فصل ۱۴ مجانب

Chapter 14

سیرتاپیاز

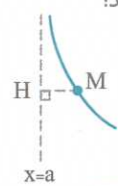
ریاضیات جامع تجربی

sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz . sirtapiaz

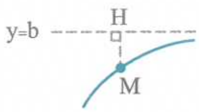
مجانب

فرض کنیم L یک خط راست در صفحه و $y=f(x)$ ضابطه‌ی یک منحنی و هم‌چنین M نقطه‌ای روی منحنی باشد. اگر $x \to \pm\infty$ یا $y \to \pm\infty$ و فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط L کم و کم‌تر شود و به صفر نزدیک شود، آن‌گاه می‌گوییم خط L مجانب نمودار منحنی f است. با توجه به این‌که خط L می‌تواند عمودی یا افقی یا مایل باشد، سه نوع مجانب عمودی، افقی و مایل خواهیم داشت. به عبارت دیگر مجانب نمودار f می‌تواند به صورت‌های زیر باشد:

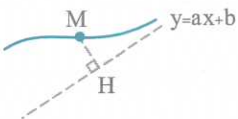
آ) مجانب قائم
$\begin{cases} MH \to 0 \\ f(x) \to +\infty \end{cases}$



ب) مجانب افقی
$\begin{cases} MH \to 0 \\ f(x) \to b \end{cases}$



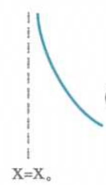
پ) مجانب مایل
$\begin{cases} MH \to 0 \\ f(x) \to ax+b \end{cases}$



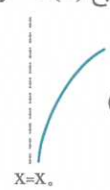
مجانب قائم

در برخی توابع ممکن است حد چپ یا حد راست تابعی در نقطه‌ی x_0، $+\infty$ (یا $-\infty$) شود. در این موارد خط عمودی $x=x_0$ به گونه‌ای است که نمودار تابع با نزدیک شدن x به x_0 از چپ یا راست، به این خط در مقادیر بزرگ مثبت (یا مقادیر منفی و از لحاظ قدرمطلق بزرگ) نزدیک می‌شود.

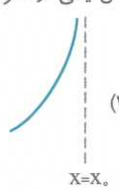
تعریف: خط $x=x_0$ را مجانب قائم نمودار تابع $y=f(x)$ می‌گوییم هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱)


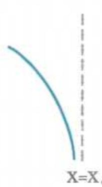
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

۲)


$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

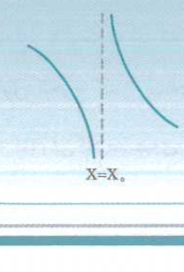
۳)


$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

۴)


$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

نکته: در برخی مواقع ممکن است دو حالت از چهار حالت بالا با هم اتفاق بیفتند. در این‌صورت نیز خط $x=x_0$ مجانب قائم نمودار f است. به‌عنوان مثال، $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ که در این حالت نمودار f در مجاورت $x=x_0$ (مجانب قائم) به‌صورت مقابل است:



در دو نوع تابع معروف، تابع کسری و تابع لگاریتمی، اگر x به سمت x_0 از راست یا چپ میل کند، حاصل حد می‌تواند $+\infty$ یا $-\infty$ شود. بنابراین در توابع کسری و لگاریتمی می‌توانیم مجانب قائم داشته باشیم.

مجانب قائم در توابع کسری گویا

نکته: در توابع کسری فقط ریشه‌های مخرج کسر می‌توانند مجانب‌های قائم نمودار تابع باشند.

به عنوان مثال، در تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$، $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های مخرج کسر هستند و داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1$$

با توجه به این‌که حد تابع در $x=0$ نامتناهی نمی‌باشد، لذا $x=0$ مجانب قائم نمودار f نمی‌باشد. از طرفی $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2-x}=\dfrac{1}{0^{\pm}}=\pm\infty$، بنابراین $x=1$، مجانب قائم نمودار f است.

در این مثال، $x=1$ ریشه‌ی مخرج کسر است ولی ریشه‌ی صورت کسر نمی‌باشد، لذا:

نکته: در تابع کسری گویای $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$، اگر $f(x_0)=0$ و $g(x_0)\neq 0$، آن‌گاه $x=x_0$ مجانب قائم نمودار تابع است.

به عنوان مثال، در تابع $f(x)=\dfrac{x^3+x-4}{x^2+x-2}$، خطوط $x=1$ و $x=-2$ مجانب قائم نمودار f می‌باشند، زیرا $x=1$ و $x=-2$ مخرج کسر را صفر می‌کنند (ریشه‌های مخرج کسر هستند) ولی صورت کسر به‌ازای آن‌ها عددی غیرصفر می‌شود (ریشه‌های صورت کسر نمی‌باشند).

نکته: در توابع کسری که ریشه‌های مخرج کسر، صورت را نیز صفر می‌کنند، باید حدگیری شود. اگر حاصل حد نامتناهی شود، آن‌گاه مجانب قائم خواهیم داشت.

به عنوان مثال، در تابع $f(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2-x}$، $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند. $x=0$ ریشه‌ی صورت کسر نیز می‌باشد، بنابراین باید حد f وقتی $x\to 0$ را به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x^2+2)}{\cancel{x}(x-1)}=\frac{2}{-1}=-2$$

لذا $x=0$ مجانب قائم نمودار f نمی‌باشد. اما با توجه به این‌که $x=1$ ریشه‌ی صورت کسر نمی‌باشد، مجانب قائم نمودار f است.

نکته: در توابع کسری که مخرج کسر ریشه‌ی حقیقی ندارد، مجانب قائم وجود ندارد.

به عنوان مثال، تابع $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+1}$ مجانب قائم ندارد. زیرا معادله‌ی $x^2+1=0$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۱: اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+mx+4}$ فاقد مجانب قائم باشد، حدود m کدام است؟

۱) $-5<m<1$ ۲) $-1<m<5$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $m\in\mathbb{R}$

پاسخ: برای آن‌که تابع کسری گویای $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+mx+4}$ فاقد مجانب قائم باشد، مخرج کسر نباید ریشه‌ی حقیقی داشته باشد. در واقع باید معادله‌ی $x^2+mx+4=0$ فاقد جواب باشد و در نتیجه:

$$\Delta=m^2-16<0\Rightarrow m^2<16\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{جذر}}|m|<4\Rightarrow -4<m<4$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۲: به‌ازای کدام مقدار m، تابع $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+mx+1}$ فقط یک مجانب قائم دارد؟

۱) $\dfrac{5}{2}$ ۲) 3 ۳) -3 ۴) $-\dfrac{5}{2}$

پاسخ: با توجه به این‌که مخرج کسر یک عبارت سه جمله‌ای از درجه‌ی ۲ است، در دو حالت زیر تابع f می‌تواند فقط یک مجانب قائم داشته باشد:

حالت اول: مخرج کسر ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$x^2+mx+1=0\Rightarrow \Delta=m^2-4=0\Rightarrow m=\pm 2$$

اگر $m=2$، آن‌گاه ضابطه‌ی تابع f به‌صورت $f(x)=\dfrac{x-2}{(x+1)^2}$ درمی‌آید که $x=-1$ مجانب قائم نمودار f است.

اگر $m=-2$، آن‌گاه ضابطه‌ی تابع f به‌صورت $f(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}$ درمی‌آید که $x=1$ مجانب قائم نمودار f است.

حالت دوم: مخرج کسر دو ریشه داشته باشد ولی یکی از ریشه‌ها $x=2$ (ریشه‌ی صورت کسر) باشد. اگر $x=2$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^2+mx+1=0$ باشد، آن‌گاه:

$$(2)^2+2m+1=0\Rightarrow m=-\frac{5}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{x-2}{x^2-\frac{5}{2}x+1}=\frac{2(x-2)}{2x^2-5x+2}=\frac{2(x-2)}{(x-2)(2x-1)}=\frac{2}{2x-1}$$

لذا خط $x=\frac{1}{2}$ مجانب قائم نمودار f است. با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی (۴) صحیح است.

نکته: در توابع کسری گویا، اگر صورت و مخرج کسر را تجزیه کنیم و عامل‌های مشترک را حذف کنیم، آن‌گاه در تابع حاصل، تمام ریشه‌های مخرج کسر مجانب قائم نمودار می‌باشند.

به عنوان مثال، در تابع $y=\frac{x^2+5x-6}{x^3-3x+2}$، داریم:

$$x^2+5x-6=(x-1)(x+6)\quad,\quad x^3-3x+2=(x^3-1)+(3-3x)=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)$$

$$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)\Rightarrow y=\frac{x^2+5x-6}{x^3-3x+2}=\frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{x+6}{(x-1)(x+2)}$$

$x=1$ و $x=-2$ ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند، لذا مجانب قائم نمودار y می‌باشند.

مجانب قائم در توابع کسری

در توابع کسری، قبل از به‌دست آوردن ریشه‌های مخرج کسر، دامنه‌ی تابع را به‌دست می‌آوریم. اگر $x=x_0$ ریشه‌ی مخرج کسر باشد و تابع در حداقل یکی از بازه‌های (x_0,a) یا (a,x_0) تعریف شده باشد و حد تابع در x_0 نامتناهی باشد، آن‌گاه $x=x_0$ مجانب قائم نمودار تابع است، به عنوان مثال، در تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$، داریم:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\ ,\ x^2-4\neq 0\}=[0,2)\cup(2,+\infty)$$

ریشه‌های مخرج کسر $x=\pm 2$ می‌باشند، اما f در دو طرف $x=-2$ تعریف نشده است. لذا $x=-2$ نمی‌تواند مجانب قائم نمودار f باشد و در $x=2$، داریم:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{0^{\pm}}=\pm\infty$$

بنابراین $x=2$ تنها مجانب قائم نمودار f است.

مثال ۳: کدام‌یک از خط‌های زیر مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{x-\sqrt{x+2}}$ است؟

۱) $x=-1$ ۲) $x=0$ ۳) $x=2$ ۴) فاقد مجانب قائم

پاسخ: ابتدا دامنه‌ی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid -x\geq 0, x+2\geq 0, x-\sqrt{x+2}\neq 0\}$$

$$-x\geq 0\Rightarrow x\leq 0\quad,\quad x+2\geq 0\Rightarrow x\geq -2\quad,\quad x-\sqrt{x+2}=0\Rightarrow x=\sqrt{x+2}\xrightarrow[\text{می‌رسانیم.}]{\text{به توان ۲}}x^2=x+2\quad,\quad x\geq 0$$

$$\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow (x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=2, x=-1\xrightarrow{x\geq 0}x=2\Rightarrow D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 0\ ,\ x\geq -2\ ,\ x\neq 2\}=[-2,0]$$

$x=2$ تنها ریشه‌ی مخرج کسر است و $2\notin[-2,0]$، لذا نمودار f فاقد مجانب قائم است. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۴: تمام مجانب‌های قائم نمودار تابع $f(x)=2\tan x+1$ کدام است؟ $(k\in\mathbb{Z})$

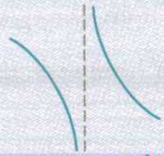
۱) $2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{k\pi}{2}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{4}$

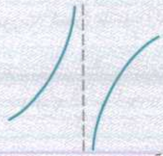
پاسخ: با توجه به رابطه‌ی مثلثاتی $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، تابع را به‌صورت یک تابع کسری می‌نویسیم و آن را ساده می‌کنیم. ریشه‌های مخرج کسر، مجانب‌های قائم نمودار f می‌باشند:

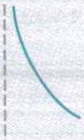
$$f(x)=2\tan x+1=\frac{2\sin x}{\cos x}+1=\frac{2\sin x+\cos x}{\cos x}$$

$\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۵: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-۲}{\sin x}$ در مجاورت مجانب قائم در بازه‌ی $(۰,\dfrac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: ریشه‌ی مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin x=۰ \Rightarrow x=k\pi \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$x=۰$ تنها مجانب قائم نمودار f در بازه‌ی $(۰,\dfrac{\pi}{۲})$ است و داریم:

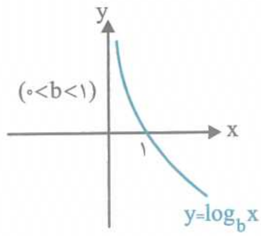
$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}-۲}{\sin x}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty$$

بنابراین نمودار f در مجاورت $x=۰$ به‌صورت

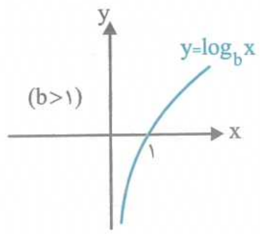
است. لذا گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مجانب قائم در توابع لگاریتمی

همان‌طوری که در فصل دوم دیده‌ایم، نمودار تابع $y=\log_b x$ به یکی از دو صورت زیر است:



$$\lim_{x\to ۰^+} y=\log_b ۰^+=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} y=\log_b(+\infty)=-\infty$$



$$\lim_{x\to ۰^+} y=\log_b ۰^+=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} y=\log_b(+\infty)=+\infty$$

در هر دو حالت وقتی‌که $x\to ۰^+$، آن‌گاه حد تابع نامتناهی می‌شود، بنابراین $x=۰$ مجانب قائم نمودار y است، لذا:

نکته: وقتی‌که $x\to x_۰^+$ یا $x\to x_۰^-$ یا $x\to x_۰$ داشته باشیم $f(x)\to ۰$ یا $f(x)\to +\infty$، آن‌گاه خط $x=x_۰$ مجانب قائم نمودار تابع $y=\log_b f(x)$ می‌باشد.

مثال ۶: مجانب‌های قائم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

آ) $y=\log(x^۲-x)$ ب) $y=\log_۲(۳+\dfrac{۱}{x})$

پاسخ: ابتدا دامنه‌ی هر یک از توابع را به‌دست می‌آوریم:

آ)
$$D_y=\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲-x>۰\}=(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty) \quad , \quad x^۲-x=۰\Rightarrow x=۰,۱$$

بنابراین خطوط $x=۰$ و $x=۱$ مجانب‌های قائم نمودار تابع $y=\log(x^۲-x)$ می‌باشند.

ب)
$$y=\log_۲(۳+\frac{۱}{x})=\log_۲(\frac{۳x+۱}{x})\Rightarrow D_y=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{۳x+۱}{x}>۰\}=(-\infty,-\frac{۱}{۳})\cup(۰,+\infty)$$

$x=-\dfrac{۱}{۳}$ ریشه‌ی معادله‌ی $\dfrac{۳x+۱}{x}=۰$ است، لذا $x=\dfrac{-۱}{۳}$ مجانب قائم نمودار تابع است. از طرفی:

$$x\to ۰^+\Rightarrow \frac{۳x+۱}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+} y=\log_۲(+\infty)=+\infty$$

بنابراین خط $x=۰$ نیز مجانب قائم نمودار تابع است.

با توجه به قسمت (ب) مثال بالا می‌توان نکته‌ی کلی زیر را نوشت:

نکته: اگر f و g دو تابع چندجمله‌ای و $y=\log_b\dfrac{f(x)}{g(x)}$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله‌های $f(x)=۰$ و $g(x)=۰$ می‌توانند مجانب‌های قائم نمودار تابع باشند.

مجانب افقی

تعریف: خط $y=b$ (b یک عدد حقیقی است.) مجانب افقی نمودار تابع $y=f(x)$ است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

با توجه به تعریف مجانب افقی، x باید بتواند به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، لذا دامنه‌ی تابع نباید محدود باشد، به عنوان مثال تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$ مجانب افقی ندارد، زیرا:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۱-x^۲\geq ۰, x\neq ۰\}=[-۱,۱]-\{۰\}\Rightarrow x\not\to\pm\infty$$

روش به‌دست آوردن مجانب افقی

برای پیدا کردن مجانب افقی یک تابع (در صورت وجود) کافی است حد تابع را در $+\infty$ یا $-\infty$ (در صورت امکان) به‌دست آوریم. اگر حاصل حد برابر عدد حقیقی b شود، آن‌گاه خط $y=b$ مجانب افقی نمودار تابع است.

مثال ۷: مجانب افقی توابع زیر را در صورت وجود مشخص کنید.

آ) $y=\frac{x+۱}{x-۲}$ ب) $y=x-\sqrt{x^۲+۴x}$ پ) $y=\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۱}}{x-۱}$ ت) $y=\frac{۱}{\sqrt{-x}}+\frac{۲}{\sqrt{۳x+۵}}$

پاسخ: آ) $D_y=\mathbb{R}-\{۲\}\Rightarrow x\to\pm\infty \quad , \quad \lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+۱}{x-۲}\xrightarrow{\text{پر توان}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=۱$

بنابراین خط $y=۱$ مجانب افقی نمودار تابع است.

ب) $D_y=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^۲+۴x\geq ۰\}=(-\infty,-۴]\cup[۰,+\infty)\Rightarrow x\to\pm\infty$

با توجه به هم‌ارزی $\sqrt{ax^۲+bx+c}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{a}\,|x+\frac{b}{۲a}|$، داریم:

$$\sqrt{x^۲+۴x}\sim|x+۲|\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}(x-(x+۲))=-۲\\ \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(x+(x+۲))=\lim_{x\to-\infty}(۲x)=-\infty\end{cases}$$

بنابراین تابع دارای مجانب افقی $y=-۲$ در شاخه‌ی $+\infty$ است.

پ) با توجه به این‌که $x^۲+۱>۰$، لذا: $D_y=\mathbb{R}-\{۱\}\Rightarrow x\to\pm\infty$

و داریم:

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\sqrt{x^۲+۱}\sim|x|\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+x}{x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{x}=۳\\ \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-x}{x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=۱\end{cases}$$

پس تابع دو مجانب افقی $y=۳$ در شاخه‌ی $+\infty$ و $y=۱$ در شاخه‌ی $-\infty$ دارد.

ت) $D_y=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-x>۰, ۳x+۵>۰\}=(-\frac{۵}{۳},۰)\Rightarrow x\not\to\pm\infty$

بنابراین تابع مجانب افقی ندارد.

مثال ۸: اگر $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=x-\sqrt{x^۲+ax+b}$ باشد، a و b کدام است؟

۱) $a=-۴\,, b\in\mathbb{R}$ ۲) $a=-۴\,, b=۰$ ۳) $a=۴\,, b\in\mathbb{R}$ ۴) $a=۴\,, b=۰$

پاسخ: وقتی‌که $x\to\pm\infty$، از تابع حد می‌گیریم و حاصل حد را برابر ۲ قرار می‌دهیم: $\sqrt{x^۲+ax+b}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}|x+\frac{a}{۲}|$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-(x+\frac{a}{۲}))=-\frac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۴$$

مقدار حد وقتی‌که $x\to+\infty$، به مقدار b وابسته نمی‌باشد، لذا به‌ازای $a=-۴$ و $b\in\mathbb{R}$ خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع است و در نتیجه گزینه‌ی (۱) صحیح است.

هم‌چنین:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+(x+\frac{a}{۲}))=\lim_{x\to-\infty}۲x=-\infty$$

لذا در شاخه‌ی $-\infty$، تابع مجانب افقی ندارد.

مثال ۹: اگر خط $y=۲$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{۴x}{ax+۲}$ باشد، مجانب قائم نمودار تابع، کدام است؟

۱) $x=-۱$ ۲) $x=-۲$ ۳) $x=۱$ ۴) $x=۲$

پاسخ: خط $y=۲$ مجانب افقی تابع f است، لذا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=۲ \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x}{ax+۲}=\frac{۴}{a}=۲\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۴x}{۲x+۲}=\frac{۲x}{x+۱}$$

$x=-۱$ فقط ریشه‌ی مخرج کسر است، لذا خط $x=-۱$ مجانب قائم تابع می‌باشد و در نتیجه گزینه‌ی (۱) صحیح است.

نکته: اگر خط $x=a$ مجانب قائم و $y=b$ مجانب افقی نمودار تابع باشند، آن‌گاه نقطه‌ی $A(a,b)$ محل تلاقی مجانب‌ها خواهد بود.

مثال ۱۰: نقطه‌ی $(-۱,۲)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $y=\frac{ax^۲+۴}{۲x^۲+bx-۳}$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: با توجه به فرض، نقطه‌ی $(-۱,۲)$ محل تلاقی مجانب‌های تابع است، لذا $x=-۱$ مجانب قائم (ریشه‌ی مخرج کسر است.) و $y=۲$ $(\lim_{x\to\pm\infty} y=۲)$ مجانب افقی تابع می‌باشد.

ریشه‌ی مخرج کسر است. $x=-۱ \Rightarrow ۲(-۱)^۲+b(-۱)-۳=۰\Rightarrow b=-۱$ (۱)

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=۲\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^۲}{۲x^۲}=\frac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=۴ \quad (۲)$$

$(۱),(۲)\Rightarrow a+b=۳\Rightarrow$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۱۱: اگر $f(x)=\frac{۲}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{x+۵}{x^۲+۴x+۳}$ دو تابع باشند، محل تلاقی مجانب‌های تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $(-۳,۱)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۳,۰)$ ۴) $(-۱,۰)$

پاسخ: تابع $f-g$ را تشکیل می‌دهیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$y=(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۲}{x+۱}-\frac{x+۵}{(x+۱)(x+۳)}=\frac{۲(x+۳)-(x+۵)}{(x+۱)(x+۳)}=\frac{x+۱}{(x+۱)(x+۳)}\Rightarrow y=\frac{۱}{x+۳}\quad,\quad x\neq-۱,-۳$$

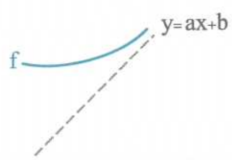
خط $x=-۳$ (ریشه‌ی مخرج کسر) مجانب قائم تابع است و $\lim_{x\to\pm\infty} y=\frac{۱}{\pm\infty}=۰$، لذا خط $y=۰$ نیز مجانب افقی نمودار تابع می‌باشد. در نتیجه نقطه‌ی $(-۳,۰)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار تابع می‌باشد. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

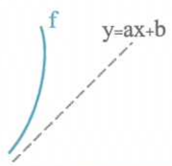
مجانب مایل

تعریف: خط $y=ax+b$ مجانب مایل نمودار تابع f است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=۰$ یا ۲) $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=۰$

از نظر هندسی، وقتی‌که $x\to\pm\infty$، آن‌گاه فاصله‌ی بین نقاط نمودار f و خط $y=ax+b$ به صفر نزدیک می‌شود:





نکته: اگر خط $y=ax+b$ مجانب مایل تابع f باشد، آن‌گاه برای به‌دست آوردن مقادیر حقیقی a و b از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\quad,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$$

مثال ۱۲: مجانب مایل نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2+4x}{x-1}$ را به‌دست آورید.

پاسخ: اگر $y=ax+b$ معادله‌ی مجانب مایل باشد، آن‌گاه:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\dfrac{x^2+4x}{x-1}}{\dfrac{x}{1}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+4x}{x^2-x}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+4x}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2+4x)-x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{x-1}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{x}=5$$

بنابراین خط $y=x+5$ معادله‌ی مجانب مایل تابع f است.

ما با دو نوع تابع زیر سر و کار داریم که در آن‌ها معادله‌ی مجانب مایل را (در صورت وجود) به‌دست می‌آوریم:

۱) تابع کسری گویا

اگر در تابع کسری گویا، درجه‌ی صورت کسر فقط یک واحد بیش‌تر از درجه‌ی مخرج آن باشد، در این‌صورت نمودار تابع دارای مجانب مایل است و اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، آن‌گاه خارج‌قسمت $=y$، معادله‌ی مجانب مایل است. به عنوان مثال، در تابع کسری گویا $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}$، درجه‌ی صورت، دقیقاً یک واحد بیش‌تر از درجه‌ی مخرج کسر است و داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -(x^3+x) & x+2 \\ \hline 2x^2-x & \\ \vdots & \end{array}$$

توجه کنیم همین‌که خارج‌قسمت به‌صورت $y=ax+b$ درآمد، تقسیم را برای به‌دست آوردن باقی‌مانده، ادامه نمی‌دهیم. بنابراین خط $y=x+2$ مجانب مایل نمودار تابع f است.

مثال ۱۳: مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. عرض نقطه‌ی A کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) -2 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 6

پاسخ: تابع دارای مجانب قائم $x=2$ است. $x^2-4x+4=(x-2)^2=0\Rightarrow x=2$

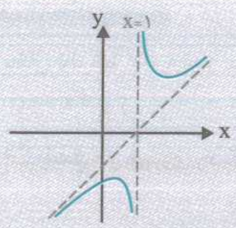
هم‌چنین با تقسیم صورت بر مخرج کسر، معادله‌ی مجانب مایل تابع به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-4x+4 \\ \cline{2-2} -x^3+4x^2-4x & x+4 \\ \hline 4x^2-4x & \\ \vdots & \end{array}$$

$\Rightarrow y=x+4, x=2\Rightarrow y=6\Rightarrow$ گزینه‌ی (۴) صحیح است.

نکته: معادله‌ی مجانب مایل تابع $y=\dfrac{x^2+ax+c}{x-b}$ به‌صورت $y=x+(a+b)$ است. به عنوان مثال، معادله‌ی مجانب مایل تابع $y=\dfrac{x^2+2x}{x+3}$ به‌صورت $y=x+(2-3)=x-1$ است.

مثال ۱۴: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2+ax+4}{x+b}$ به‌صورت مقابل است. مقدار a کدام است؟



۱) -4

۲) -2

۳) 2

۴) 4

پاسخ: $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع f است، لذا $x=1$ ریشه‌ی مخرج کسر است: $x+b=0\xrightarrow{x=1}1+b=0\Rightarrow b=-1$

هم‌چنین با توجه به نمودار، مجانب مایل از نقطه‌ی $(1,0)$ می‌گذرد، معادله‌ی مجانب مایل تابع $y=\dfrac{x^2+ax+4}{x-1}$ به‌صورت $y=x+(a+1)$ است:

نقطه‌ی $(1,0)$ روی خط $y=x+a+1$ قرار دارد. $\Rightarrow 0=1+a+1\Rightarrow a=-2\Rightarrow$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

نکته: اگر ضابطه‌ی یک منحنی به‌صورت $y = ax + b + \frac{f(x)}{g(x)}$ نوشته شده باشد و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ باشد، آن‌گاه خط $y = (ax+b)+L$ معادله‌ی مجانب مایل نمودار تابع است.

مثال ۱۵: معادله‌ی مجانب مایل منحنی $y = ۳x + ۲ + \frac{۲x^۲+۱}{x^۲-۱}$، کدام خط است؟

۱) $y = ۳x + ۲$ ۲) $y = ۳x$ ۳) $y = ۳x + ۱$ ۴) $y = ۳x + ۴$

پاسخ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۲+۱}{x^۲-۱} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲ \Rightarrow y = (۳x+۲)+۲ = ۳x+۴$ (معادله‌ی مجانب مایل)

بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

۲) تابع رادیکالی

در توابع رادیکالی که دارای هم‌ارزی $(x \to \pm\infty)$ می‌باشند، چنان‌چه هم‌ارزی حاصل به‌صورت $f(x) \overset{x\to\pm\infty}{\sim} ax+b$ درآید، آن‌گاه خط $y = ax + b$ مجانب مایل نمودار f است. به عنوان مثال، در تابع $f(x) = ۲x - \sqrt{x^۲+۴x}$ داریم:

$$\sqrt{x^۲+۴x} \overset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{۱}\,|x+\frac{۴}{۲}| = |x+۲|$$

$$x \to +\infty \xrightarrow{x+۲>۰} |x+۲| = x+۲ \Rightarrow f(x) \sim ۲x-(x+۲) = x-۲$$

بنابراین در شاخه‌ی $+\infty$، خط $y = x - ۲$ مجانب مایل نمودار f است.

$$x \to -\infty \xrightarrow{x+۲<۰} |x+۲| = -(x+۲) \Rightarrow f(x) \sim ۲x+(x+۲) = ۳x+۲$$

بنابراین در شاخه‌ی $-\infty$، خط $y = ۳x + ۲$ مجانب مایل نمودار f است.

مثال ۱۶: محل تلاقی مجانب‌های مایل نمودار تابع $f(x) = x - \sqrt{۴x^۲+۸x}$ کدام است؟

۱) $(-۲,-۳)$ ۲) $(۲,۱)$ ۳) $(۰,-۱)$ ۴) $(-۱,-۱)$

پاسخ: با استفاده از هم‌ارزی رادیکالی در $x \to \pm\infty$، داریم:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \sqrt{۴x^۲+۸x} \sim \sqrt{۴}\,|x+\frac{۸}{۸}| = ۲|x+۱|$$

$x \to +\infty \xrightarrow{x+۱>۰} f(x) \sim x-۲(x+۱) = -x-۲ \Rightarrow$ $y = -x-۲$ مجانب مایل است.

$x \to -\infty \xrightarrow{x+۱<۰} f(x) \sim x+۲(x+۱) = ۳x+۲ \Rightarrow$ $y = ۳x+۲$ مجانب مایل است.

محل تلاقی مجانب‌های مایل از حل دستگاه $\begin{cases} y = -x-۲ \\ y = ۳x+۲ \end{cases}$ به‌دست می‌آید:

$$۳x+۲ = -x-۲ \Rightarrow ۴x = -۴ \Rightarrow x = -۱ \xrightarrow{y=-x-۲} y = -۱$$

بنابراین نقطه‌ی $(-۱,-۱)$ محل تلاقی دو مجانب مایل نمودار تابع است و در نتیجه گزینه‌ی (۴) صحیح است.

مثال ۱۷: خط $y = x + ۳$ مجانب مایل نمودار تابع $f(x) = ۲x + \sqrt{ax^۲+bx-۱}$ است. معادله‌ی مجانب دیگر تابع کدام است؟

۱) $y = ۳x - ۱$ ۲) $y = ۳x - ۳$ ۳) $y = ۲x + ۲$ ۴) $y = ۲x - ۴$

پاسخ: از هم‌ارزی رادیکالی وقتی‌که $x \to \pm\infty$، استفاده می‌کنیم:

$$x \to \pm\infty \xrightarrow{a>۰} \sqrt{ax^۲+bx-۱} \sim \sqrt{a}\,|x+\frac{b}{۲a}|$$

$$x \to +\infty \xrightarrow{x+\frac{b}{۲a}>۰} f(x) \sim ۲x+\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a}) = (۲+\sqrt{a})x+\frac{b\sqrt{a}}{۲a}$$

اگر $(۲+\sqrt{a})x+\frac{b\sqrt{a}}{۲a} = x+۳$، آن‌گاه $۲+\sqrt{a} = ۱$ و در نتیجه $\sqrt{a} = -۱$، که غیر ممکن است.

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \sim ۲x-\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a}) = (۲-\sqrt{a})x-\frac{b\sqrt{a}}{۲a}$$

$$(۲-\sqrt{a})x-\frac{b\sqrt{a}}{۲a}=x+۳\Rightarrow\begin{cases}۲-\sqrt{a}=۱\Rightarrow\sqrt{a}=۱\Rightarrow a=۱\\-\frac{b\sqrt{a}}{۲a}=۳\xrightarrow{a=۱}-\frac{b}{۲}=۳\Rightarrow b=-۶\end{cases}$$

با قرار دادن $a=۱$ و $b=-۶$ در معادله‌ی $y=(۲+\sqrt{a})x+\frac{b\sqrt{a}}{۲a}$، معادله‌ی مجانب دیگر به‌دست می‌آید:

$$a=۱,b=-۶\Rightarrow y=(۲+\sqrt{۱})x+\frac{-۶\times\sqrt{۱}}{۲(۱)}\Rightarrow y=۳x-۳\Rightarrow$$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

نکته: در توابع به‌صورت $f(x)=ax+b\pm\sqrt{cx^۲+\cdots}$ با شرط $c>۰$:

آ) اگر $a=\sqrt{c}$، آن‌گاه تابع یک مجانب مایل و یک مجانب افقی دارد.

ب) اگر $a\neq\sqrt{c}$، آن‌گاه تابع دارای دو مجانب مایل می‌باشد.

به عنوان مثال، تابع $f(x)=۲x+\sqrt{x^۲-x}$ دارای دو مجانب مایل است، زیرا $a=۲\neq\sqrt{c}=۱$ می‌باشد:

$$\sqrt{x^۲-x}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}|x-\frac{۱}{۲}|\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y=۲x+x-\frac{۱}{۲}=۳x-\frac{۱}{۲}\\x\to-\infty\Rightarrow y=۲x-(x-\frac{۱}{۲})=x+\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

تابع $f(x)=۲x-\sqrt{۴x^۲+۸x}$ دارای یک مجانب مایل و یک مجانب افقی است، زیرا $a=۲=\sqrt{c}=\sqrt{۴}=۲$ می‌باشد:

$$\sqrt{۴x^۲+۸x}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}۲|x+۱|\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y=۲x-۲(x+۱)=-۲\\x\to-\infty\Rightarrow y=۲x+۲(x+۱)=۴x+۲\end{cases}$$

نکته: وقتی‌که $x\to\pm\infty$، هم‌ارزی رادیکالی برای فرجه‌ی ۳ به‌صورت روبه‌رو است: $\sqrt[۳]{ax^۳+bx^۲+cx+d}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt[۳]{a}(x+\frac{b}{۳a})$

مثال ۱۸: مجانب مایل منحنی $f(x)=۲x+\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲-۱}$ از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

۱) $(۱,-۱)$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $(-۲,-۱)$ ۴) $(-۲,-۴)$

پاسخ: $x\to\pm\infty\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲-۱}\underset{b=۶}{\overset{a=۱}{\sim}}\sqrt[۳]{۱}(x+\frac{۶}{۳(۱)})=x+۲\Rightarrow y=۲x+(x+۲)=۳x+۲$

با توجه به گزینه‌ها، خط $y=۳x+۲$ از نقطه‌ی $(-۲,-۴)$ می‌گذرد، بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

در برخی از توابع می‌توان از دو حالت بالا به‌طور هم‌زمان استفاده کرد و مجانب مایل نمودار تابع را به‌دست آورد. به عنوان مثال، تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x^۳+x^۲}{x-۱}}$ دارای مجانب مایل است. برای به‌دست آوردن مجانب مایل، ابتدا در تابع کسری $y=\frac{x^۳+x^۲}{x-۱}$، اگر صورت را بر مخرج کسر تقسیم کنیم، خارج‌قسمت یک عبارت از درجه‌ی ۲ می‌شود:

$$\begin{array}{r|l}x^۳+x^۲ & x-۱\\ -x^۳+x^۲ & x^۲+۲x\\ \hline ۲x^۲ & \\ \vdots & \end{array}\Rightarrow f(x)\overset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{x^۲+۲x}$$

اینک با استفاده از هم‌ارزی در رادیکال‌ها، معادلات مجانب‌های مایل به‌دست می‌آیند:

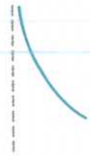
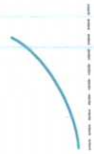
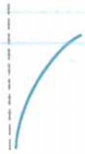
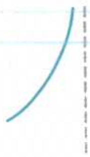
$$\sqrt{x^۲+۲x}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}|x+۱|\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\Rightarrow y=x+۱\\x\to-\infty\Rightarrow y=-x-۱\end{cases}$$

لذا تابع f دارای دو مجانب مایل است.

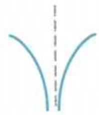
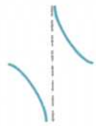
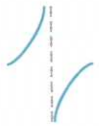
نکته: برای آن‌که تابع $y=\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ مجانب مایل داشته باشد (f و g دو چندجمله‌ای می‌باشند)، باید درجه‌ی صورت دقیقاً دو واحد بیش‌تر از درجه‌ی مخرج کسر باشد.

تست‌های فصل ۱۴
مجانب

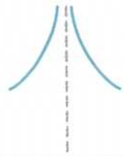
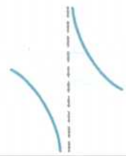
☆۱۳۵۹. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1}{x-|x|}$ در همسایگی مجانب قائم چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۳۶۰. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

☆۱۳۶۱. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{-1+\cos x}$ در مجاورت $x=0$ شبیه کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۳۶۲. تابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\log x$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۳۶۳. تابع $f(x)=\dfrac{\cot 2x}{\cos 2x}$ در بازه‌ی $(0,2\pi)$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

★۱۳۶۴. کدام‌یک از خطوط زیر، مجانب منحنی $y=1+\dfrac{1}{x^2-2x}$ نیست؟ (سراسری ریاضی)

۱) $x=2$
۲) $x=0$
۳) $y=1$
۴) $y=1+x$

☆۱۳۶۵. معادله‌ی خط مجانب تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4-2x}{\sqrt{x^2-2x}}$ وقتی $x<0$، کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $y=-2$
۲) $y=-1$
۳) $y=1$
۴) $y=2$

☆۱۳۶۶. خط به معادله‌ی $y=\dfrac{3}{2}$ مجانب افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{Ax^3+1}{(A-1)x^3+16}$ است. معادله‌ی مجانب قائم نمودار f کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $x=-4$
۲) $x=-2$
۳) $x=2$
۴) $x=4$

☆۱۳۶۷. نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{2x^2+4}$ مجانب افقی خود را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\sqrt{3}$
۳) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
۴) $\sqrt{5}$

۱۳۶۸. اگر فاصله‌ی بین مجانب‌های افقی منحنی $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{x^2+3x}}$ برابر ۳ باشد، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

☆۱۳۶۹. اگر $f(x)=\frac{2}{x+1}$ و $g(x)=\frac{x-3}{x^2-1}$، نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟

۱) $(1,0)$ ۲) $(1,1)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $(-1,1)$

☆۱۳۷۰. اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{x+2}{x}$ باشند، نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,0)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $(-1,1)$

۱۳۷۱. منحنی به معادله‌ی $y=\frac{-x^2+4x}{x^2+ax+4}$، فقط دو مجانب دارد. مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(4,-1)$ ۲) $(1,-1)$ ۳) $(1,0)$ ۴) $(2,2)$

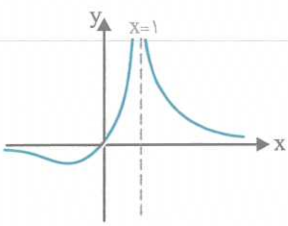
۱۳۷۲. اگر $x=-2$ مجانب قائم نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{(a+1)x^2-4x}{x^2+ax}$ باشد، معادله‌ی مجانب افقی نمودار تابع کدام است؟

۱) $y=2$ ۲) $y=3$ ۳) $y=-1$ ۴) $y=-4$

☆۱۳۷۳. اگر خط $x=-3$ تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^2+4x-1}{x^2+2x-3}$ باشد، معادله‌ی مجانب افقی آن کدام است؟

۱) $y=-3$ ۲) $y=-1$ ۳) $y=2$ ۴) $y=4$

۱۳۷۴. نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^2+x}{x^2+bx+c}$ به‌صورت مقابل است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) ۱−
۴) ۲−

☆۱۳۷۵. اگر $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x+5)=0$ باشد، مجانب مایل نمودار f کدام است؟

۱) $y=-2x+5$ ۲) $y=2x-5$ ۳) $y=x+4$ ۴) فاقد مجانب مایل

☆۱۳۷۶. عرض از مبدأ مجانب مایل تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x+4+\frac{-x^2+4}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱− ۴) ۲−

☆۱۳۷۷. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو خط مجانب نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^2}{x+1}$ از مبدأ مختصات کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{5}$

۱۳۷۸. مجانب مایل تابع $y=\frac{x^2+x+1}{x}$ با محورهای مختصات مثلثی می‌سازد. مساحت این مثلث چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

☆۱۳۷۹. مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^3+x^2}{(x-1)^2}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. عرض این نقطه کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

☆**۱۳۸۰.** مجانب مایل نمودار تابع $f(x)=\frac{2x^2+ax-1}{x+2}$ از نقطه‌ی $(1,3)$ می‌گذرد. مجانب‌های نمودار همدیگر را با کدام عرض قطع می‌کنند؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) -2 ۴) -3

۱۳۸۱. منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^3+x^2}{x^2+2}$، مجانب مایل خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) سه نقطه ۲) دو نقطه ۳) یک نقطه ۴) قطع نمی‌کند.

☆**۱۳۸۲.** به‌ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $y=-x+a$ از نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $f(x)=\frac{x^3+x^2}{x^2-2x}$ می‌گذرد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۱۳۸۳. خط‌های مجانب منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{2x^3-3x^2}{x^2-1}$ در دو نقطه‌ی A و B متقاطع‌اند. فاصله‌ی آن دو نقطه کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) ۴ ۴) ۵

☆**۱۳۸۴.** مجانب مایل نمودار تابع $f(x)=x-\sqrt{x^2+6x}$ کدام است؟

۱) $y=2x+3$ ۲) $y=2x-3$ ۳) $y=x+3$ ۴) $y=x-3$

☆**۱۳۸۵.** خط $y=x-1$ مجانب مایل نمودار تابع $f(x)=3x+\sqrt{ax^2+bx-1}$ است. معادله‌ی مجانب دیگر تابع کدام است؟

۱) $y=5x-2$ ۲) $y=5x+1$ ۳) $y=4x+3$ ۴) $y=4x-1$

۱۳۸۶. اگر نقطه‌ی $(-2,-4)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=ax-\sqrt{x^2+bx+8}$ باشد، نمودار تابع f، نیمساز ربع سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -1

☆**۱۳۸۷.** دو خط مجانب منحنی $y=ax+1-\sqrt{x^2+bx+c}$ در نقطه‌ی $A(-1,3)$ متقاطع هستند. $a+b$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۸۸. به‌ازای چه مقدار a شیب مجانب مایل تابع $y=ax+\sqrt{x^2-7x}$ برابر -1 می‌شود؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -2

☆**۱۳۸۹.** مجانب‌های مایل نمودار منحنی‌های $f(x)=ax+\sqrt{x^2-2x}\ ,\ x\geq 2$ و $g(x)=\frac{3x^2-4x}{x+5}$ بر هم عمودند. مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۳۹۰. مجانب منحنی $f(x)=x+1+\sqrt[3]{x^3-4x}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(-2,-3)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $(-2,1)$

☆**۱۳۹۱.** مجانب‌های تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{x^2+2x}+\sqrt[3]{x^3+1}$ در کدام نقطه متقاطع‌اند؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(1,-1)$ ۳) $(1,1)$ ۴) $(-1,-1)$

۱۳۹۲. فاصله‌ی نقاط منحنی نمایش تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ از خط $y=x+h$ وقتی x به سمت بی‌نهایت میل کند، به صفر میل می‌کند. h کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) -3 ۳) -1 ۴) ۳

۱۳۹۳. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{4x^2-2x+3}$، از مبدأ مختصات کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۳۹۴. محل تقاطع مجانب‌های مایل تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x-1}}$ کدام نقطه است؟

۱) $(-3,0)$ ۲) $(\frac{3}{2},0)$ ۳) $(-\frac{3}{2},0)$ ۴) $(3,0)$

☆۱۳۹۵. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x-1|+\frac{1}{x}$ دارای چند مجانب است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) مجانب ندارد.

۱۳۹۶. تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{x^2-\sqrt{x}}{|x|-1}$ دارای:

۱) یک مجانب مایل و یک مجانب قائم است. ۲) یک مجانب مایل است.

۳) یک مجانب قائم و دو مجانب مایل است. ۴) دو مجانب قائم و دو مجانب مایل است.

۱۳۹۷. تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{1}{x^2+2x}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۹۸. تابع $y=\log\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۳۹۹. منحنی تابع با ضابطه‌ی $y=\tan 2x+\cot 3x$ در فاصله‌ی $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}$ چند خط مجانب دارد؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

تست‌های کنکور

★۱۴۰۰. اگر $f(x)=\frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x)=\frac{2x-1}{x+2}$ باشند، نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع fog کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۱)

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(-2,2)$ ۴) $(0,1)$

★۱۴۰۱. اگر محور y ها تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x)=\frac{x^3+ax-2}{x^2-x}$ باشد، آن‌گاه معادله‌ی مجانب مایل آن کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $y=x-2$ ۲) $y=x-1$ ۳) $y=x+1$ ۴) $y=x+2$

☆۱۴۰۲. یکی از مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{2x^3+ax^2+5}{x^2+x}$، محور x ها را در نقطه‌ی به طول (-2) قطع می‌کند. a کدام است؟ (سراسری تجربی- ۹۰)

۱) -3 ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

☆۱۴۰۳. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2,0)$ از خط مجانب منحنی به معادله‌ی $y=x-\sqrt{x^2-2x}\ ;\ x\le 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{2}$

★۱۴۰۴. نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $y=2x-\sqrt{x^2-2x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۸)

۱) $(-1,0)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(1,3)$

★۱۴۰۵. مجانب‌های نمودار تابع $y=\frac{x^3}{x^2-x-6}$ در دو نقطه‌ی A و B متقاطع‌اند. مختصات نقطه‌ی وسط AB کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ۲) $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ ۳) $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ ۴) $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

۱۴۰۶. منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{(a-1)x^2+ax+2-a}$، دارای دو خط مجانب است. مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی- ۸۷)

۱) $a<2$ ۲) $a>0$ ۳) $a>1$ ۴) $1<a<2$

☆۱۴۰۷. منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^2+3x}{ax^2+4x-1}\ ;\ a\neq 0$، فقط دو خط مجانب دارد. مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۷)

۱) $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ۲) $(\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ ۳) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ۴) $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

۱۴۰۸. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ از مبدأ مختصات کدام است؟ (سراسری تجربی- ۸۵)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۵

۱۴۰۹★. به‌ازای کدام مقدار a، خط به معادله‌ی $y=x+a$ از نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=\frac{2x^2-2x}{x^2+x-2}$ می‌گذرد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

۱۴۱۰. خط مجانب منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt[3]{8x^3+2x^2}$، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی- ۹۵)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{6}$

۱۴۱۱. امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند. اندازه‌ی AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۴)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۱۴۱۲. امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ در نقاط A و B با عرض‌های مثبت متقاطع هستند. اندازه‌ی AB کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۱۴۱۳☆. نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$، با کدام طول مجانب خود را قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۲)

۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۴۱۴★. اگر $f(x)=\frac{x+11}{x^2-3x-4}$ و $g(x)=\frac{3}{x-4}$، نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) $(-1,0)$ ۲) $(4,-1)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(4,0)$

۱۴۱۵. اضلاع مثلثی منطبق بر محور xها و مجانب‌های منحنی به معادله‌ی $y=(x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ است. مساحت این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

۱۴۱۶☆. خطوط مجانب نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^3+x^2}{x^2-4}$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. اندازه‌ی پاره‌خط AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

۱۴۱۷☆. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}$ خط مجانب افقی خود را در نقطه‌ی A قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط مجانب قائم کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۱۸. معادله‌ی مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}}$ وقتی $x\to-\infty$، کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۷)

۱) $2y-2x-3=0$ ۲) $2y+2x-3=0$ ۳) $2y-2x+3=0$ ۴) $2y+2x+3=0$

۱۴۱۹★. خط به معادله‌ی $y=\frac{3}{2}$ مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x-1+\sqrt{ax^2+bx}$ است. b کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) ۱۰- ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۱۰

۱۴۲۰. دو تابع $f(x)=\frac{x^2+x}{x+2}$ و $g(x)=\frac{x^2}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر A و B محل تلاقی مجانب‌های منحنی تابع $(g-f)$ و O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۴۲۱☆. دو تابع $f(x)=\frac{x+1}{x+\sqrt{x}}$ و $g(x)=\frac{1-x}{x-\sqrt{x}}$ مفروض‌اند. تعداد مجانب‌های نمودار تابع $f+g$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۵)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ تست‌های فصل ۱۴ مجانب

۱۳۵۹ ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به تعریف $|x|=\begin{cases} x & x\ge ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$، داریم:

$$f(x)=\begin{cases} \text{تعریف نشده} & x\ge ۰ \\ \dfrac{۱}{۲x} & x<۰ \end{cases}$$

بنابراین فقط در سمت چپ خط $x=۰$ (مجانب قائم) نمودار داریم و هم‌چنین $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$، بنابراین نمودار تابع به‌صورت مقابل می‌باشد.

۱۳۶۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$$x^۳+x=x(x^۲+۱)=۰\Rightarrow x=۰, x^۲+۱=۰$$

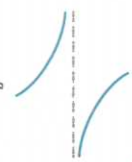
معادله‌ی $x^۲+۱=۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد، لذا $x=۰$ مجانب قائم نمودار تابع است و داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} y=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x+۱}{x(x^۲+۱)}=\frac{۱}{۰^+\times ۱}=+\infty,\ \lim_{x\to ۰^-} y=\frac{۱}{۰^-\times ۱}=-\infty$$

بنابراین نمودار گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱۳۶۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$\lim_{x\to ۰} f(x)\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x}{-\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{-x}=\begin{cases}-\infty & x\to ۰^+ \\ +\infty & x\to ۰^-\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به‌صورت  می‌باشد.

۱۳۶۲ ۱ ۲ **۳** ۴

دامنه‌ی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f=\{x\in \mathbb{R}\mid x>۰, x^۲\ne ۱\}=(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$$

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-۱+\log ۰^+=-\infty\Rightarrow$ $x=۰$ مجانب قائم تابع است.

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\frac{۱}{۰^\pm}+\cancel{\log ۱}^{\,۰}=\pm\infty\Rightarrow$ $x=۱$ مجانب قائم تابع است.

۱۳۶۳ ۱ ۲ **۳** ۴

با استفاده از رابطه‌ی $\cot ۲x=\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}$، ضابطه‌ی تابع را به‌صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{\cot ۲x}{\cos ۲x}=\frac{\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}}{\frac{\cos ۲x}{۱}}=\frac{۱}{\sin ۲x}$$

$$\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi, k\in \mathbb{Z}\xrightarrow{x\in(۰,۲\pi)} x=\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲}$$

بنابراین تابع f در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ دارای سه مجانب قائم است.

۱۳۶۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

$x=۰$ و $x=۲$ (ریشه‌های مخرج) مجانب‌های قائم و $y=۱$ مجانب افقی نمودار تابع است ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=۱$). بنابراین خط $y=x+۱$ مجانب نمودار تابع نمی‌باشد.

۱۳۶۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

حد تابع را در شاخه‌ی $-\infty$ به‌دست می‌آوریم:

$$x<۰\xrightarrow{x\to-\infty}\sqrt{x^۲-۲x}\sim|x-۱|=-x+۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۴-۲x}{-x+۱}\right)=۰+۲=۲$$

پس خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است.

۱۳۶۶ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{Ax^۳}{(A-۱)x^۳}=\frac{A}{A-۱}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow A=۳$$

$$\Rightarrow y=\frac{۳x^۳+۱}{۲x^۳+۱۶}, ۲x^۳+۱۶=۰\Rightarrow x^۳=-۸\Rightarrow x=-۲$$

۱۳۶۷ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به این‌که $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{۱}{۲}$ می‌باشد، خط $y=\frac{۱}{۲}$ مجانب افقی تابع است. با حل معادله‌ی $f(x)=\frac{۱}{۲}$، طول نقطه‌ی تلاقی به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^۲-x+۱}{۲x^۲+۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x^۲+۴=۲(x^۲-x+۱)$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۴=۲x^۲-۲x+۲\Rightarrow -۲x=۲\Rightarrow x=-۱$$

$$\Rightarrow A(-۱,\tfrac{۱}{۲})\Rightarrow OA=\sqrt{(-۱)^۲+(\tfrac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

۱۳۶۸ ۱ **۲** ۳ ۴

با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{x^۲+۳x}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}|x+\frac{۳}{۲}|$، مجانب‌های افقی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x}=a,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{-x}=-a$$

دو خط $y=a$ و $y=-a$ مجانب‌های افقی تابع می‌باشند و فاصله‌ی بین آن‌ها $|۲a|$ است، لذا: $|۲a|=۳\xrightarrow{a>۰}۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$

۱۳۶۹ **۱** ۲ ۳ ۴

ضابطه‌ی تابع $f-g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(f-g)(x)=\frac{۲}{x+۱}-\frac{x-۳}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۲(x-۱)-(x-۳)}{(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\frac{\cancel{x+۱}}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}=\frac{۱}{x-۱}$$

خط $x=۱$ مجانب قائم (ریشه‌ی مخرج کسر) و $y=۰$ مجانب افقی ($\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=۰$) تابع می‌باشند، لذا نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها، نقطه‌ی $(۱,۰)$ است.

۱۳۷۰ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

ضابطه‌ی تابع fog را به‌دست می‌آوریم: $y=(fog)(x)=f(g(x))$

$$=f(\frac{x+2}{x})=\frac{\frac{x+2}{x}-1}{\frac{x+2}{x}+1}=\frac{2}{2x+2}=\frac{1}{x+1}$$

خط $x=-1$ مجانب قائم و $y=0$ مجانب افقی تابع می‌باشند، لذا نقطه‌ی $(-1,0)$ محل تلاقی مجانب‌ها می‌باشد.

۱۳۷۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

با توجه به این‌که $\lim_{x\to\pm\infty} y=-1$ می‌باشد، پس خط $y=-1$ مجانب افقی تابع است. تابع نمی‌تواند مجانب مایل داشته باشد و در نتیجه تابع باید فقط یک مجانب قائم داشته باشد که دو حالت وجود دارد:

حالت اول: مخرج کسر فقط یک ریشه داشته باشد:

$$x^2+ax+4=0 \quad , \quad \Delta=0\Rightarrow a^2-16=0\Rightarrow a=\pm4$$

$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=-\frac{a}{2}=\pm2$$

در این حالت نقاط $(2,-1)$ و $(-2,-1)$ محل تلاقی مجانب‌ها می‌باشند.

حالت دوم: $x=0$ یا $x=4$ (ریشه‌های صورت)، یکی از ریشه‌های مخرج کسر باشند. $x=0$ نمی‌تواند مخرج کسر را صفر کند، لذا $x=4$ می‌تواند ریشه‌ی مخرج کسر باشد: $(4)^2+a(4)+4=0\Rightarrow a=-5$

$$\Rightarrow y=\frac{-x^2+4x}{x^2-5x+4}=\frac{-x(x-4)}{(x-4)(x-1)}=\frac{-x}{x-1}, x\neq4$$

در این حالت $x=1$ مجانب قائم تابع است و در نتیجه نقطه‌ی $(1,-1)$ محل تلاقی مجانب‌های تابع می‌باشد.

۱۳۷۲ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

$x=-2\Rightarrow(-2)^2+a(-2)=0$ ریشه‌ی مخرج کسر است.

$$\Rightarrow 4-2a=0\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3x^2-4x}{x^2+2x}\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

بنابراین خط $y=3$ مجانب افقی نمودار تابع است.

۱۳۷۳ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$x=-3$ و $x=1$ ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند. برای آن‌که $x=1$ مجانب قائم تابع نباشد، باید $x=1$ ریشه‌ی صورت کسر نیز باشد، لذا:

$$a(1)^2+4(1)-1=0\Rightarrow a=-3\Rightarrow y=\frac{-3x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\xlongequal{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2}{x^2}=-3$$

پس خط $y=-3$ مجانب افقی نمودار تابع f است.

۱۳۷۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

خط $x=1$ مجانب قائم تابع f است و با توجه به این‌که در دو طرف $x=1$، حد تابع برابر $+\infty$ است، لذا $x=1$ ریشه‌ی مضاعف مخرج کسر است:

$$x^2+bx+c=(x-1)^2=x^2-2x+1\Rightarrow b=-2, c=1$$

از طرفی محور xها (خط $y=0$) مجانب افقی نمودار تابع می‌باشد، بنابراین درجه‌ی صورت کسر باید از درجه‌ی مخرج کسر کم‌تر باشد، لذا: $a=0$

بنابراین مقدار $a+b+c$ برابر -1 می‌باشد.

۱۳۷۵ (۱) **(۲)** (۳) (۴)

طبق تعریف مجانب مایل، اگر $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax+b))=0$، آن‌گاه خط $y=ax+b$ مجانب مایل نمودار تابع است. طبق فرض، $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(2x-5))=0$ می‌باشد، لذا $y=2x-5$ مجانب مایل نمودار تابع است.

۱۳۷۶ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+4}{x^2+1}=-1\xrightarrow{\text{مجانب مایل}} y=(2x+4)-1=2x+3$$

بنابراین عرض از مبدأ مجانب مایل برابر ۳ است.

۱۳۷۷ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

$x=-1$ مجانب قائم (ریشه‌ی مخرج) و $y=x-1$ مجانب مایل منحنی تابع است:

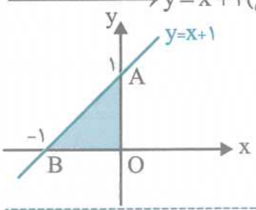
$$\begin{cases}x=-1\\y=x-1\end{cases}\Rightarrow y=-2\Rightarrow A(-1,-2),O(0,0)\Rightarrow OA=\sqrt5$$

۱۳۷۸ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

$$y=\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0} y=x+1 \text{ (مجانب مایل)}$$

محل تلاقی خط $y=x+1$ با محورهای مختصات در شکل مقابل مشخص شده است:



مساحت مثلث $=\frac{1}{2}OA\times OB=\frac{1}{2}$

۱۳۷۹ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

خط $x=1$ مجانب قائم تابع است. هم‌چنین با تقسیم صورت بر مخرج کسر، مجانب مایل، یعنی خط $y=x+3$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}x=1\\y=x+3\end{cases}\Rightarrow y=4$$

۱۳۸۰ (۱) (۲) (۳) **(۴)**

با تقسیم صورت بر مخرج کسر، مجانب مایل تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2+ax-1 & x+2 \\ \underline{-2x^2-4x} & 2x+(a-4) \\ (a-4)x-1 & \\ \vdots & \end{array}\xrightarrow{\text{مجانب مایل}} y=2x+(a-4)$$

نقطه‌ی $(1,3)$ روی خط مجانب مایل قرار دارد، لذا:

$$3=2+a-4\Rightarrow a=5\Rightarrow y=2x+1$$

خط $x=-2$ مجانب قائم تابع است، لذا:

$$\begin{cases}x=-2\\y=2x+1\end{cases}\Rightarrow y=-3$$

۱۳۸۱ (۱) (۲) **(۳)** (۴)

درجه‌ی صورت کسر یک واحد از درجه‌ی مخرج کسر بیش‌تر است، لذا تابع دارای یک مجانب مایل است:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2 & x^2+2 \\ \underline{-x^3-2x} & x+1 \\ x^2-2x & \\ \vdots & \end{array}\xrightarrow{\text{مجانب مایل}} y=x+1$$

$$\begin{cases}y=x+1\\y=\frac{x^3+x^2}{x^2+2}\end{cases}\Rightarrow\frac{x^3+x^2}{x^2+2}=x+1\Rightarrow x^3+x^2=(x+1)(x^2+2)$$

$$\Rightarrow x^2(x+1)-(x+1)(x^2+2)=(x+1)(x^2-(x^2+2))$$

$$=-2(x+1)=0\Rightarrow x=-1$$

بنابراین تابع، مجانب مایل خود را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۳۸۲ (۱ **۲** ۳ ۴)

ضابطه‌ی تابع را به‌صورت ساده شده می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{x^{\cancel{۲}}(x+۱)}{\cancel{x}(x-۲)}=\frac{x^۲+x}{x-۲}$$

خط $x=۲$ (ریشه‌ی مخرج) مجانب قائم و با تقسیم صورت بر مخرج کسر، خط $y=x+۳$ به‌دست می‌آید که مجانب مایل است:

$$\begin{cases}x=۲\\y=x+۳\end{cases}\Rightarrow y=۵\xrightarrow[\text{قرار دارد.}\ y=-x+a]{A(۲,۵)\ \text{روی خط}}۵=-۲+a\Rightarrow a=۷$$

۱۳۸۳ (۱ **۲** ۳ ۴)

$x=\pm۱$ مجانب‌های قائم نمودار تابع هستند و با تقسیم صورت بر مخرج کسر، معادله‌ی مجانب مایل که خط به معادله‌ی $y=۲x-۳$ است، به‌دست می‌آید:

$$x=۱,x=-۱\xrightarrow{y=۲x-۳}y=-۱,y=-۵$$

$$\Rightarrow A(۱,-۱),B(-۱,-۵)$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(۱+۱)^۲+(-۱+۵)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۱۳۸۴ (**۱** ۲ ۳ ۴)

تابع f در شاخه‌ی $-\infty$ دارای مجانب مایل است که از هم‌ارزی رادیکالی به‌دست می‌آید:

$$x\to-\infty\Rightarrow\sqrt{x^۲+۶x}\sim-\sqrt{۱}(x+\frac{۶}{۲})$$

$$x\to-\infty\Rightarrow f(x)\sim x+(x+۳)\xrightarrow{\text{مجانب مایل}}y=۲x+۳$$

۱۳۸۵ (۱ **۲** ۳ ۴)

با توجه به این‌که $a>۰$ است، در شاخه‌ی $-\infty$ تابع f دارای مجانب مایل است:

$$x\to-\infty\Rightarrow f(x)\sim ۳x-\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})=(۳-\sqrt{a})x-\frac{b\sqrt{a}}{۲a}$$

از طرفی خط $y=x-۱$ مجانب مایل تابع است، لذا:

$$\begin{cases}۳-\sqrt{a}=۱\Rightarrow\sqrt{a}=۲\Rightarrow a=۴\\-\frac{b\sqrt{a}}{۲a}=-۱\xrightarrow{a=۴}b=۴\end{cases}\Rightarrow f(x)=۳x+\sqrt{۴x^۲+۴x-۱}$$

معادله‌ی مجانب دیگر در شاخه‌ی $+\infty$ به‌صورت زیر است:

$$x\to+\infty\Rightarrow f(x)\sim ۳x+۲(x+\frac{۱}{۲})\Rightarrow y=۵x+۱$$

۱۳۸۶ (۱ ۲ **۳** ۴)

با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها در $\pm\infty$، مجانب‌های تابع را تعیین می‌کنیم:

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\sqrt{x^۲+bx+۸}\sim|x+\frac{b}{۲}|$$

$$x\to+\infty\Rightarrow y=ax-(x+\frac{b}{۲})$$

$$\xrightarrow[\text{روی خط قرار دارد.}]{\text{نقطه‌ی}(-۲,-۴)}-۴=-۲a+۲-\frac{b}{۲}\xrightarrow{\times۲}-۴a-b=-۱۲\quad(۱)$$

$$x\to-\infty\Rightarrow y=ax+(x+\frac{b}{۲})$$

$$\xrightarrow[\text{روی خط قرار دارد.}]{\text{نقطه‌ی}(-۲,-۴)}-۴=-۲a-۲+\frac{b}{۲}\xrightarrow{\times۲}-۴a+b=-۴\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\begin{cases}-۴a-b=-۱۲\\-۴a+b=-۴\end{cases}\Rightarrow a=۲,b=۴$$

$$\Rightarrow f(x)=۲x-\sqrt{x^۲+۴x+۸}$$

با حل معادله‌ی $x<۰$ و $f(x)=x$، محل تلاقی نمودار با نیمساز ربع سوم مشخص می‌شود:

$$۲x-\sqrt{x^۲+۴x+۸}=x\Rightarrow x=\sqrt{x^۲+۴x+۸}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}x^۲=x^۲+۴x+۸\Rightarrow ۴x=-۸\Rightarrow x=-۲$$

۱۳۸۷ (۱ **۲** ۳ ۴)

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\sqrt{x^۲+bx+c}\sim|x+\frac{b}{۲}|$$

نقطه‌ی $A(-۱,۳)$ در هر دو معادله‌ی مجانب مایل صدق می‌کند:

$$x\to+\infty\Rightarrow y=ax+۱-(x+\frac{b}{۲})$$

$$\xrightarrow[\text{خط قرار دارد.}]{A\ \text{روی}}۳=-a-\frac{b}{۲}+۲\Rightarrow -a-\frac{b}{۲}=۱\quad(۱)$$

$$x\to-\infty\Rightarrow y=ax+۱+(x+\frac{b}{۲})$$

$$\xrightarrow[\text{خط قرار دارد.}]{A\ \text{روی}}۳=-a+\frac{b}{۲}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\begin{cases}-a-\frac{b}{۲}=۱\\-a+\frac{b}{۲}=۳\end{cases}\Rightarrow -۲a=۴$$

$$\Rightarrow a=-۲\xrightarrow{-a+\frac{b}{۲}=۳}b=۲$$

بنابراین مقدار $a+b$ برابر صفر است.

۱۳۸۸ (۱ ۲ ۳ **۴**)

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\sqrt{x^۲-۷x}\sim|x-\frac{۷}{۲}|$$

$$x\to+\infty\Rightarrow y=ax+(x-\frac{۷}{۲})=(a+۱)x-\frac{۷}{۲}\quad,$$

$$m=-۱=a+۱\Rightarrow a=-۲$$

$$x\to-\infty\Rightarrow y=ax-(x-\frac{۷}{۲})=(a-۱)x+\frac{۷}{۲}\quad,$$

$$m=-۱=a-۱\Rightarrow a=۰$$

با توجه به گزینه‌ها، مقدار a برابر ۲- است.

۱۳۸۹ (**۱** ۲ ۳ ۴)

شرط عمود بودن دو خط آن است که حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌های آن دو خط برابر ۱- باشد. با توجه به تابع f که برای $x\ge۲$ تعریف شده است، مجانب مایل در شاخه‌ی $+\infty$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{x^۲-۲x}\sim x-۱$$

$$\Rightarrow y=ax+(x-۱)=x(a+۱)-۱\Rightarrow m=a+۱$$

با تقسیم صورت بر مخرج کسر در تابع g، مجانب مایل به معادله‌ی $y=۳x-۱۹$ به‌دست می‌آید، لذا: $m'=۳$

$$mm'=-۱\Rightarrow ۳(a+۱)=-۱\Rightarrow a+۱=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=-\frac{۴}{۳}$$

۱۳۹۰ (**۱** ۲ ۳ ۴)

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۳-۴x}\sim x$$

$$\xrightarrow{\text{مجانب مایل}}y=(x+۱)+x=۲x+۱$$

با توجه به گزینه‌ها، نقطه‌ی $(-۲,-۳)$ روی مجانب مایل قرار دارد.

۱۳۹۱ (۱ ۲ ۳ **۴**)

با استفاده از هم‌ارزی‌های $\sqrt{x^۲+۲x}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}|x+۱|$ و $\sqrt[۳]{x^۳+۱}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}x$ دو مجانب تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{matrix}x\to+\infty\Rightarrow y=(x+۱)+x=۲x+۱\\x\to-\infty\Rightarrow y=-(x+۱)+x=-۱\end{matrix}\Rightarrow x=-۱,y=-۱$$

بنابراین نقطه‌ی $(-۱,-۱)$ محل تلاقی دو مجانب تابع می‌باشد.

۱۳۹۲ (۱ ۲ **۳** ۴)

طبق تعریف مجانب مایل، خط $y=x+h$ مجانب مایل نمودار تابع است، لذا:

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲+۱}\sim x-۱$$

$$\Rightarrow y=x-۱\ (\text{مجانب مایل})$$

بنابراین $h=-۱$ می‌باشد.

۱۳۹۳ — **۱** ۲ ۳ ۴

$x \to \pm\infty \Rightarrow \sqrt{4x^2-2x+3} \sim 2\left|x-\frac{2}{8}\right|$

$$\begin{cases} x\to+\infty \Rightarrow y=2x-\frac{1}{2} \\ x\to-\infty \Rightarrow y=-2x+\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x-\frac{1}{2}=-2x+\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=0$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $(\frac{1}{4},0)$ تا مبدأ مختصات برابر $\frac{1}{4}$ است.

۱۳۹۴ — ۱ ۲ **۳** ۴

با تقسیم صورت بر مخرج کسر $\frac{x^3+2x^2}{x-1}$، خارج‌قسمت به‌صورت $y=x^2+3x$ در می‌آید، بنابراین:

$$y=\sqrt{\frac{x^3+2x^2}{x-1}} \overset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{x^2+3x} \overset{x\to\pm\infty}{\sim} \left|x+\frac{3}{2}\right|$$

بنابراین دو خط $y=x+\frac{3}{2}$ و $y=-x-\frac{3}{2}$ مجانب‌های مایل تابع هستند:

$$\begin{cases} y=x+\frac{3}{2} \\ y=-x-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x+\frac{3}{2}=-x-\frac{3}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}, y=0$$

پس نقطه‌ی $(-\frac{3}{2},0)$ محل تلاقی مجانب‌های مایل نمودار f می‌باشد.

۱۳۹۵ — **۱** ۲ ۳ ۴

$\lim\limits_{x\to0^\pm} f(x)=1+\frac{1}{0^\pm}=\pm\infty$ ، بنابراین $x=0$ مجانب قائم تابع است.

تابع دارای دو مجانب مایل می‌باشد:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \xrightarrow{\text{مجانب مایل}} y=|x-1| \begin{cases} \xrightarrow{x\to+\infty} y=x-1 \\ \xrightarrow{x\to-\infty} y=-x+1 \end{cases}$$

بنابراین تابع f سه مجانب دارد.

۱۳۹۶ — ۱ **۲** ۳ ۴

دامنه‌ی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$D_y=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge0, |x|\ne1\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge0, x\ne1\}$

$=[0,1)\cup(1,+\infty)$

$x=\pm1$ ریشه‌های مخرج کسر می‌باشند و تابع فقط در مجاورت $x=1$ تعریف شده است و داریم:

$$\lim_{x\to1} y=\lim_{x\to1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to1}\frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{3}{2}$$

بنابراین $x=1$ مجانب قائم تابع نمی‌باشد و تابع فقط در شاخه‌ی $+\infty$ دارای یک مجانب مایل است.

۱۳۹۷ — ۱ ۲ ۳ **۴**

دامنه‌ی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$D_y=\{x\in\mathbb{R} \mid x+1>0, x^2+2x\ne0\}=(-1,0)\cup(0,+\infty)$

خطوط $x=-1$ و $x=0$ مجانب‌های قائم تابع y هستند، زیرا:

$$\lim_{x\to0} y=1+\frac{1}{0^\pm}=\pm\infty, \quad \lim_{x\to(-1)^+} y=\frac{1}{0^+}-1=+\infty$$

هم‌چنین تابع در شاخه‌ی $+\infty$ دارای مجانب افقی $y=0$ است:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)=0+0=0$$

۱۳۹۸ — **۱** ۲ ۳ ۴

دامنه‌ی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$\frac{x}{x-1}>0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x<0$ یا $x>1$

با توجه به ویژگی لگاریتم داریم:

$\lim\limits_{x\to0^-} y=\log 0^+=-\infty \Rightarrow$ $x=0$ مجانب قائم است.

$\lim\limits_{x\to1^+} y=\log(+\infty)=+\infty \Rightarrow$ $x=1$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\log\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\log\sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}}=\log1=0$$

بنابراین خط $y=0$ نیز مجانب افقی نمودار تابع است. لذا تابع دارای دو مجانب قائم و یک مجانب افقی است.

۱۳۹۹ — ۱ **۲** ۳ ۴

$$y=\frac{\sin2x}{\cos2x}+\frac{\cos3x}{\sin3x}=\frac{\sin2x\sin3x+\cos2x\cos3x}{\cos2x\sin3x}$$

$$=\frac{\cos(3x-2x)}{\cos2x\sin3x} \Rightarrow y=\frac{\cos x}{\cos2x\sin3x}$$

$\cos2x\sin3x=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}} x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4} \\ \sin3x=0 \Rightarrow 3x=k\pi \xrightarrow{\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}} x=\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

با توجه به این‌که چهار ریشه‌ی به‌دست آمده، ریشه‌های صورت کسر نمی‌باشند بنابراین تابع دارای چهار مجانب قائم است.

۱۴۰۰ — ۱ ۲ ۳ **۴**

ضابطه‌ی تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$y=(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=\frac{\frac{2x-1}{x+2}+3}{2\times\frac{2x-1}{x+2}+1}$$

$$=\frac{5x+5}{5x}=\frac{x+1}{x}$$

خط $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع است و داریم:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=1 \Rightarrow$ $y=1$ مجانب افقی تابع است.

بنابراین نقطه‌ی $(0,1)$ محل تلاقی مجانب‌های تابع fog می‌باشد.

۱۴۰۱ — ۱ ۲ **۳** ۴

محور yها ($x=0$) تنها مجانب قائم نمودار تابع است، لذا $x=1$ (ریشه‌ی مخرج) باید ریشه‌ی صورت کسر نیز باشد. پس:

$(1)^3+a(1)-2=0 \Rightarrow a=1$

$$\Rightarrow y=\frac{x^3+x-2}{x(x-1)}=\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{x\cancel{(x-1)}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{x^2+x+2}{x}=x+1+\frac{2}{x} \xrightarrow[\frac{2}{x}\to0]{x\to\pm\infty} y=x+1$$

۱۴۰۲ — ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع دارای دو مجانب قائم $x=0$ و $x=-1$ (ریشه‌های مخرج) و یک مجانب مایل است:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+ax^2+5 & x^2+x \\ \hline -2x^3-2x^2 & 2x+(a-2) \Rightarrow \text{مجانب مایل}: y=2x+(a-2) \\ \hline (a-2)x^2+5 & \end{array}$$

مجانب مایل از نقطه‌ی $(-2,0)$ می‌گذرد، لذا:

$0=-4+(a-2) \Rightarrow a=6$

۱۴۰۳
۱ ۲ **۳** ۴

نمودار تابع وقتی $x \to -\infty$، دارای مجانب مایل $y = 2x - 1$ است:

$$x \le 0 \xrightarrow{x \to -\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x} \sim x + (x-1) = 2x - 1$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $(-2,0)$ از خط $y - 2x + 1 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|0 + 4 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$$

۱۴۰۴
۱ ۲ **۳** ۴

با استفاده از هم‌ارزی رادیکال وقتی که $x \to \pm\infty$، مجانب‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$x \to +\infty \Rightarrow y = 2x - (x-1) = x + 1$$

$$x \to -\infty \Rightarrow y = 2x + (x-1) = 3x - 1$$

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow 3x - 1 = x + 1 \Rightarrow 2x = 2$$

$$\Rightarrow x = 1 \xrightarrow{y = x+1} y = 2$$

بنابراین نقطه‌ی $(1,2)$ محل تلاقی مجانب‌های تابع است.

۱۴۰۵
۱ **۲** ۳ ۴

تابع f دارای دو مجانب قائم $x = -2$ و $x = 3$ (ریشه‌های مخرج کسر) و یک مجانب مایل است:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2 - x - 6 \\ \hline -x^3 + x^2 + 6x & x + 1 \\ \hline x^2 + 6x & \\ \vdots & \end{array} \Rightarrow y = x + 1 : \text{مجانب مایل}$$

$$A: \begin{cases} x = -2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \quad , \quad B: \begin{cases} x = 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = 4$$

$$A(-2,-1), B(3,4) \Rightarrow M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

۱۴۰۶
۱ ۲ **۳** ۴

اگر $a - 1$ (ضریب x^2) مثبت باشد، آن‌گاه تابع دارای دو مجانب مایل است که از هم‌ارزی رادیکالی وقتی $x \to \pm\infty$ به‌دست می‌آیند:

$$a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

۱۴۰۷
۱ **۲** ۳ ۴

چون $a \neq 0$، لذا تابع دارای مجانب افقی $y = \frac{1}{a}$ است.

$\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a}\right)$ برای آن‌که تابع فقط دو مجانب داشته باشد، آن‌گاه تابع باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد، لذا معادله‌ی $ax^2 + 4x - 1 = 0$ باید یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد:

$$\Delta = 16 + 4a = 0 \Rightarrow a = -4, x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \ (\text{مجانب قائم})$$

$$y = \frac{1}{a} = -\frac{1}{4} \ (\text{مجانب افقی})$$

بنابراین نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها، نقطه‌ی $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ است.

البته معادله‌ی $ax^2 + 4x - 1 = 0$ می‌تواند دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد که یکی از آن‌ها ریشه‌ی صورت کسر می‌باشد:

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3$$

$x = 0$ نمی‌تواند ریشه‌ی مخرج کسر باشد، $(a(0)^2 + 4(0) - 1 = -1 \neq 0)$ و اگر $x = -3$ ریشه‌ی مخرج کسر باشد، آن‌گاه:

$$9a - 13 = 0 \Rightarrow a = \frac{13}{9} \Rightarrow \frac{13}{9}x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 13x^2 + 36x - 9 = 0 \Rightarrow x = -3, x = 0/23$$

بنابراین $\left(\frac{100}{23}, \frac{9}{13}\right)$ نیز می‌تواند جواب باشد که در گزینه‌ها وجود ندارد.

۱۴۰۸
۱ **۲** ۳ ۴

تابع در شاخه‌ی $+\infty$ دارای مجانب افقی است $(x > 0)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ مجانب افقی تابع است.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 : \text{مجانب قائم}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1, \lim\limits_{x \to 1} f(x) \overset{HOP}{=\!=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x - 3} = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = 2$ ریشه‌ی مخرج کسر است و ریشه‌ی صورت کسر نمی‌باشد، لذا $x = 2$ مجانب قائم است. نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها، نقطه‌ی $(2,0)$ است و فاصله‌ی آن تا مبدأ مختصات برابر ۲ است.

۱۴۰۹
۱ ۲ ۳ **۴**

با توجه به این‌که $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2$، خط $y = 2$ مجانب افقی تابع است.

$$y = \frac{2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{2x}{x+2}, x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

خط $x = -2$ مجانب قائم نمودار تابع است و در نتیجه نقطه‌ی $(-2,2)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار است که روی خط $y = x + a$ قرار دارد:

$$2 = -2 + a \Rightarrow a = 4$$

۱۴۱۰
۱ ۲ ۳ ۴

با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + \dots} \overset{x \to \pm\infty}{\sim} \sqrt[3]{a}\left(x + \frac{b}{3a}\right)$، مجانب مایل تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$x \to \pm\infty \to y \sim \sqrt[3]{8}\left(x + \frac{2}{3(8)}\right) = 2\left(x + \frac{1}{12}\right) = 2x + \frac{1}{6}$$

عرض از مبدأ مجانب مایل $(x = 0)$ برابر $\frac{1}{6}$ است.

۱۴۱۱
۱ ۲ ۳ **۴**

$$x \to +\infty \Rightarrow y = (x+1) - (x-1) = 2, y = x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2,2)$$

$$x \to -\infty \Rightarrow y = -(x+1) + (x-1) = -2, y = x \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow B(-2,-2)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(2+2)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$$

۱۴۱۲
۱ **۲** ۳ ۴

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 : \text{مجانب‌های قائم}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} \overset{x \to \pm\infty}{\sim} |x|$$

$$\Rightarrow y \sim \frac{x^2}{|x|} = \begin{cases} x & x \to +\infty \\ -x & x \to -\infty \end{cases} : \text{مجانب‌های مایل}$$

بنابراین دو خط $y = x$ و $y = -x$ مجانب‌های مایل نمودار تابع هستند.

مختصات دو نقطه‌ی A و B با عرض‌های مثبت را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1,1)$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(-1,1)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-1)^2} = 2$$

۱۴۱۳ — **۱** ۲ ۳ ۴

مجانب تابع را با استفاده از هم‌ارزی به‌دست می‌آوریم:

$$x\to\pm\infty \Rightarrow \sqrt[۳]{-x^۳+x^۲}\sim -۱(x-\frac{۱}{۳}) \Rightarrow y=x-(x-\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}$$

تابع فقط یک مجانب افقی $y=\frac{۱}{۳}$ دارد. طول نقاط تلاقی نمودار تابع و خط $y=\frac{۱}{۳}$ از حل معادله‌ی $f(x)=\frac{۱}{۳}$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x+\sqrt[۳]{-x^۳+x^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x-\frac{۱}{۳}=-\sqrt[۳]{-x^۳+x^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم.}} (x-\frac{۱}{۳})^۳=x^۳-x^۲$$

$$\Rightarrow x^۳-x^۲+\frac{x}{۳}-\frac{۱}{۲۷}=x^۳-x^۲\Rightarrow \frac{x}{۳}-\frac{۱}{۲۷}=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

۱۴۱۴ — **۱** ۲ ۳ ۴

ضابطه‌ی تابع $f-g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x+۱۱}{(x-۴)(x+۱)}-\frac{۳}{x-۴}$$

$$=\frac{(x+۱۱)-۳(x+۱)}{(x-۴)(x+۱)}=\frac{-۲(x-۴)}{(x-۴)(x+۱)}=\frac{-۲}{x+۱}$$

$x=-۱$ مجانب قائم و $y=۰$ مجانب افقی تابع است ($\lim_{x\to\pm\infty} y=۰$)، بنابراین نقطه‌ی $(-۱,۰)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار تابع است.

۱۴۱۵ — ۱ ۲ ۳ **۴**

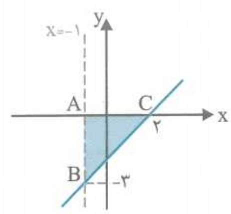
خط $x=-۱$ مجانب قائم نمودار تابع است. تابع دارای یک مجانب مایل است که:

$$y=(x-۱)\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}=\sqrt{\frac{(x-۱)^۳}{x+۱}}=\sqrt{\frac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}{x+۱}}$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳-۳x^۲+۳x-۱ & x+۱ \\ \hline -x^۳-x^۲ & x^۲-۴x \\ \hline -۴x^۲+۳x-۱ & \end{array} \Rightarrow y \overset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{x^۲-۴x}\sim(x-۲)$$

بنابراین خط $y=x-۲$ مجانب مایل نمودار تابع است. مطابق شکل، داریم:

$$S=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{۳\times ۳}{۲}=۴/۵$$



۱۴۱۶ — ۱ ۲ ۳ **۴**

تابع f دارای دو مجانب قائم $x=\pm۲$ (ریشه‌های مخرج کسر) و یک مجانب مایل است:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x^۲ & x^۲-۴ \\ \hline -x^۳+۴x & x+۱ \\ \hline x^۲+۴x & \\ \vdots & \end{array} \Rightarrow \text{مجانب مایل } y=x+۱$$

$$\begin{cases} x=۲ \\ y=x+۱ \end{cases}\Rightarrow y=۳\Rightarrow A(۲,۳)$$

$$\begin{cases} x=-۲ \\ y=x+۱ \end{cases}\Rightarrow y=-۱\Rightarrow B(-۲,-۱)$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۳+۱)^۲}=۴\sqrt{۲}$$

۱۴۱۷ — ۱ ۲ **۳** ۴

خط $y=۲$ مجانب افقی تابع است ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$). با حل معادله‌ی $f(x)=۲$ محل تلاقی نمودار تابع و مجانب افقی مشخص می‌شود:

$$\frac{۲x^۲-۳x}{(x-۱)^۲}=۲\Rightarrow \cancel{۲x^۲}-۳x=\cancel{۲x^۲}-۴x+۲\Rightarrow x=۲\Rightarrow A(۲,۲)$$

خط $x=۱$ مجانب قائم نمودار تابع است و در نتیجه فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط $x=۱$ برابر یک است.

۱۴۱۸ — ۱ ۲ ۳ **۴**

ابتدا $x^۳+x^۲$ را بر $x-۲$ تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت عبارتی از درجه‌ی ۲ خواهد بود و سپس با استفاده از هم‌ارزی رادیکالی وقتی $x\to-\infty$، مجانب مایل تابع به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x^۲ & x-۲ \\ \hline -x^۳+۲x^۲ & x^۲+۳x \\ \hline ۳x^۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{\frac{x^۳+x^۲}{x-۲}}\overset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{x^۲+۳x}\overset{x\to-\infty}{\sim}-(x+\frac{۳}{۲})$$

مجانب مایل: $y=-x-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲y+۲x+۳=۰$

۱۴۱۹ — **۱** ۲ ۳ ۴

از هم‌ارزی رادیکالی وقتی $x\to\pm\infty$ برای به‌دست آوردن مجانب استفاده می‌کنیم:

$$x\to-\infty\Rightarrow y\sim(۲x-۱)-\sqrt{a}(x+\frac{b}{۲a})$$

$$=x(۲-\sqrt{a})-۱-\frac{b\sqrt{a}}{۲a}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ۲-\sqrt{a}=۰\Rightarrow a=۴ \quad (*) \\ -۱-\frac{b\sqrt{a}}{۲a}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow{(*)}-۱-\frac{b}{۴}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=-۱۰ \end{cases}$$

توجه کنیم در شاخه‌ی $+\infty$ با توجه به مثبت بودن a، تابع نمی‌تواند مجانب افقی داشته باشد.

۱۴۲۰ — **۱** ۲ ۳ ۴

ضابطه‌ی تابع $g-f$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(g-f)(x)=\frac{x^۲}{x-۱}-\frac{x^۲+x}{x+۲}=\frac{x^۲(x+۲)-(x^۲+x)(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)}$$

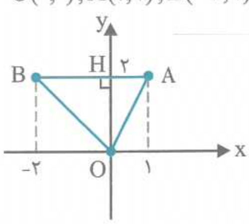
$$=\frac{۲x^۲+x}{(x-۱)(x+۲)}$$

تابع دارای یک مجانب افقی $y=۲$ ($\lim_{x\to\pm\infty} y=۲$) و دو مجانب قائم $x=۱$ و $x=-۲$ (ریشه‌های مخرج کسر) می‌باشد، لذا:

$O(۰,۰), A(۱,۲), B(-۲,۲)$

با رسم مثلث OAB، مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{مساحت مثلث}=\frac{OH\times AB}{۲}=\frac{۲\times ۳}{۲}=۳$$



۱۴۲۱ — ۱ **۲** ۳ ۴

ضابطه‌ی تابع $f+g$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=(f+g)(x)=\frac{x+۱}{x+\sqrt{x}}+\frac{۱-x}{x-\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(x+۱)(x-\sqrt{x})+(۱-x)(x+\sqrt{x})}{x^۲-x}=\frac{-۲x(\sqrt{x}-۱)}{x(x-۱)}$$

$$=\frac{-۲\cancel{x}\cancel{(\sqrt{x}-۱)}}{\cancel{x}\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)}=\frac{-۲}{\sqrt{x}+۱}$$

معادله‌ی $\sqrt{x}+۱=۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد و تابع فقط یک مجانب افقی $y=۰$ دارد: $\lim_{x\to+\infty} y=۰$

۱۳۵۰ ۱ ۲ ۳ **۴**

در دنباله‌ی هندسی صعودی باید $q>1$ باشد. از طرفی داریم:

$4, a, 9$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی‌اند. $\Rightarrow a^2=4\times 9=36$

$$\xrightarrow{a>0} a=6 \Rightarrow q=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \quad , \quad S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\Rightarrow S_6=\frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}}=8\times(\frac{3^6}{2^6}-1)=83\frac{1}{8}$$

۱۳۵۱ ۱ ۲ **۳** ۴

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی $a_n=aq^{n-1}$ است، داریم:

$$a_1+a_3=1, S_4=3$$

$$a_1+a_3=a_1+a_1q^2=1\Rightarrow a_1(1+q^2)=1 \quad (1)$$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q} \quad , \quad q\neq 1 \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)}=\frac{\frac{\cancel{a_1}(1-q^4)}{1-q}}{\cancel{a_1}(1+q^2)}=3\Rightarrow\frac{\cancel{(1+q^2)}(1-q^2)}{(1-q)\cancel{(1+q^2)}}=3$$

$$\Rightarrow 1-q^2=3(1-q)$$

$\Rightarrow q^2-3q+2=0\Rightarrow (q-2)(q-1)=0\Rightarrow q=1$ یا $q=2$

$$\xrightarrow{q\neq 1} q=2, a_1(1+q^2)=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{\frac{1}{5}(1-64)}{1-2}=\frac{63}{5}=12/6$$

۱۳۵۲ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به فرض، جمله‌ی اول ۲ و جمله‌ی هشتم دنباله‌ی هندسی برابر $16\sqrt{2}$ است. پس: $a_1=2, a_8=a_1q^7=16\sqrt{2}\Rightarrow 2q^7=16\sqrt{2}$

$$\Rightarrow q^7=8\sqrt{2}=2^{\frac{7}{2}}\Rightarrow (q^2)^{\frac{7}{2}}=2^{\frac{7}{2}}\Rightarrow q^2=2\Rightarrow q=\sqrt{2}$$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}}=\frac{30}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=30(\sqrt{2}+1)$$

۱۳۵۳ **۱** ۲ ۳ ۴

واسطه‌ی حسابی دو عدد a و b برابر $\frac{a+b}{2}$ است.

$2^b, 4\sqrt{2}, 2^a$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی‌اند.

$$\Rightarrow (4\sqrt{2})^2=2^b\times 2^a\Rightarrow 32=2^5=2^{a+b}$$

$$\Rightarrow a+b=5\Rightarrow\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}=2/5$$

۱۳۵۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

جملات اول، پنجم و یازدهم دنباله‌ی حسابی به‌ترتیب a_1، a_1+4d و a_1+10d است که سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی می‌باشند، لذا:

$$(a_1+4d)^2=a_1(a_1+10d)\Rightarrow a_1^2+8a_1d+16d^2=a_1^2+10a_1d$$

$$\Rightarrow 16d^2=2a_1d\Rightarrow a_1=8d$$

جملات دنباله: $a_1, a_1+4d, \dots$

$$q=\frac{a_1+4d}{a_1}\xlongequal{a_1=8d}\frac{8d+4d}{8d}=\frac{3}{2}$$

۱۳۵۵ ۱ **۲** ۳ ۴

در دنباله‌ی هندسی، اگر $1>q>0$، آن‌گاه دنباله نزولی است و در غیر این‌صورت، دنباله غیر نزولی است:

$2, x, \frac{1}{2}$ سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی‌اند. $\Rightarrow x^2=2\times\frac{1}{2}=1$

$$\Rightarrow x=\pm 1\xrightarrow{x<0} x=-1\Rightarrow q=\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{2(1-(-\frac{1}{2})^6)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\times\frac{63}{64}}{\frac{3}{2}}=\frac{21}{16}$$

۱۳۵۶ ۱ ۲ **۳** ۴

با توجه به فرض، جمله‌ی اول دنباله ۱ و جمله‌ی چهارم آن $\frac{5}{2}$ است، لذا:

$$d=\frac{a_4-a_1}{4-1}=\frac{\frac{5}{2}-1}{3}=\frac{1}{2}, S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{15}=\frac{15}{2}[2(1)+(15-1)\times\frac{1}{2}]=\frac{15\times 9}{2}=67/5$$

۱۳۵۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, S_8=\frac{5}{4}s_4$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{a_1}(1-q^8)}{\cancel{1-q}}=\frac{5}{4}\times\frac{\cancel{a_1}(1-q^4)}{\cancel{1-q}}\Rightarrow (1-q^8)=\frac{5}{4}(1-q^4)$$

$$\Rightarrow (1-q^4)(1+q^4)=\frac{5}{4}(1-q^4)\Rightarrow 1+q^4=\frac{5}{4}\Rightarrow q^4=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow q^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a_7}{a_1}=\frac{a_1q^6}{a_1}=(q^2)^3=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$$

۱۳۵۸ ۱ **۲** ۳ ۴

طبق فرض، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع نه جمله‌ی اول برابر $15+30=45$ است. داریم:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d], S_4=\frac{4}{2}[2a_1+3d]=15$$

$$\Rightarrow 2a_1+3d=7/5 \quad (1)$$

$$S_9=\frac{9}{2}[2a_1+8d]=45\Rightarrow a_1+4d=5 \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}2a_1+3d=7/5\\ -2a_1-8d=-10\end{cases}\Rightarrow -5d=-2/5\Rightarrow d=\frac{1}{2}, a_1=3$$

$$\Rightarrow a_{11}=a_1+10d=3+5=8$$

۱۳۴۱ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

قدرنسبت دنباله‌ی حسابی $۲,۹,۱۶,\dots$ برابر $d_۱=۷$ و قدرنسبت دنباله‌ی حسابی $۱۲,۱۷,۲۲,\dots$ برابر $d_۲=۵$ است. با ادامه دادن جملات دو دنباله، اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله برابر ۳۷ می‌باشد. قدرنسبت دنباله‌ی حسابی حاصل از جملات مشترک دو دنباله برابر $d=[۵,۷]=۳۵$ است. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حاصل برابر $t_n=۳۷+(n-۱)\times۳۵$ می‌باشد.

$$۱۰۰\le t_n<۳۰۰\Rightarrow ۱۰۰\le \underbrace{۳۷+۳۵(n-۱)}_{۳۵n+۲}<۳۰۰$$

$$\Rightarrow ۹۸\le ۳۵n<۲۹۸\Rightarrow \frac{۹۸}{۳۵}\le n<\frac{۲۹۸}{۳۵}\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}۳\le n\le ۸$$

بنابراین ۶ جمله‌ی دنباله، سه رقمی است.

۱۳۴۲ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

فرض کنیم جملات دنباله به‌صورت $a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_{۲n-۱},a_{۲n}$ باشد. طبق فرض، داریم: $a_۱+a_۲+\dots+a_{۲n}=۳(a_۱+a_۳+\dots+a_{۲n-۱})$

$a_۱$، $a_۳$، $\dots$ و $a_{۲n-۱}$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q^۲$ می‌باشد، لذا:

$$\frac{a_۱(۱-q^{۲n})}{۱-q}=۳\times\frac{a_۱(۱-(q^۲)^n)}{۱-q^۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱-q}=\frac{۳}{(۱-q)(۱+q)}$$

$$\Rightarrow ۱+q=۳\Rightarrow q=۲$$

۱۳۴۳ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

قدرنسبت دنباله‌ی $۲,۷,۱۲,\dots$ برابر ۵ و قدرنسبت دنباله‌ی $۸,۱۱,۱۴,\dots$ برابر ۳ است. بنابراین قدرنسبت دنباله‌ی حاصل از جملات مشترک دو دنباله برابر $d=۵\times۳=۱۵$ است. اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله عدد ۱۷ می‌باشد. بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حاصل به‌صورت $a_n=۱۷+۱۵(n-۱)=۱۵n+۲$ می‌باشد. باید nهایی را پیدا کنیم که $۱۰۰\le a_n<۱۰۰۰$ باشند، پس داریم:

$$۱۰۰\le ۱۵n+۲<۱۰۰۰\Rightarrow ۹۸\le ۱۵n<۹۹۸$$

$$\Rightarrow\frac{۹۸}{۱۵}\le n<\frac{۹۹۸}{۱۵}\Rightarrow ۷\le n\le ۶۶$$

بنابراین: تعداد اعداد سه رقمی = تعداد nها = $(۶۶-۷)+۱=۶۰$

۱۳۴۴ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی برابر است با: $S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$

$$۱-t+t^۲-\dots-t^۷+t^۸\xrightarrow[\text{هندسی با } a_۱=۱ \text{ و } q=-t]{\text{مجموع نه جمله‌ی دنباله‌ی}}\frac{۱(۱-(-t)^۹)}{۱-(-t)}$$

$$=\frac{۱+t^۹}{۱+t}=\frac{(۱+t^۳)(۱-t^۳+t^۶)}{۱+t}$$

$$\Rightarrow\frac{t^۸-t^۷+\dots-t+۱}{t^۶-t^۳+۱}=\frac{(۱+t^۳)\cancel{(۱-t^۳+t^۶)}}{(۱+t)\cancel{(t^۶-t^۳+۱)}}$$

$$=\frac{(۱+t)(۱-t+t^۲)}{۱+t}=t^۲-t+۱$$

$$=\frac{۱}{۴}(۱+\sqrt{۱۷})^۲-\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۱۷})+۱$$

$$=\frac{۱}{۴}(۱۸+۲\sqrt{۱۷})-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}+۱=۵$$

۱۳۴۵ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

بیستمین دسته شامل ۲۰ عدد فرد متوالی است که برای به‌دست آوردن اولین عدد آن، داریم: $۱,۲,۳,۴,\dots,۱۹,۲۰,\dots$: تعداد جملات هر دسته

بنابراین اگر مجموع تعداد جملات نوزده دسته‌ی اول را به‌دست آوریم، آن‌گاه آخرین عدد فرد دسته‌ی نوزدهم مشخص می‌شود:

$$S_{۱۹}=۱+۲+\dots+۱۹=\frac{۱۹}{۲}(۱+۱۹)=۱۹۰$$

بنابراین اولین جمله‌ی دسته‌ی بیستم برابر صد و نود و یکمین عدد فرد است، لذا: $a_n=۲n-۱\Rightarrow a_{۱۹۱}=۳۸۱$

جملات دسته‌ی بیستم: $۳۸۱,\dots,\underbrace{۳۸۱+(۲۰-۱)\times۲}_{\text{بیستمین عدد}}=۴۱۹$

۱۳۴۶ (۱) (**۲**) (۳) (۴)

اگر ۳ عدد بین ۴ و ۳۲۴ قرار دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a_۱=۴,a_۵=۳۲۴=a_۱q^۴\xrightarrow{a_۱=۴}q^۴=۸۱=۳^۴$$

$$\xrightarrow{\text{جملات مثبت}}q=۳\Rightarrow S_۵=\frac{a_۱(۱-q^۵)}{۱-q}=\frac{۴(۱-۲۴۳)}{-۲}=۴۸۴$$

۱۳۴۷ (۱) (۲) (**۳**) (۴)

در دنباله‌ی حسابی، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌ی $S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$ به‌دست می‌آید:

$$S_{۲۰}=۳S_{۱۲}\Rightarrow \overset{۱۰}{\cancel{\frac{۲۰}{۲}}}[۲a_۱+۱۹d]=۳\times\overset{۶}{\cancel{\frac{۱۲}{۲}}}[۲a_۱+۱۱d]$$

$$\Rightarrow ۲۰a_۱+۱۹۰d=۳۶a_۱+۱۹۸d\Rightarrow ۱۶a_۱+۸d=۰$$

$$\xrightarrow{\div۸}۲a_۱+d=۰\Rightarrow d=-۲a_۱\quad(*)$$

$$a_۳=۶\Rightarrow a_۱+۲d=۶\xrightarrow{(*)}a_۱-۴a_۱=۶\Rightarrow a_۱=-۲$$

$$\xrightarrow{(*)}d=۴\Rightarrow a_{۱۰}=a_۱+۹d=-۲+۳۶=۳۴$$

۱۳۴۸ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

می‌خواهیم $a_۷+a_۸+\dots+a_{۱۸}$ را به‌دست آوریم، داریم:

$$a_۷+a_۸+\dots+a_{۱۸}=(a_۱+a_۲+\dots+a_{۱۸})-(a_۱+a_۲+\dots+a_۶)$$

$$=S_{۱۸}-S_۶=\frac{۱۸\times(۱۸-۱۵)}{۶}-\frac{۶(۶-۱۵)}{۶}=\frac{۵۴+۵۴}{۶}=۱۸$$

۱۳۴۹ (۱) (۲) (۳) (**۴**)

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q},S_۳=۱۳۶,S_۶=۱۵۳$$

$$\Rightarrow\frac{S_۶}{S_۳}=\frac{۱۵۳}{۱۳۶}\Rightarrow\frac{\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}}{\frac{a_۱(۱-q^۳)}{۱-q}}=\frac{۱۵۳}{۱۳۶}$$

$$\Rightarrow\frac{۱-q^۶}{۱-q^۳}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow\frac{(۱-q^۳)(۱+q^۳)}{۱-q^۳}=\frac{۹}{۸}\Rightarrow q^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{a_۱}{a_۵}=\frac{a_۱}{a_۱q^۴}=\frac{۱}{q^۴}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۶$$