابید.





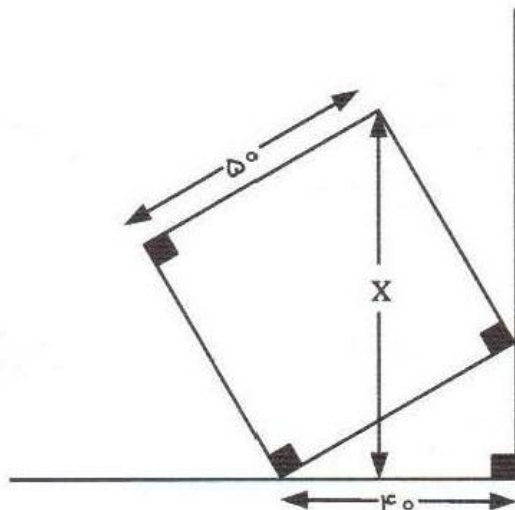
۵. آقای گارفیلد، با استفاده از شکل زیر روشی برای اثبات قضیه‌ی فیثاغورس یافت. شما هم با قرار دادن مساحت دوزنقه با مجموع مساحت‌های سه مثلث، ثابت کنید که $c^2 = a^2 + b^2$. یادتان باشد که ابتدا قائمه بودن $\angle EAB$ را ثابت کنید.



کاربردهای قضیه‌ی فیثاغورس

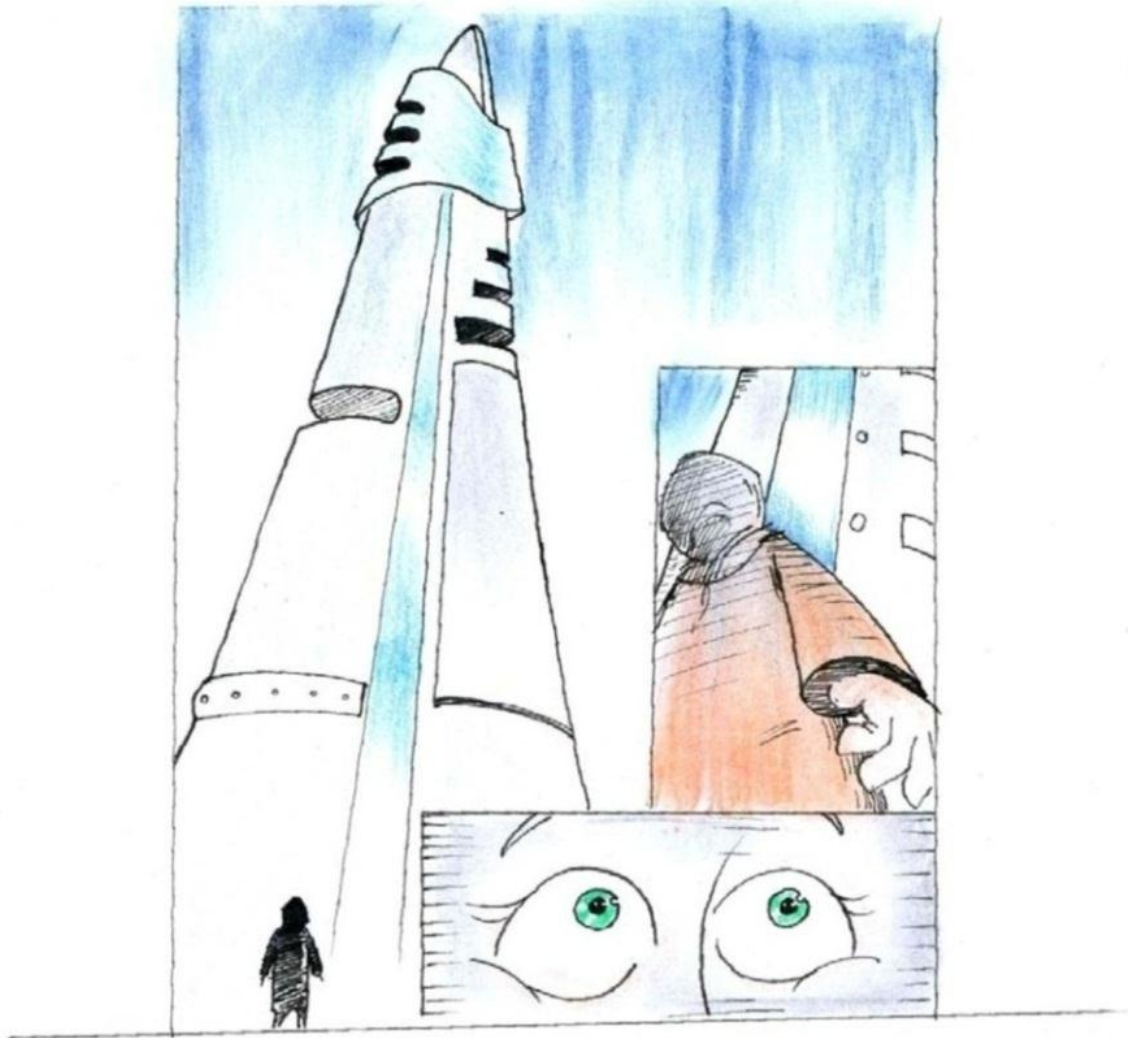
۱. در هر قسمت، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

(الف)





۲. سحر می‌خواهد ارتفاع برجی را که در آن زندگی می‌کند را اندازه بگیرد. او ابتدا در فاصله ۵۰ متری برج به آن نگاه کرد و آن را با زاویه‌ی 53° درجه دید. سپس از فاصله‌ی ۱۲۰ متری به آن نگاه کرد و آن را با زاویه‌ی 27° درجه دید. می‌دانیم قد سحر، یک و نیم متر است. به سحر کمک کنید تا ارتفاع برج را به‌دست آورد؟ روش کار خود را توضیح دهید.





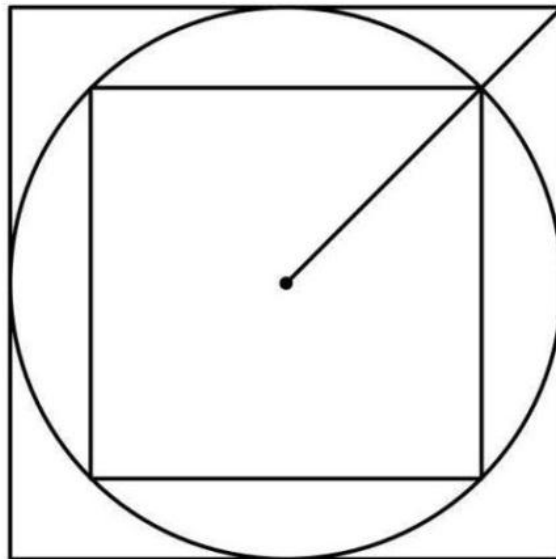
۲. شکور، از خانه‌شان ۲۵ کیلومتر به سمت جنوب، ۶۰ کیلومتر به سمت غرب و ۵۵ کیلومتر به سمت جنوب دور شده است. او اکنون در چه فاصله‌ای از خانه‌شان قرار دارد؟





۳. دو وتر عمود بر هم در یک دایره یکدیگر را قطع کرده اند. اگر طول دو قسمت جدا شده روی یکی از وترها ۳ و ۴ باشد و دو قسمت جدا شده روی وتر دیگر ۲ و ۶ باشد، طول قطر دایره را بدست آورید.

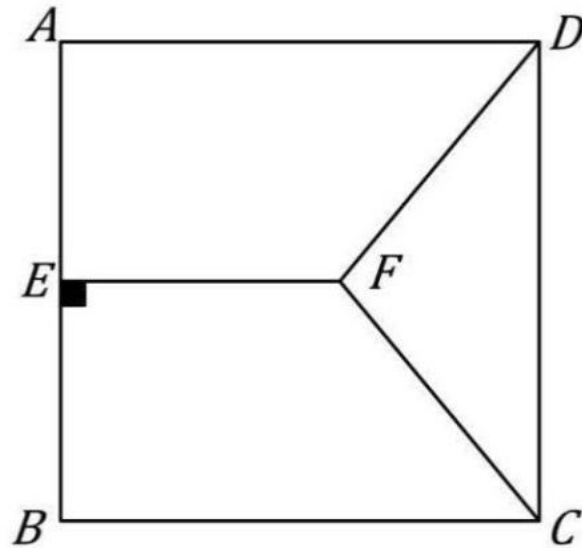
۴. در شکل زیر نسبت مساحت مربع کوچک تر به مساحت مربع بزرگ تر چقدر است؟



۵. «مشهدی حسن» می خواهد باغی را که در روستا دارد بفروشد و برای پسرش در شهر یک اتوموبیل بخرد. باغ مشهدی حسن، به شکل مثلث و به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ متر می باشد. اگر در روستا هر مترمربع زمین، یک میلیون تومان ارزش داشته باشد، مشهدی حسن چقدر بابت خرید ماشین می تواند هزینه کند؟



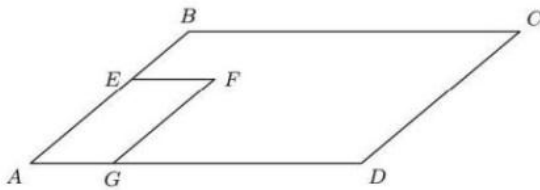
۶. در شکل زیر، طول ضلع مربع $ABCD$ یک واحد است و اضلاع FC ، FB و EF مساویند. مساحت مثلث FBC را بیابید.



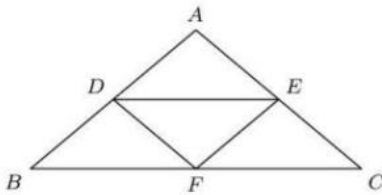


تمرین

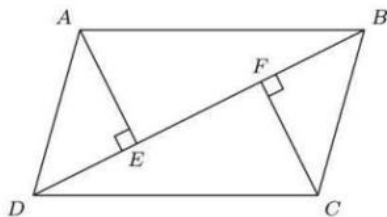
۱. در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ و همچنین چهارضلعی $AEFG$ متوازی الاضلاع هستند. زاویه های B و F چه رابطه ای باهم دارند؟



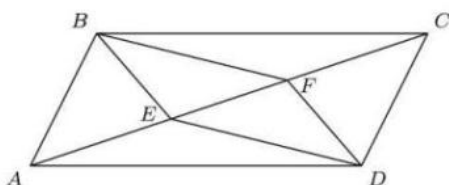
۲. در شکل زیر چهارضلعی $BDEF$ و همچنین چهارضلعی $DECF$ متوازی الاضلاع هستند. اگر $FD = FE$ ، ثابت کنید $\triangle ABC$ متساوی الساقین است.



۳. مطابق شکل، در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، AE و CF را بر BD عمود می کنیم. ثابت کنید AE و CF باهم مساوی و موازی هستند.

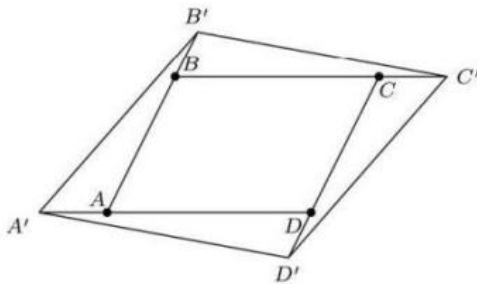


۴. مطابق شکل، در متوازی الاضلاع $ABCD$ می دانیم که $AB = AE$ و همچنین $CD = CF$ ؛ ثابت کنید $BEDF$ یک متوازی الاضلاع است.

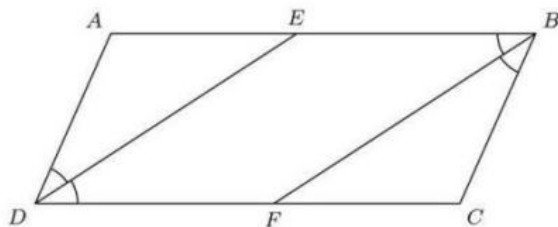




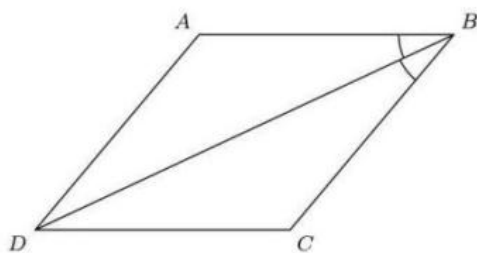
۵. اضلاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در یک جهت امتداد داده و روی آنها پاره‌خط‌های $AA' = BB' = CC' = DD'$ را جدا می‌کنیم؛ ثابت کنید چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.



۶. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، DE نیمساز زاویه‌ی D و BF نیمساز زاویه‌ی B هستند؛ ثابت کنید چهارضلعی $DEBF$ متوازی‌الاضلاع است.



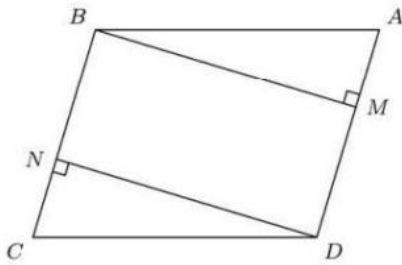
۷. متوازی‌الاضلاعی که یک قطرش نیمساز یکی از زاویه‌هایش باشد، لوزی است.



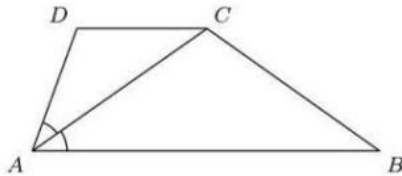


۸. ثابت کنید که قطرهای لوزی، نیمساز نیز هستند.

۹. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ خط BM را عمود بر AD و خط DN را عمود بر BC رسم می‌کنیم؛ ثابت کنید شکل $BMDN$ مستطیل است.



۱۰. در ذوزنقهی $ABCD$ ساق AD با قاعده‌ی CD مساوی است؛ ثابت کنید قطر AC زاویه‌ی A را نصف می‌کند.



۱۱. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر نصف طول وتر است.

۱۲. اگر اندازه‌ی یک زاویه‌ی حاده‌ی مثلث قائم‌الزاویه‌ای 30° باشد، طول ضلع مقابل به این زاویه، نصف طول وتر است.

۱۳. در یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌ها 15° درجه باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ طول وتر است.



مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان
اداره ی استعداد های درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی نهم و شان پایه ی هشتم

فصل هفتم

توان و جذر



تمرین

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$۱) (-۸)^۲ =$$

$$۲) \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۲ + \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ =$$

$$۳) -(-۶)^۲ =$$

$$۴) -\left(\frac{-۲}{۳}\right)^۲ =$$

$$۵) -۱۴^۲ =$$

$$۶) -\left(-\frac{۱}{۵}\right)^۳ =$$

$$۷) -۴^۳ =$$

$$۸) -\frac{(-۲)^۲}{-۷^۲} =$$

$$۹) (-۴)^۳ =$$

$$۱۰) -\frac{-\frac{۱}{۵}}{\left(-\frac{۱}{۳}\right)^۲} =$$

$$۱۱) -۲^۴ \times (-۲)^۴ =$$

$$۱۲) \frac{-(-۲)^۳}{-۳^۲} - \frac{(-۴)^۲}{(-۳)^۲} =$$

$$۱۳) \left(-\frac{۱}{۴}\right)^۲ =$$

$$۱۴) -\frac{-۶^۲}{(-۶)^۲} \div \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۳ =$$

$$۱۵) (-۱)^۱ \times ۱ + (-۱)^۲ \times ۲ + (-۱)^۳ \times ۳ + \dots + (-۱)^{۱۰۰} \times ۱۰۰ =$$



تعیین علامت عبارت تواندار

«تعیین علامت» یک عبارت یعنی این‌که، مشخص کنیم حاصل یک عبارت مثبت است یا منفی. برای مثال عبارت زیر را تعیین علامت می‌کنیم.

$$\frac{(-4) \times (-12) \times (+38)}{(+18) \times (-7) \times (+15)}$$

حاصل عبارت بالا عددی منفی است. زیرا در صورت کسر، دو عدد منفی و یک عدد مثبت در یکدیگر ضرب شده‌اند که حاصل عددی مثبت می‌شود. در مخرج کسر هم دو عدد مثبت در یک عدد منفی ضرب شده‌اند که حاصل منفی می‌شود.

صورت کسر مثبت و مخرج آن منفی است. پس کل کسر منفی می‌شود. در نتیجه در طرف راست، اعداد بدون علامت نوشته می‌شوند و تنها یک منفی پشت کسر قرار می‌گیرد.

$$\frac{(-4) \times (-12) \times (+38)}{(+18) \times (-7) \times (+15)} = -\frac{4 \times 12 \times 38}{18 \times 7 \times 15}$$

بهتر است همیشه ابتدا کسر را تعیین علامت کنیم و سپس محاسبات را انجام دهیم.

مثال:

$$\frac{\overset{+}{(-3)^6} \times \overset{-}{(-6)^3}}{\overset{+}{(+16)^3} \times \overset{+}{(-16)^8}} = -\frac{3^6 \times 6^3}{16^3 \times 16^8}$$

نکته بسیار مهم: فقط زمانی می‌توانیم این‌گونه تعیین علامت کنیم که فقط در عبارت ضرب یا تقسیم داشته باشیم.



تمرین

۱. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $\frac{(+18)^{12} \times (-8)^2}{(-7)^3 \times (+17)^4}$ ب) $\frac{(-2)^3 \times (-3)^2}{(-4)^5 \times (-5)^6}$

ج) $-(-3)^5 \times (-8)^2 \times (+6)^3 \div (-4)^2$

۲. حاصل عبارات زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۱) $6^3 \times (-6)^5 \times \left(\frac{-12}{2}\right)^2$

۲) $\left(\frac{39}{13}\right)^5 \times \left(\frac{57}{19}\right)^2$

۳) $\left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{8}{20}\right)^{18} \times (0,4)^{14}$

۴) $\left(\frac{-6}{7}\right)^2 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5 \times \left(\frac{6}{-7}\right)^7$

۵) $(-12)^6 \div (-12)^4$

۶) $(0,6)^7 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^7 \times \left(-\frac{1}{6}\right)^7 \times 6^7$

۷) $\frac{(0,1)^4}{(-4)^4 \div 4^4}$

۸) $(0,7)^6 \times \left(-\frac{5}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{15}\right)^6 \div \left(\frac{14}{8}\right)^6$

۹) $2^5 \times 3^5 \times 23^5$

۱۰) $(-9)^2 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{-1}{9}\right)^2$

۱۱) $\frac{(-8)^8}{-8}$

۱۲) $\left(-1\frac{3}{5}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$

۱۳) $\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^{72}}{\left(\frac{2}{7}\right)^{27}}$

۱۴) $\frac{(-8)^6}{4^6}$

۱۵) $(2,8)^7 \div (0,7)^7 \div 2^7$

۱۶) $\frac{16^{20}}{-4^{20}}$

۱۷) $6^8 \div 5^2 \div 5^4 \div 6^2$

۱۸) $\frac{38^2 \times 26^5 \times 11^7}{13^5 \times 44^7 \times 19^2}$

۱۹) $\left(\frac{1}{3}\right)^7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{1}{12}\right)^5$

۲۰) $(-7)^4 \times (6)^4 \times (-7)^5 \times (-6)^5$

۲۱) $(-7)^6 \times 7^5 \times (-20)^{11}$

۲۲) $(-12)^6 \times 4^3 \times (-3)^3 \times 10^9$

۲۳) $\frac{18^6 \times 18^9}{315 \times 615}$

۲۴) $\frac{8^6 \times 8^3 \div 2^9}{\left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

۲۵) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3^3$

۲۶) $\frac{2^2 \times 48^7 \times 6^3 \times 3^2 \times 8^5}{1612}$

۲۷) $\frac{(1,4)^2 \times (0,2)^2 \times (7)^2}{(2,8)^5}$

۲۸) $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$



۳. الف) اگر طول ضلع مربعی 20° درصد افزایش یابد، مساحت آن چند درصد افزایش می‌یابد؟
ب) اگر طول ضلع مکعبی 20° درصد افزایش یابد، حدس می‌زنید حجمش چند درصد افزایش می‌یابد؟

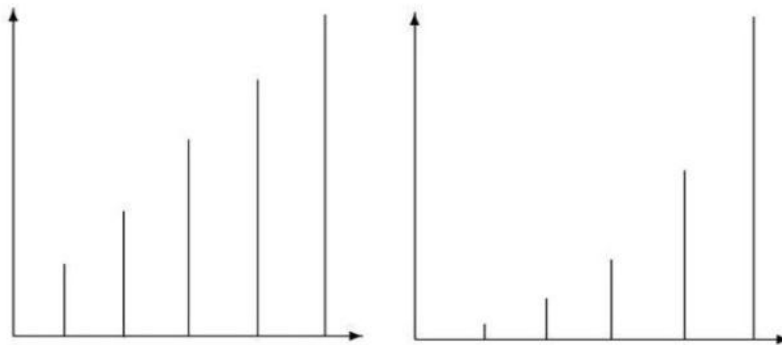
۴. در داخل مربع علامت $\times$ یا $\div$ قرار دهید، تا تساوی برقرار شود.

۱) $6^2 \square 18^3 \square 3^2 = 18^5$

۲) $18^6 \square 2^6 \square 3^6 = 27^6$

۳) $18^5 \square 3^2 \square 9^3 = 9^8$

۵. اعداد $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ و 2^5 در کدام نمودار درست نشان داده شده‌اند؟



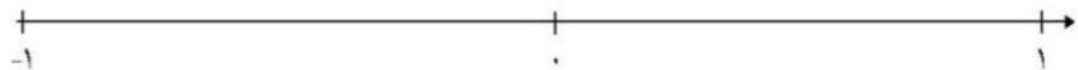


۶. اعداد زیر را روی محور نمایش دهید.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4$$



$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0, \left(-\frac{1}{2}\right)^1, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4$$



چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷. بین 2^{100} و 2^{101} شش عدد مثال بزنید که بر ۵ بخش پذیر باشند.

۸. کوچک‌ترین عدد بین 2^{100} و 2^{101} را بیابید که بر ۵ بخش پذیر باشد.

۹. بزرگ‌ترین عدد بین 2^{100} و 2^{101} که بر ۵ بخش پذیر است را به دست آورید.



۱۰. مقایسه کنید.

$$2^{63} \square 3^{43}$$

$$2^{33} \square 3^{22}$$

$$9^{15} \square 4^{25}$$

۱۱. می‌خواهیم اعداد 2^{19} و 16^5 و 64^3 را به ترتیب افزایشی بنویسیم.

$$\begin{array}{ccc} 2^{19} & 16^5 & 64^3 \\ 2^{19} & (2^4)^5 & (2^6)^3 \\ 2^{19} & 2^{20} & 2^{18} \\ 2^{18} & < & 2^{19} < 2^{20} \\ 64^3 & < & 2^{19} < 16^5 \end{array}$$

حال اعداد زیر را به ترتیب افزایشی بنویسید.

$$7^{11}, 8 \times 7^9, 10 \times 7^8, 3 \times 7^{10}$$



۱۱. اعداد زیر را به صورت کاهشی بنویسید.

$$۶^{۲۲۲۲۲}, ۳^{۳۳۳۳۳}, ۲^{۵۵۵۵۵}$$

۱۲. می‌خواهیم کوچک‌ترین عدد طبیعی m را طوری تعیین کنیم که

$$m^{۸۰} > ۸۱^{۵۰}$$

$$m^{۸۰} > ۳^{۲۰۰}$$

$$(m^۲)^{۴۰} > (۳^۵)^{۴۰}$$

$$(m^۲)^{۴۰} > (۲۴۳)^{۴۰}$$

$$\rightarrow m = ۱۶$$

$$a^{۷۲} > ۱۶^{۵۴}$$

حال کوچک‌ترین عدد طبیعی a را طوری تعیین کنید که

۱۳. می‌خواهیم بدون به کار بردن علامت‌های چهارگانه در حساب، با کمک ۴ عدد یک، عددی بنویسیم

که بزرگ‌ترین مقدار ممکن باشد.

به‌طور ذهنی و به‌سادگی می‌توان فهمید که عدد ۱۱۱۱ جواب مورد نظر مسأله نیست. زیرا عدد: ۱۱



خیلی از آن بزرگتر است. برای محاسبه‌ی این عدد باید ۱۱ را ۱۱ بار در خودش ضرب کرد. این عدد از ۲۸۵ میلیارد تجاوز می‌کند و بنابراین نسبت به عدد ۱۱۱۱ قریب ۲۵۰ میلیون مرتبه بزرگتر است.

حال بدون به کار بردن علامت‌های چهارگانه با کمک ۴ تا عدد ۲ بزرگ‌ترین عدد ممکن را بنویسید.

$$۲۲^{۲} = ۲۲^۴ \text{ یادداشت.}$$

۱۴. کدام یک از اعداد زیر از بقیه بزرگتر است؟

$$۳۱^{۴۲}, ۲۱^{۴۳}, ۴^{۳۱۵}, ۳^{۴۳۱}, ۲^{۴۳۱}$$

۱۵. در یک محور عددی فاصله هر دو عدد صحیح متوالی ۱ متر می‌باشد. در این محور فاصله $۲^{۲۱}$ از

قرینه‌اش تقریباً چند کیلومتر است؟



تمرین

۱. مقدار دقیق عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $\sqrt{5^2}$

۲) $\sqrt{\sqrt{400} + \sqrt{16} - \sqrt{64}}$

۳) $\sqrt{15 \times 35 \times 21}$

۴) $\sqrt{40 - \sqrt{16}}$

۵) $\sqrt{\frac{64}{49} \times \frac{4}{81}}$

۶) $\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{71}{72}}$

۷) $\sqrt{\frac{9+16}{36+64}}$

۸) $\sqrt{\frac{32^2 + 30^2 + 16^2 + 15^2 + 5^2}{30}}$

۹) $\sqrt{(-25) \times (-4)}$

۱۰) $\sqrt{\frac{64}{100} \times 0,36}$

۱۱) $\sqrt{0,04 \times 81}$

۱۲) $\sqrt{4 \times 25 \times 9 \times 36}$

۱۳) $\sqrt{\sqrt{625}}$

۱۴) $\sqrt{3^3 \times 2^4 \times 12}$

۱۵) $\sqrt{\frac{0,018}{0,8}}$

۱۶) $\sqrt{5000 \times 0,18}$

۱۷) $\sqrt{0,7 \times 6,3}$

۱۸) $\sqrt{\frac{\sqrt{51,2}}{\sqrt{0,2}} + \frac{\sqrt{486}}{\sqrt{6}}}$

۱۹) $\sqrt{1+2 \times \sqrt{1+3 \times \sqrt{1+4 \times \sqrt{1+5 \times \sqrt{(1+6)^2}}}}}$

۲. در جای خالی اعداد مناسب قرار دهید.

الف) $3 \times \sqrt{\square} = 21$

ب) $\sqrt{\frac{28}{\sqrt{\square}}} = 2$

ج) $3 \times 4 \times \sqrt{\square} = \frac{120}{2}$

د) $\sqrt{1+2 \times \sqrt{\square}} = 3$



۳. برای هر یک از موارد زیر، یک مثال بزنید.

(الف) جذر عددی با خود عدد مساوی باشد.

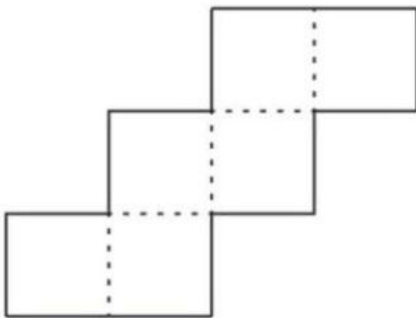
(ب) جذر عددی از خود عدد کوچک‌تر باشد.

(ج) جذر عددی از خود عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. مادر مریم برای تولّد او، یک کادو خریده که جعبه آن به شکل مکعب است. اگر برای کادوکردن این جعبه،

به $2/16$ متر مربع کاغذ کادو احتیاج باشد، اندازه هر ضلع این جعبه، چند سانتی‌متر است؟

۵. شکل زیر از ۶ مربع با مساحت‌های برابر تشکیل شده است. مساحت کل شکل 21600 سانتی‌متر مربع است.



(الف) مساحت یک مربع را پیدا کنید.

(ب) طول ضلع یک مربع را پیدا کنید.

(ج) محیط تمام شکل را برحسب سانتی‌متر پیدا کنید.

۶. مقدار تقریبی جذرهای زیر را به دست آورید.

(الف) $\sqrt{0,27}$

(ب) $\sqrt{78}$

(ج) $\sqrt{47,3}$

(د) $\sqrt{35,5}$

(ه) $\sqrt{740}$

(و) $\sqrt{0,74}$



۷. الف) مقدار تقریبی $\sqrt{3}$ را به دست آورید.

ب) تلاش کنید جواب دقیق‌تری برای $\sqrt{3}$ به دست آورید.

۸. $2\sqrt{3}$ یعنی $2 \times \sqrt{3}$. مقدار تقریبی عبارت‌های زیر را به دست آورید. سعی کنید جوابتان بهترین جواب ممکن باشد.

الف) $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$

ب) $3\sqrt{2}$

ج) $2\sqrt{5} \times \sqrt{99}$

د) $\sqrt{88} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}$

ه) $\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}$

۹. اولین رقم بعد از اعشار کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌تر است؟

ب) $\sqrt{17}$

الف) $\sqrt{15}$

۱۰. حاصل جذر چند عدد طبیعی بین ۵ و ۹ است؟

۱۱. مجموعه‌ی اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{88}$ را بنویسید.

۱۲. اگر هر یک از حروف نشان‌دهنده‌ی یک رقم باشد، کدام یک از عبارت‌های زیر حتماً غلط است؟

الف) $\sqrt{abcd} = ef$

ب) $\sqrt{abc} = def$

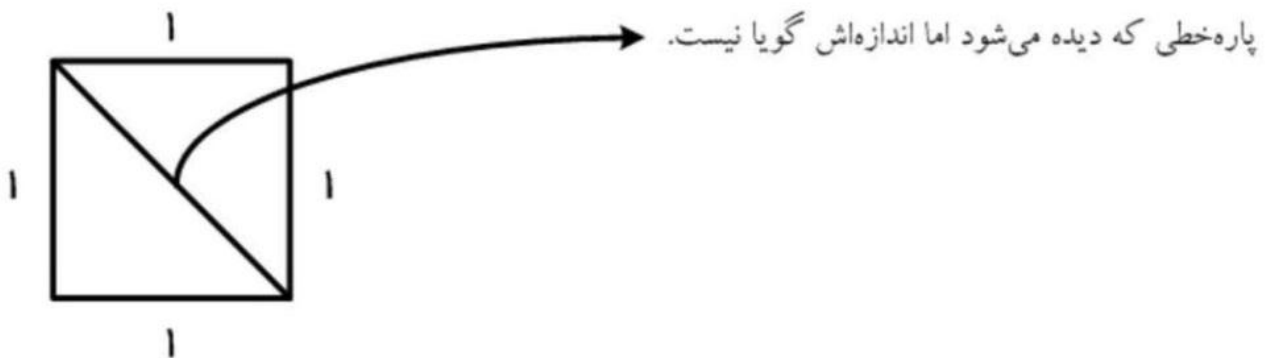
ج) $\sqrt{\circ/ab} = \circ/c$

د) $\sqrt{ab} = c$



اعداد گنگ و گویا

فیثاغورس بسیار به قضیه‌ی خود می‌بالید، زیرا توانسته بود بین هندسه و حساب یک رابطه‌ی اتصال پدید آورد. اما این پیروزی عمر کوتاهی داشت زیرا مثلاً قطر مربعی به ضلع ۱ را نمی‌توانست به صورت عددی گویا بیان کند.



در میان فیثاغورسیان^۱ حیرت زیادی ایجاد شد که پایه‌های فلسفی آن‌ها را به لرزه درآورده بود. آن‌ها به اعدادی به این صورت «آلوگون»^۲ یعنی گنگ یا نگفتنی گفتند و اعضای انجمن فیثاغورسیان، سوگند یاد کردند که تا وجود چنین اعدادی را هرگز فاش نکنند.

پروکلوس^۳ نوشته است: «کسانی که مقادیر اصم یا گنگ را نخستین بار از نهان‌گاه بیرون آوردند و افشا کردند تا آخرین نفر در طوفانی که کشتی آن‌ها را شکست، هلاک شدند. زیرا نگفتنی‌ها باید نگفتنی باقی بماند.»

^۱ افرادی که به اصول باستان اعتقاد نداشتند و به همه چیز به دید «چرا؟» نگاه می‌کردند و بعدها در مدرسه‌ای که فیثاغورس تأسیس کرده بود انجمنی به نام فیثاغورسیان تشکیل دادند.

^۲ Alogon

^۳ Perocelos



تا مدت‌ها $\sqrt{2}$ تنها عدد گنگ شناخته شده بود. بعدها به گفته‌ی افلاطون، تنودوروس کورنه‌یی نشان داد که $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{12}$ ، $\sqrt{14}$ ، $\sqrt{15}$ و $\sqrt{17}$ نیز گنگ هستند.

۱. می‌دانیم که $\sqrt{2}$ عدد گنگ است. کدام دسته از اعداد زیر گنگ هستند؟ چرا؟

الف) $2\sqrt{2}$ ، $3\sqrt{2}$ ، $4\sqrt{2}$ ، ...

ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ، ...

پ) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ، $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ، ...

۲. کدام یک از اعداد زیر گنگ هستند؟

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}، \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}، \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}، \frac{3}{\sqrt{8}}، \frac{0}{\sqrt{2}}، \frac{1}{\sqrt{2}}، \sqrt{1+0/44}$$

۳. مثالی به اضلاع $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}+1$ ، $2\sqrt{2}$ رسم کنید.

۴. سه مثلث به مساحت $\sqrt{6}$ رسم کنید.

۵. الف) بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گنگ، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

۶. الف) بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{7}$ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گنگ، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۷. الف) بین ۲ و ۷ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گویا، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.



۸. الف) بین ۲ و ۷ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین هر دو عدد گویا، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۹. الف) بین $\sqrt{2}$ و ۷ هشت عدد گویا بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین یک عدد گنگ و گویا، ۱۰۰ عدد گویا یافت.

۱۰. الف) بین $\sqrt{2}$ و ۷ هشت عدد گنگ بنویسید.

ب) راه‌حلی ارائه کنید که بتوان بین یک عدد گنگ و گویا، ۱۰۰ عدد گنگ یافت.

۱۱. زینت می‌گوید بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد گنگ و گویا وجود دارد. آیا حرف زینت درست است؟ توضیح دهید.



مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پروران جوان
اداره ملی استعدادهای درخشان استان اصفهان

ریاضی تکمیلی نهم و دهم پایه می هفتم

فصل هشتم

آمار



میانگین

۱. آقای تفنن، یک گله با ۲۰ رأس گاو دارد که میانگین وزن این گاوها ۱۵۰ کیلوگرم می‌باشد. آقای تفنن برای کمک به ساخت یک مدرسه در روستای خود، ۶ رأس از گاوهای خود را فروخت. اگر میانگین وزن این ۶ گاو ۲۰۰ کیلو بوده باشد، میانگین وزن ۱۴ گاو باقی مانده چقدر است؟
 ۲. آقای تفکر، پس از محاسبه‌ی نمرات ریاضی یک کلاس ۲۱ نفری متوجه شد که یک نمره‌ی ۱۸ را فراموش کرده است وارد لیست نمرات کند. اگر او میانگین را ۱۷ به دست آورده باشد، میانگین درست نمره‌های کلاس چند است؟
 ۳. میانگین سن ۱۵ نفر، ۲۵ می‌باشد. اگر از این گروه مسن‌ترین و جوان‌ترین نفرات را حذف کنیم، میانگین ۱۳ نفر باقی مانده چه تغییری خواهد کرد؟
 ۴. میانگین نمرات ۲۰ نفر ۱۷ می‌باشد.
- الف) حداکثر، نمره‌ی چند نفر از دانش‌آموزان می‌تواند ۱۶ باشد؟
- ب) اگر بدانیم که تعداد دانش‌آموزانی که ۱۶ شده‌اند با تعداد دانش‌آموزانی که ۱۵ شده‌اند برابر است، حداکثر، نمره‌ی چند نفر ۱۶ شده است؟
۵. نمرات ریاضی چهار کلاس سوم ۱، سوم ۲، سوم ۳ و سوم ۴ را داریم. میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۱ و سوم ۲ برابر $\frac{18}{12}$ ، میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۲ و سوم ۳ برابر $\frac{17}{24}$ و میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۳ و سوم ۴ برابر $\frac{19}{11}$ است. میانگین نمرات کلاس‌های سوم ۱ و سوم ۴ چند است؟

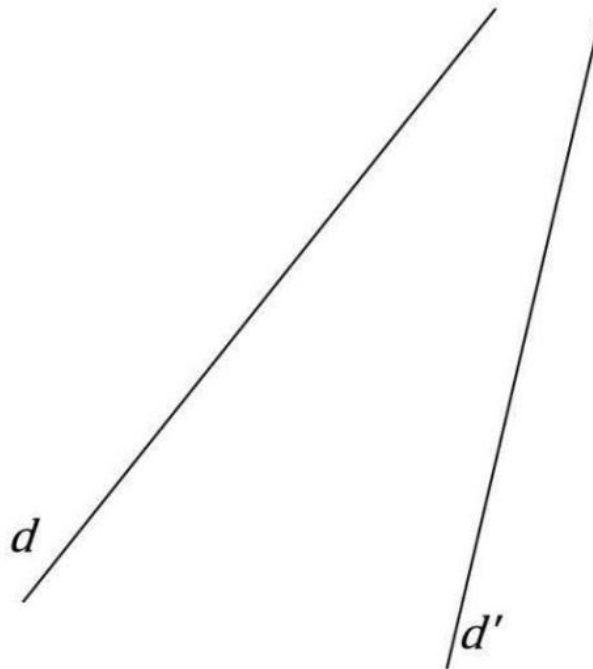


فصل نهم

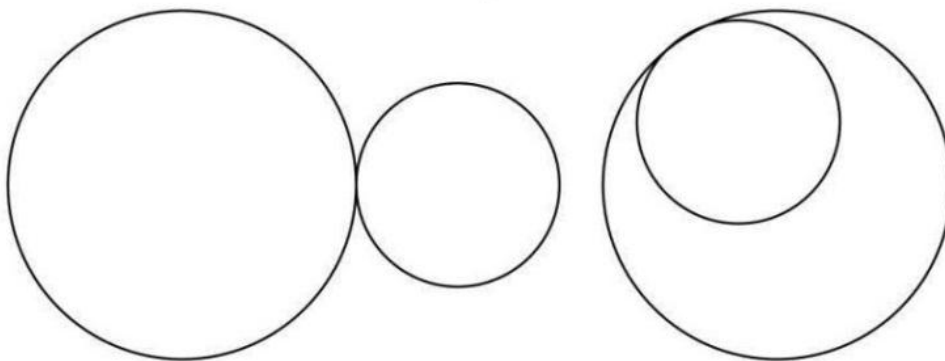
دایره



۱. دایره‌ای به شعاع دو سانتی‌متر چنان رسم کنید که بر هر دو خط زیر مماس باشد. روش کار خود را توضیح دهید.



۲. الف) دو دایره‌ی با را (صرف نظر از اندازه‌ی آن‌ها) تنها به دو روش می‌توان بر هم مماس کرد، به گونه‌ای که هر ۲ دایره، بر هم مماس باشند.



سه دایره‌ی متمایز را به چند طریق می‌توان بر هم مماس کرد، به گونه‌ای که هر ۲ دایره، بر هم مماس باشند و نقاط تماس آن‌ها نیز متمایز باشد.

ب) چهار دایره‌ی متمایز چگونه؟



۳. دو سکه هر کدام به شعاع ۲ سانتی‌متر داریم. یکی زرد و یک قرمز. سکه‌ی قرمز ثابت است ولی سکه‌ی زرد مماس بر سکه‌ی قرمز دور آن می‌چرخد. اگر سکه‌ی زرد یک دور کامل دور سکه‌ی قرمز بزند، چند بار دور خودش چرخیده است؟

به نظر شما کدام یک جواب صحیح مسئله می‌باشد؟

- یک بار
- $1/5$ بار
- دو بار
- $2/5$ بار
- هیچ کدام

۴. یک دایره و یک مربع با محیط‌های برابر و مماس بر یکدیگر داریم. مربع ثابت است و دایره دور مربع و مماس بر آن می‌چرخد. اگر دایره، یک بار دور مربع بزند چند بار دور خودش چرخیده است؟

۵. دایره موجود بسیار عجیبی است که ویژگی‌های بسیاری دارد.

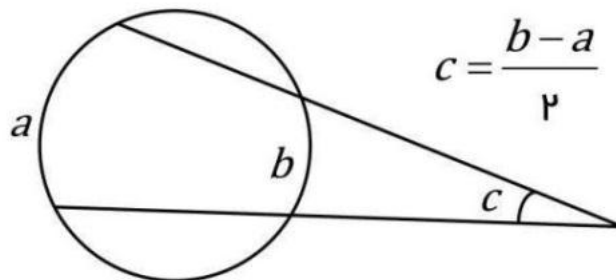
یکی از این ویژگی‌ها، قضیه‌ی جانسون می‌باشد. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند مطلبی درباره‌ی قضیه‌ی جانسون، روی وب‌گاه سمپاد بخوانند.



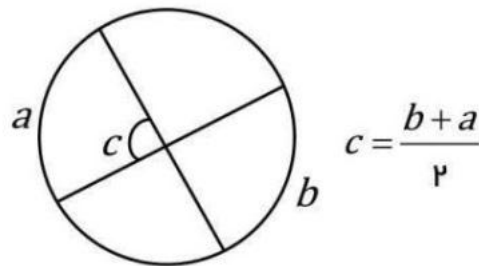


زاویه در دایره

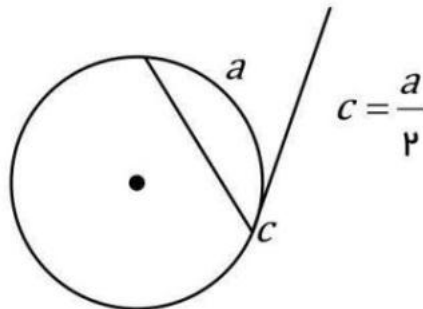
۱. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی بیرونی دایره برابرست با نصف اختلاف کمان‌های روبرو به آن زاویه.



۲. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی درونی دایره برابرست با نصف مجموع کمان‌های روبرو به آن زاویه.



۳. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی ظل^۱ دایره برابرست با نصف کمان روبرو به آن زاویه.



۱. ظل به معنای سایه است.

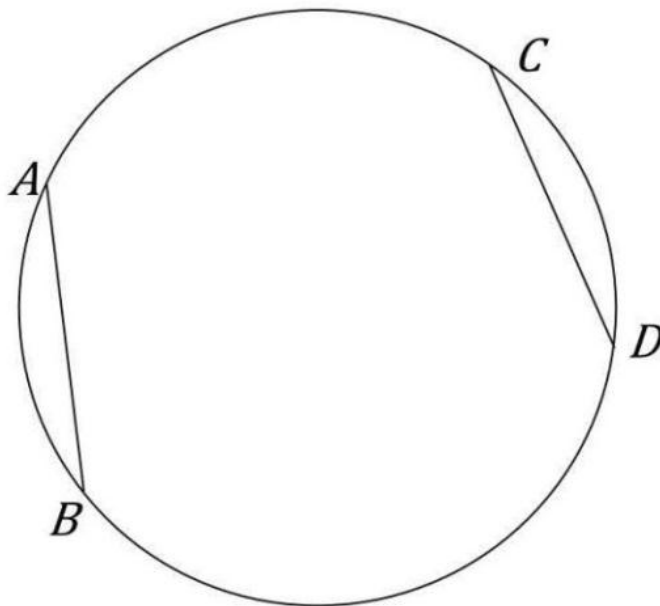


۴. روش سامان برای رسم مماس از نقطه‌ای بر دایره، را به‌خاطر بیاورید. پدر سامان می‌گوید در زمان تحصیلش، معلمشان روش دیگری برای رسم مماس گفته است:

فرض کن می‌خواهیم از نقطه‌ی A بر دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r مماسی رسم کنیم. ابتدا پاره‌خط OA را رسم کرده و وسط آن را می‌یابیم (نقطه‌ی M). به مرکز M و به شعاع OM دایره رسم می‌کنیم. از A به نقطه‌ی برخورد دو دایره وصل می‌کنیم. این پاره‌خط همان مماس مورد نظر است.

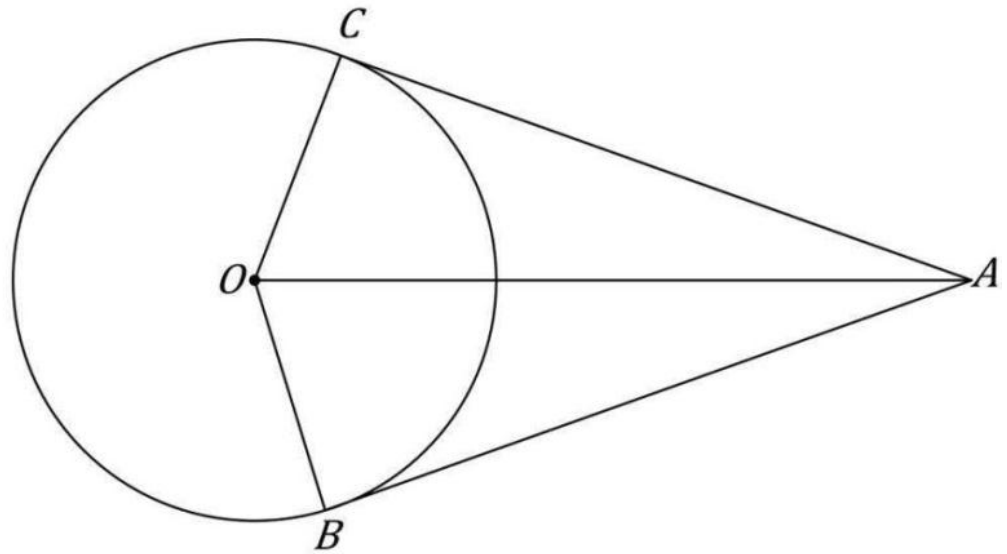
با استفاده از روشی که پدر سامان بیان کرده است مماسی بر دایره دلخواه رسم کنید.
آیا این روش درست است؟ چرا؟

۵. در دایره‌ی زیر $AB = CD$ ، ثابت کنید $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



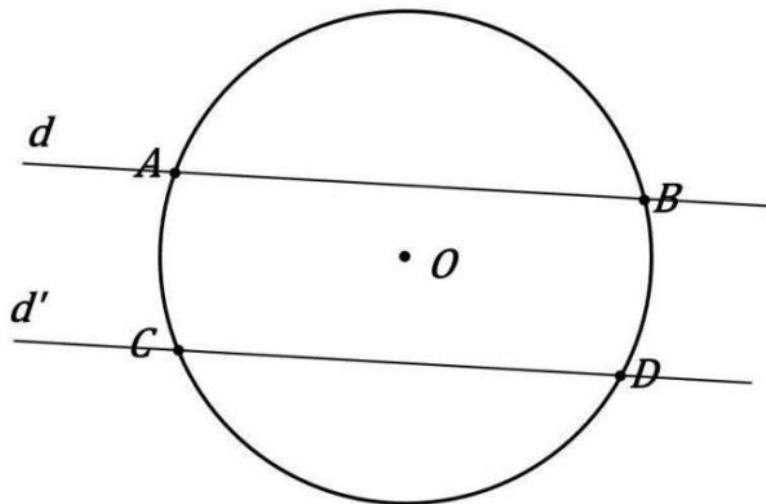


۶. ثابت کنید در دو مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره با یکدیگر مساوی هستند.



۷. ثابت کنید اگر دو خط موازی یک دایره را قطع کنند، کمان های بین این دو خط با هم برابرند.

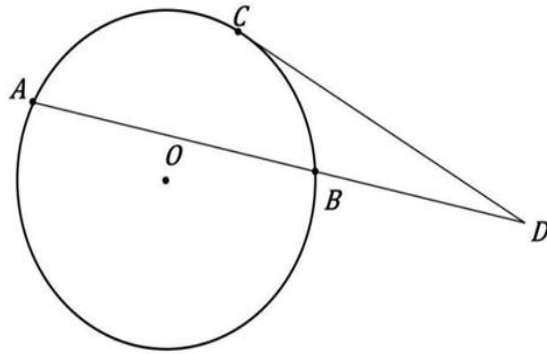
$$d \parallel d' \rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$





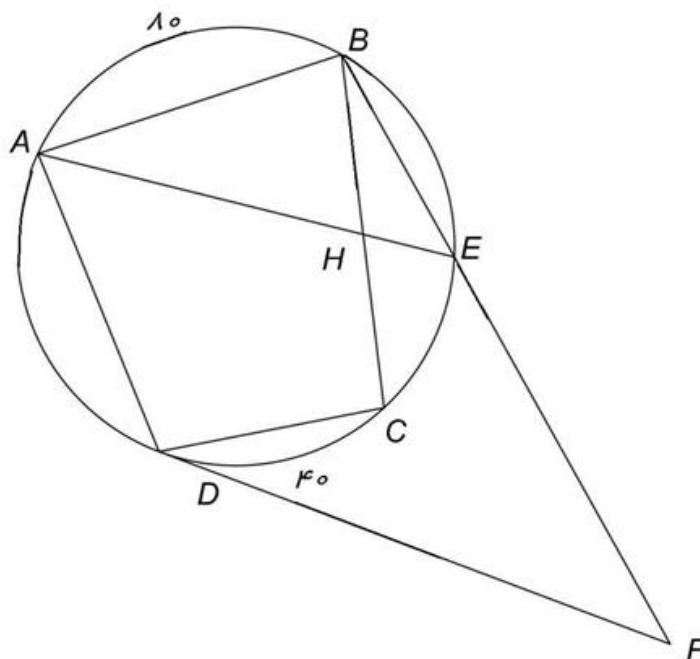
۸. در شکل زیر نشان دهید:

$$\angle D = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BC}}{2}$$



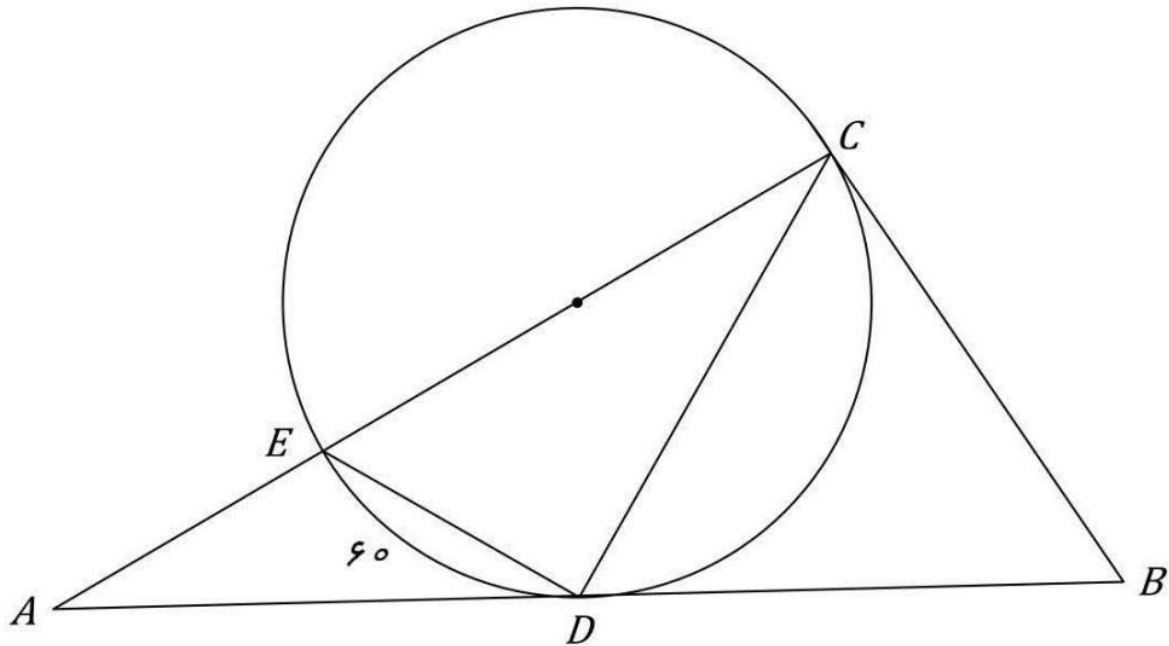
مسائل اثباتی و محاسباتی زاویه در دایره

۹. در شکل زیر FD مماس بر دایره و AB موازی CD و AD موازی BF است. زوایای BAH و BFD ، AHB ، ADF را بیابید.

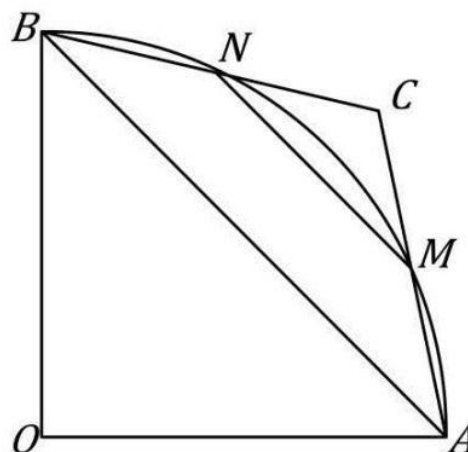




۱۰. در شکل زیر قطر EC دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. زوایای EAD ، EDC ، ECD و ABC را بیابید.



۱۱. ربع دایره‌ی AOB را در نظر بگیرید. دو وتر مساوی AM و BN را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در C قطع کنند. ثابت کنید OC بر AB و MN عمود است.

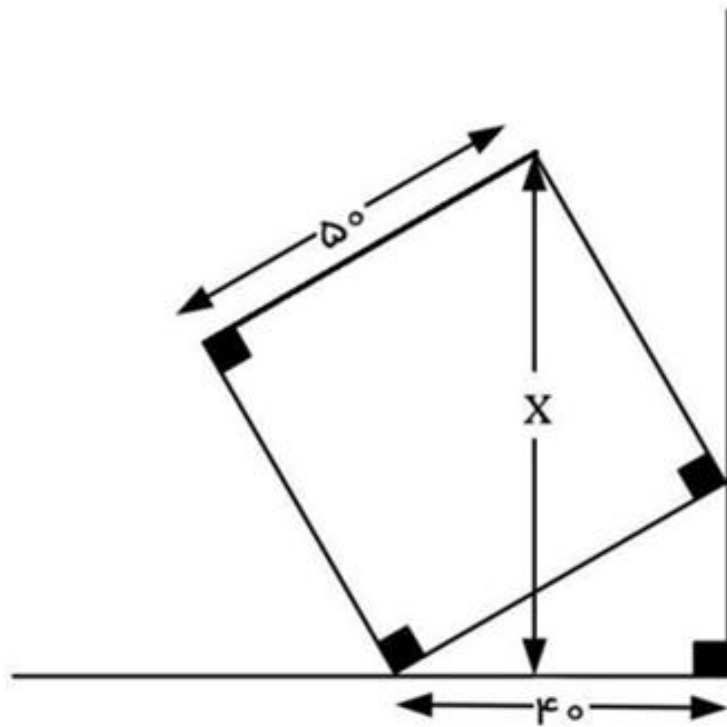




کاربردهای قضیه فیثاغورس

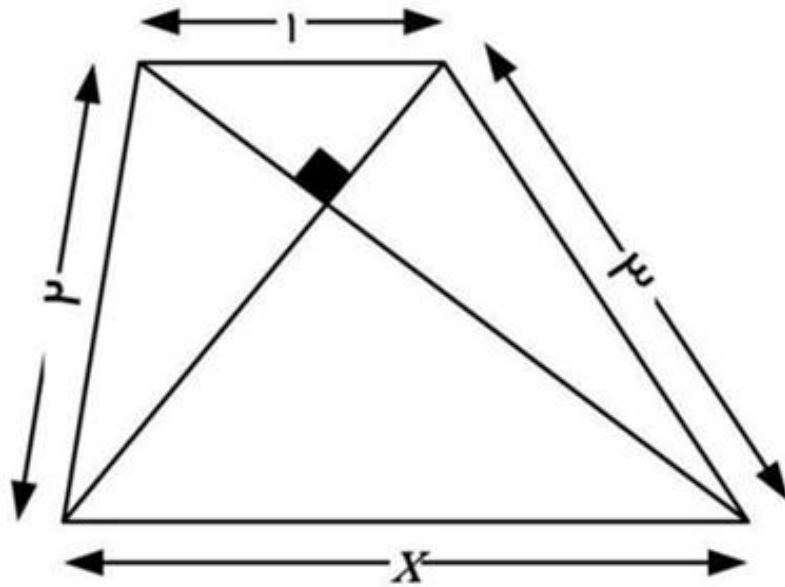
۱. در هر قسمت، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

(الف)

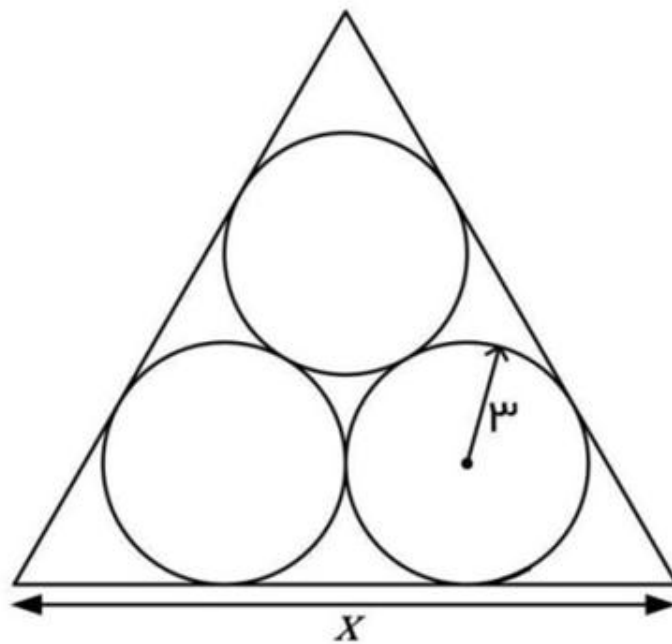




(ب)

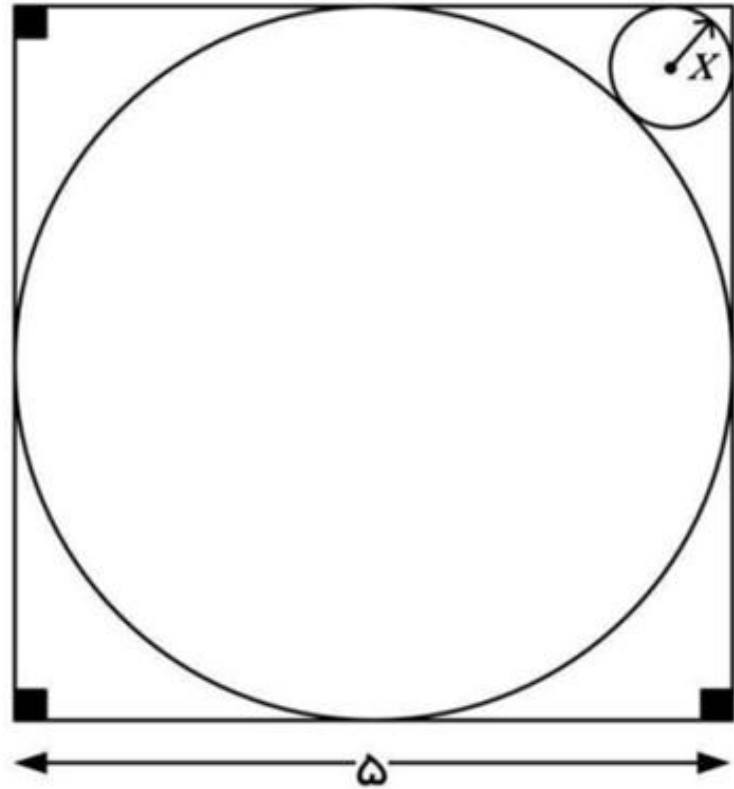


(پ)

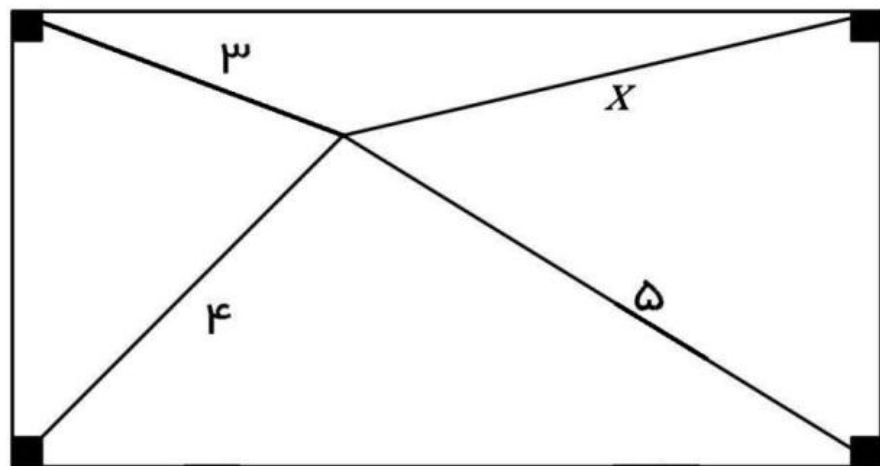




(ت)



(ث)





منابع و مراجع:

- [۱] تویاس دانتزیگ، عدد زبان علم، ترجمه ی عباس گرمان، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۶۱
- [۲] محمد بن موسی خوارزمی، جبر و مقابله، حسین خدیو جم، انتشارات اطلاعات، ۱۳۶۳
- [۳] علی قصاب، دیدار با خدامراد، پشتاز، ۱۳۸۷
- [۴] ناوم ی. ویلنکین، داستان مجموعه ها، ترجمه ی پرویز شهریاری، انتشارات فردوسی، ۱۳۷۷
- [۵] الکساندر پ. دوموریا، در قلمرو ریاضیات، ترجمه ی پرویز شهریاری، مؤسسه جاب و انتشارات امیرکبیر، ۱۳۴۸
- [۶] واسیلی د. چیستیاکوف، مسئله های تاریخی ریاضیات، ترجمه ی پرویز شهریاری، ۱۳۷۴
- [۷] هاوارد ایوز، تاریخ ریاضیات، جلد اول، ترجمه ی محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۸
- [۸] هاوارد ایوز، تاریخ ریاضیات، جلد دوم، ترجمه ی محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۶
- [۹] علیرضا توکلی صابری، از ریاضیات خود مطمئن شوید، جلد اول، دوم و سوم
- [۱۰] خسرو داودی، از توان بیشتر بدانیم، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۷
- [۱۱] د. فومین، س. گنکین و ا. ایتبرگ، محافل ریاضی (تجربه روس ها)، ترجمه ی ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۶
- [۱۲] جان دفت، درک مفاهیم ریاضی از طریق بازی های آموزشی، ترجمه ی حسن نصیرنیا، انتشارات مدرسه
- [۱۳] سرژ لانگ و جین مورو، هندسه، ترجمه ی محمدعلی رضوانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۵۷
- [۱۴] مویز و دانز، هندسه، ترجمه ی محمود دیانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۷۷
- [۱۵] شه پان النسکی، در پی فیثاغورث، ترجمه ی پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۸۴
- [۱۶] سرژ لانگ، بحث ریاضی با دانش آموز، ترجمه ی نعمت عبادیان، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۱
- [۱۷] جیمز ر. اسمارت، هندسه های جدید، ترجمه ی غلامرضا یاسی پور، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۲
- [۱۸] کتاب کار و راهنمای مطالعه ی دانش آموز، ریاضی سال دوم، دوره ی راهنمایی تحصیلی، زهره پندی، نیوشا حکمی، زهره دانایی کجانی، انتشارات فاطمی، ۱۳۸۷
- [۱۹] کارل اولدرز، کسرهای مسلسل، ترجمه ی محمد جلوداری ممقانی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۰
- [۲۰] خسرو داودی، ریاضی دوم راهنمایی: بر اساس پرسش های آزمون بین المللی ریاضی و علوم، نشر شورا، ۱۳۸۲
- [۲۱] امیرحسین حمدادی، محسن کیهانی، علی قصاب و علیرضا شیخ عطار، ریاضیات پایه دوم راهنمایی، نشر سمیاد، ۱۳۸۷
- [۲۲] کارولین مک گیلاوی، کندوکاوی در دنیای جادویی و علمی موریس اش، ترجمه ی محمدرضا کشاورزی، انتشارات بهار
- [۲۳] سید حسین سید موسوی، ۳۶۵ مسئله برای ۳۶۵ روز، برگرفته از مجله شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا، نشر نی، ۱۳۷۴
- [۲۴] تونی پایاس، ریاضیات سرشار از زیبایی، ترجمه ی رویا فائق و کاظم فائق، ۱۳۷۷
- [۲۵] ماروین ج. گرینبرگ، هندسه های اقلیدسی و ناقلیدسی، ترجمه ی محمد هادی شفیعیه، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۳
- [۲۶] علی قصاب، لیگ ریاضی راهنمایی و دبیرستان، پشتاز
- [27] Victor Klee and Stan Wagon, Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, The Mathematical Association of America, 1991



نگرش مرکزی در فرآیند یادگیری منجر به سمیت داده‌ها و آموخته‌ها خواهد شد. در

سایه‌ی احترام منطقی به برنامه‌های آموزش ریاضی مصوب وزارت آموزش

و پرورش، در این برنامه‌ی ملی ریاضی نگاری، باروندی منطقی و سلیسته، برنامه -

ای ژرف نگردنیال شده است. پرورش ریاضیات در سایه‌ی تمرین محوری و

نه فقط مفهوم انگاری اثر بخش تر خواهد بود. فراتر از تمرین‌های محاسباتی و مروری،

در این برنامه‌ی تدریس، مسائلی گنجانده شده است که استعدادهای نهفته‌ای را

آشکار کند. درخشان شدن به تنهایی هدف نبوده است و آن چه که ارزشمندتر

نذاشته شده، یادگیری ریاضی برای درک مفاهیم بنیادی زندگی آتی دانش آموز

است.