مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

# ۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات

تألیف تیتو آندریسکو / زومینگ فِنگ

ترجمهٔ ارشک حمیدی

انتشارات فاطمی

کتاب **۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات** از مسأله‌هایی تشکیل شده است که با دقت فراوان از میان مسأله‌هایی که برای آموزش اعضای تیمهای اعزامی از امریکا به المپیاد بین‌المللی ریاضی استفاده شده، دست‌چین شده‌اند.

مسأله‌های این کتاب طوری انتخاب و مرتب شده‌اند که مهارتها و تواناییهای دانش‌آموزان در حل‌کردن مسأله‌های ترکیبیات رفته رفته گسترش یابد.

مطالعهٔ این کتاب برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در مسابقه‌هایی از نوع المپیادهای ریاضی، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان مفید است.

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی


زیر نظر :

**یحیی تابش**

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

**امید علی کرمزاده**

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

# از کتابهای این مجموعه


- نظریهٔ اعداد
- هندسه
- جبر
- آنالیز
- ترکیبیات
- هنر مسأله‌حل‌کردن

## کتابهای زرد

## کتابهای نارنجی

- هندسهٔ مسطحه
- پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو
- از اردوش تا کی‌یف
- دایره‌ها
- فنون مسأله‌حل‌کردن
- محافل ریاضی
- مباحثی از هندسه
- ۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات



## کتابهای قرمز

- حل مسأله از طریق مسأله
- برگزیدهٔ مسأله‌های جبر و آنالیز
- المپیادهای ریاضی چین
- استراتژیهای مسأله‌حل‌کردن

انتشارات فاطمی

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

# ۱۰۲ مسألهٔ ترکیبات

تألیف تیتو آندریسکو / زومینگ فِنگ
ترجمهٔ ارشک حمیدی

انتشارات فاطمی

**102 Combinatorial Problems**
From the Training of the USA IMO Team
Titu Andreescu/Zuming Feng
Birkhäuser, 2003

# ۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات

مؤلفان: تیتو آندریسکو، زومینگ فنگ
مترجم: ارشک حمیدی
ویراستار: بردیا حسام
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ اول، ۱۳۸۳
شابک ۰_۳۷۵_۳۱۸_۹۶۴
ISBN 964-318-375-0
تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-پارسی): مریم مهری
- رسامی: فاطمه ثقفی
- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

لیتوگرافی: صاحب
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ معراج



**مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی** تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ - خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۹۶۱۴۲۲ - ۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

**Andreescu, Titu** آندریسکو، تیتو، ۱۹۵۶ - م.
۱۰۲ [صد و دو] مسألهٔ ترکیبیات / تألیف تیتو آندریسکو، زومینگ فنگ؛ ترجمهٔ ارشک حمیدی، ویرایش بردیا حسام. — تهران: فاطمی، ۱۳۸۳.
دوازده، ۱۳۶ ص. (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی)
ISBN 964-318-375-0
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: 102 Combinatorial problems: from the training of the USA Imo team, c2003.
۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. آنالیز ترکیبی -- مسائل، تمرینها و غیره. الف. فنگ، زومینگ، ۱۹۷۰ - م. Feng, Zuming. ب. حمیدی، ارشک، ۱۳۵۲ - ، مترجم. ج. عنوان.
۳۷۳/۲۳۸ LB۳۰۶۰/۲۴/آ۸۵ص۴
۱۳۸۳
کتابخانهٔ ملی ایران ۲۶۸۷_۸۳م

# فهرست مطالب


| | |
|---|---|
| آمادگی برای المپیاد ریاضی | هفت |
| پیشگفتار | نه |
| مقدمه | یازده |
| ۱ مسأله‌های مقدماتی | ۱ |
| ۲ مسأله‌های پیشرفته | ۹ |
| ۳ راه‌حل مسأله‌های مقدماتی | ۱۹ |
| ۴ راه‌حل مسأله‌های پیشرفته | ۵۹ |
| فهرست برخی نمادها | ۱۳۵ |

به‌نام خدا

## آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: **عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان**. هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این‌رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ اتووش به نام بارون لوراند اتووش[1] به‌صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به‌کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

1. Baron Loránd Eötvös

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به انتشار مجموعهٔ **آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

**دستهٔ اول** (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

**دستهٔ دوم** (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

**دستهٔ سوم** (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

**مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی** مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

این کتاب از دستهٔ دوم و شامل ۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات است که با دقت فراوان از میان مسأله‌هایی که برای آموزش اعضای تیمهای اعزامی از امریکا به المپیاد بین‌المللی ریاضی استفاده شده دست‌چین شده‌اند.

مسأله‌های این کتاب طوری انتخاب و مرتب شده‌اند که مهارتها و تواناییهای دانش‌آموزان در ترکیبیات رفته‌رفته گسترش یابند.

# پیشگفتار

این کتاب شامل ۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات است که با دقت فراوان از میان مسأله‌هایی که برای آموزش و سنجش اعضای تیمهای اعزامی از امریکا به المپیاد بین‌المللی ریاضی استفاده شده دست‌چین شده‌اند. این کتاب مجموعه‌ای از سؤالهای بسیار دشوار و غیرقابل فهم نیست. مسأله‌های این کتاب طوری انتخاب و مرتب شده‌اند که مهارتها و تواناییهای دانش‌آموزان در ترکیبیات رفته‌رفته گسترش یابند. هدف این کتاب، وسعت بخشیدن به دیدگاه ریاضی دانش‌آموزی است که می‌خواهد در مسابقه‌های ریاضی شرکت کند. آشنایی با فنون و رموز مسأله حل کردن باعث ایجاد علاقه به ترکیبیات و سایر شاخه‌های ریاضی می‌شود.

## مقدمه

در ایالات متحدهٔ امریکا، مراحل انتخاب اعضای تیم برای شرکت در المپیاد بین‌المللی ریاضی از چند مسابقهٔ ملی تشکیل شده است که عبارت‌اند از مسابقهٔ ریاضی امریکا-۱۰، مسابقهٔ ریاضی امریکا-۱۲، آزمون دعوتی ریاضیات امریکا و المپیاد ریاضی ایالات متحدهٔ امریکا. شرکت در آزمون دعوتی ریاضیات امریکا و المپیاد ریاضی ایالات متحدهٔ امریکا منحصراً از طریق دعوت از دانش‌آموزان، براساس نتایج آنها در امتحانهای مراحل قبلی ممکن است. دورهٔ تابستانی المپیاد ریاضی دوره‌ای آموزشی و چهار هفته‌ای فشرده برای حدود یکصد تن از دانش‌آموزان فوق‌العاده مستعدی است که برترینهای مسابقه‌های ریاضی امریکا شناخته شده‌اند. شش دانش‌آموزی که اعضای تیم ایالات متحدهٔ امریکا در المپیاد بین‌المللی ریاضی هستند، براساس نمره‌هایشان در المپیاد ریاضی ایالات متحدهٔ امریکا و امتحانات دیگری که در خلال دورهٔ تابستانی المپیاد ریاضی برگزار می‌شوند انتخاب می‌شوند. دانش‌آموزان در دورهٔ تابستانی المپیاد ریاضی، روزهایی پرمشغله دارند، باید در کلاسها شرکت کنند و برای آمادگی پیدا کردن در چند شاخهٔ مهم ریاضیات تعداد زیادی مسأله را حل کنند. موضوعاتی که مطرح می‌شوند شامل استدلالها و اتحادهای ترکیبیاتی، تابعهای مولد، نظریهٔ گراف، رابطه‌های بازگشتی، مجموعها و حاصل‌ضربها، احتمالات، نظریهٔ اعداد، چندجمله‌ایها، نظریهٔ معادلات، اعداد مختلط در هندسه، اثباتهای الگوریتمی، هندسهٔ ترکیبیاتی و پیشرفته، معادلات تابعی و نابرابریهای کلاسیک است.

امتحانات نهایی از نوع المپیاد از چند مسألهٔ پیکارجو اما ساده‌فهم تشکیل می‌شوند. معمولاً برای پیدا کردن راه‌حلهای درست باید تحلیلی عمیق و استدلالی دقیق کرد. ممکن است سؤالهای المپیادی برای تازه‌کاران گیج‌کننده به‌نظر برسد، با این حال اکثر این سؤالها را می‌توان با فنون ریاضیات دبیرستانی، که البته هوشمندانه به‌کار برده می‌شوند، حل کرد.

به دانش‌آموزانی که می‌خواهند مسأله‌های این کتاب را حل کنند چند توصیه می‌کنیم.

- مواظب وقتتان باشید! تعداد بسیار کمی از شرکت‌کنندگان می‌توانند همهٔ مسأله‌های داده شده را حل کنند.
- سعی کنید ارتباطی بین مسأله‌ها پیدا کنید. موضوع مهم این است که همهٔ فنون و ایده‌های مهمی که در این کتاب آمده‌اند بیشتر از یک بار به‌کار می‌آیند!
- راه‌حل مسأله‌های المپیادی بلافاصله به ذهن نمی‌آید. حوصله کنید. شیوه‌های مختلفی را بیازمایید. حالتهای ساده را بررسی کنید. گاهی استفاده از روش بازگشت از حکم خواسته شده مفید است.
- حتی اگر مسأله‌ای را حل کردید راه‌حل آن را بخوانید. ممکن است در این راه‌حل ایده‌هایی مطرح شده باشد که در راه‌حل شما نباشد و در راه‌حلها از فوت و فنهایی بحث شده باشد که جای دیگر نیز به‌کار می‌آیند. همچنین، این راه‌حلها نمونه‌هایی از راه‌حلهای زیبایی هستند که می‌توانید از آنها الگوبرداری کنید، البته معمولاً در آنها فرایند پیچیده‌ای که منجر به کشف راه‌حل شده نامشخص است، همین‌طور گامهای ابتدایی که اشتباه بوده‌اند، ایده‌های بکر و توجه به جزئیات. وقتی که راه‌حلها را می‌خوانید، سعی کنید تفکراتی را که در پس آنهاست بازسازی کنید. از خودتان بپرسید: «ایده‌های کلیدی کدام‌اند؟ چگونه می‌توانم باز هم از این ایده‌ها استفاده کنم؟»
- بعد ببینید که آیا می‌توانید مسأله را از راه دیگری حل کنید؟ خیلی از مسأله‌ها چندین راه‌حل دارند، اما همهٔ آنها را در این کتاب نیاورده‌ایم.
- مسأله حل کردن هدفمند احتیاج به تمرین دارد. اگر در ابتدا مشکل داشتید ناامید نشوید.

# ۱

# مسأله‌های مقدماتی

۱. آقا و خانم گلپرور می‌خواهند نام فرزندشان را طوری بگذارند که حروف اول سه کلمهٔ اسم و فامیلش به ترتیب حروف الفبا باشند و تکراری نباشند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

۲. کمدهای دانش‌آموزان در مدرسهٔ المپیک پشت سر هم شماره خورده‌اند و شمارهٔ اولین کمد ۱ است. قیمت هر قطعه از رقمهای پلاستیکی که برای شماره‌گذاری به‌کار می‌روند دو تومان است. بنابراین، شماره‌گذاری کمد شمارهٔ ۹ دو تومان و شماره‌گذاری کمد شمارهٔ ۱۰ چهار تومان خرج دارد. اگر هزینهٔ شماره‌گذاری همهٔ کمدها ۱۳۷۹۴ تومان شده باشد، در این مدرسه چند کمد وجود دارد؟

۳. فرض کنید $n$ عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد. ثابت کنید تعداد عددهای فرد در دنبالهٔ

$$\binom{n}{۱}, \binom{n}{۲}, \dots, \binom{n}{\frac{n-۱}{۲}}$$

عددی فرد است.

۴. چند عدد طبیعی که از ۲۰۰۱ بزرگتر نیستند مضرب ۳ یا ۴اند اما مضرب ۵ نیستند؟

۵. فرض کنید

$$x = ۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲\dots۹۹۸۹۹۹$$

که در آن رقمهای بعد از ممیز با نوشتن عددهای طبیعی از ۱ تا ۹۹۹ به‌دنبال هم به‌دست آمده‌اند. رقم ۱۹۸۳ام سمت راست ممیز را پیدا کنید.

۶. بیست‌وپنج دانش‌آموز و بیست‌وپنج معلم دور میزی نشسته‌اند. ثابت کنید که می‌توان کسی را پیدا کرد که کناردستیهایش معلم‌اند.

۷. در پایان یک دوره مسابقات قهرمانی بولینگ، پنج نفر اول به‌طور حذفی مسابقه می‌دهند. ابتدا نفر پنجم با نفر چهارم مسابقه می‌دهد. بازنده جایزهٔ پنجم را می‌گیرد و برنده با نفر سوم مسابقه می‌دهد. بازندهٔ این مسابقه جایزهٔ چهارم را می‌گیرد و برندهٔ آن با نفر دوم مسابقه می‌دهد. بازندهٔ این مسابقه جایزهٔ سوم را می‌گیرد و برندهٔ آن با نفر اول مسابقه می‌دهد. برندهٔ این بازی جایزهٔ اول را می‌گیرد و بازندهٔ آن جایزهٔ دوم را می‌گیرد. به چند ترتیب نفرات اول تا پنجم می‌توانند جایزه‌ها را تصاحب کنند؟

۸. عنکبوت به هر پایش یک جوراب و یک کفش می‌کند. اگر قرار باشد که ابتدا جوراب پوشیده شود بعد کفش، عنکبوت به چند طریق مختلف می‌تواند جورابها و کفشهایش را به پا کند؟

۹. درکشویی که در اتاقی تاریک قرار دارد ۱۰۰ جوراب قرمز، ۸۰ جوراب سبز، ۶۰ جوراب آبی و ۴۰ جوراب مشکی وجود دارد. پسربچه‌ای هربار یک جوراب از این کشو انتخاب می‌کند، اما نمی‌تواند رنگ جورابی را که بیرون آورده است ببیند. کمترین تعداد جورابهایی که باید درآورد تا مطمئن شد که در میان جورابهای بیرون آورده شده دست‌کم ۱۰ جفت جوراب وجود دارد چندتاست؟ (هر جفت جوراب، دو جوراب یکرنگ است. هیچ جورابی را نمی‌توان در بیش از یک جفت شمرد.)

۱۰. عددی گویا مفروض است. این عدد را به شکل کسری ساده‌نشدنی بنویسید و حاصل‌ضرب صورت و مخرج آن را حساب کنید. به‌ازای چندتا از عددهای گویا میان ۰ و ۱ این حاصل‌ضرب برابر با !۲۰ است؟

۱۱. به چند طریق می‌توان پنج عدد از میان نخستین هجده عدد طبیعی طوری انتخاب کرد که تفاضل هر دوتا از عددهای انتخاب‌شده دست‌کم ۲ باشد؟

۱۲. در اتاقی $N$ نفر حاضرند، $N > ۳$، و دست‌کم یکی از این افراد با هیچ کسی در این اتاق دست نداده است. حداکثر چند نفر از افراد حاضر در این اتاق با همهٔ افراد دیگر دست داده‌اند؟

۱۳. تعداد چهارتاییهای مرتب از عددهای طبیعی فرد مانند $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ را پیدا کنید که

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹۸$$

۱۴. تعدادی متناهی کارت را به دو دسته تقسیم کرده‌ایم و تعداد کارتهای دستهٔ سمت چپ از تعداد کارتهای دستهٔ سمت راست بیشتر است. روی هر کارت یک اسم یا چند اسم متمایز نوشته‌ایم و ممکن است اسمی روی چند کارت مختلف نوشته شده باشد. بُر زدن هر نام یعنی اینکه هر کارتی

را که این نام روی آن نوشته شده است به دستهٔ مقابل منتقل کنیم. ثابت کنید همواره می‌توانیم چند نام مختلف را طوری انتخاب کنیم که با بُر زدن تک‌تک این نامها، درنهایت تعداد کارتهای دستهٔ سمت راست بیشتر شده باشد.

۱۵. در چند جفت از عددهای متوالی از مجموعهٔ

$$\{۱۰۰۰, ۱۰۰۱, ۱۰۰۲, \ldots, ۲۰۰۰\}$$

وقتی عددها را با هم جمع می‌کنیم انتقالی نداریم؟

۱۶. شش دانش‌آموز و پروفسور آلفا، پروفسور بتا و پروفسور گاما باید روی نه صندلی که در یک ردیف چیده شده‌اند بنشینند. پروفسورها پیش از شش دانش‌آموز رسیده‌اند و تصمیم گرفته‌اند که صندلیهایشان را طوری انتخاب کنند که هر یک از آنها در میان دو دانش‌آموز قرار داشته باشد. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

۱۷. ثابت کنید در میان هر ۱۶ عدد طبیعی متمایز که از ۱۰۰ بیشتر نیستند چهار عدد متمایز مانند $a$، $b$، $c$ و $d$ وجود دارد که $a+b=c+d$.

۱۸. پسربچه‌ای ۹۶ مهرهٔ متمایز دارد. جنس هر مهره یا پلاستیک است یا چوب، اندازهٔ هر مهره یا کوچک است یا متوسط یا بزرگ، رنگ هر مهره یا آبی است یا سبز یا قرمز یا زرد و شکل هر مهره یا دایره است یا شش‌ضلعی یا مربع یا مثلث. چندتا از این مهره‌ها با مهرهٔ «پلاستیکی متوسط قرمز دایره‌ای» دقیقاً در دو مشخصه فرق دارند؟ (مهرهٔ «چوبی متوسط قرمز مربعی» یکی از این مهره‌هاست.)

۱۹. شمارهٔ تلفن هفت‌رقمی $\mathrm{d_۱d_۲d_۳-d_۴d_۵d_۶d_۷}$ را به‌یادماندنی بنامید، هرگاه دنبالهٔ پیش‌شمارهٔ آن، یعنی $\mathrm{d_۱d_۲d_۳}$، با دنبالهٔ $\mathrm{d_۴d_۵d_۶}$ یا دنبالهٔ $\mathrm{d_۵d_۶d_۷}$ (یا هر دو آنها) یکسان باشد. با فرض اینکه هر یک از $\mathrm{d}_i$ها ممکن است یکی از ده رقم اعشاری ۰، ۱، ۲، . . . و ۹ باشد، تعداد شمارهٔ تلفنهای به‌یادماندنی متمایز را پیدا کنید.

۲۰. دوتا از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۷ × ۷ را زرد و بقیه را سبز می‌کنیم. دو رنگ‌آمیزی را هم‌ارز می‌نامیم اگر بتوان یکی را با دوران صفحهٔ شطرنج از دیگری به‌دست آورد. چند رنگ‌آمیزی غیرهم‌ارز می‌توان به‌دست آورد؟

۲۱. به چند طریق می‌توان عددهای ۲۱، ۳۱، ۴۱، ۵۱، ۶۱، ۷۱ و ۸۱ را طوری مرتب کرد که مجموع هر چهار عدد متوالی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

**۲۲.** فرض کنید $S$ مجموعه‌ای شش‌عضوی باشد. به چند طریق مختلف می‌توان دو زیرمجموعه از $S$ را که لزوماً متمایز نیستند طوری انتخاب کرد که اجتماع این دو زیرمجموعه برابر با $S$ باشد؟ ترتیب انتخاب مهم نیست؛ مثلاً، انتخاب دو زیرمجموعهٔ $\{a, c\}$ و $\{b, c, d, e, f\}$ با انتخاب دو زیرمجموعهٔ $\{b, c, d, e, f\}$ و $\{a, c\}$ فرقی ندارد.

**۲۳.** مجموعه‌ای از عددهای مثبت مثلثی است، هرگاه سه عضو متمایز داشته باشد که سه ضلع مثلثی با مساحت مثبت باشند. مجموعه‌هایی مانند $\{۴, ۵, ۶, \ldots, n\}$ از عددهای طبیعی متوالی را در نظر بگیرید که همهٔ زیرمجموعه‌های ده‌عضوی آنها مثلثی‌اند. بیشترین مقدار ممکن $n$ چقدر است؟

**۲۴.** $A$ و $B$ دو مجموعهٔ جدا از هم‌اند که اجتماعشان مجموعهٔ عددهای طبیعی است. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $n$، عددهایی متمایز مانند $a$ و $b$ وجود دارند که $a, b > n$ و یا $\{a, b, a+b\} \subseteq A$ یا $\{a, b, a+b\} \subseteq B$.

**۲۵.** دنبالهٔ صعودی

$$۱, ۳, ۴, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۳, \ldots$$

از همهٔ عددهای طبیعی تشکیل شده است که توان ۳اند یا مجموع توانهای متمایز ۳اند. جملهٔ ۱۰۰ام این دنباله را پیدا کنید (۱ جملهٔ اول است، ۳ جملهٔ دوم است و همین‌طور در مورد بقیه).

**۲۶.** دسته‌ای کارت داریم که روی هر کارت آن یکی از شکلهای دایره، مربع یا مثلث حک شده است و هر یک از این شکلها به یکی از سه رنگ قرمز، آبی یا سبز است. علاوه بر این، سایهٔ هر یک از رنگها یا ملایم است یا متوسط یا سیر. در این دسته ۲۷ کارت وجود دارد و هر ترکیبی از شکل_رنگ_سایه در آن آمده است. مجموعه‌ای از سه کارت این دسته را متمم می‌نامیم، هرگاه حکمهای زیر هر سه درست باشند:

**الف)** یا شکل هر سه کارت متفاوت باشد یا شکل هر سه کارت یکسان باشد.

**ب)** یا رنگ هر سه کارت متفاوت باشد یا رنگ هر سه کارت یکسان باشد.

**ج)** یا سایهٔ هر سه کارت متفاوت باشد یا سایهٔ هر سه کارت یکسان باشد.

چند مجموعهٔ سه‌کارتی متمم وجود دارد؟

**۲۷.** در اردوی ریاضی، هر $m$ دانش‌آموز دقیقاً یک دوست مشترک دارند، $m \geq ۳$. (اگر $A$ دوست $B$ باشد، $B$ هم دوست $A$ است. همچنین، هیچکس دوست خودش نیست.) فرض کنید $P$ بیشترین تعداد دوستان را داشته باشد. این تعداد را مشخص کنید.

**۲۸.** ۷ دانش‌آموز و ۱۳ معلم در یک صف ایستاده‌اند. فرض کنید $A$ تعداد جاهایی در این صف باشد

که یک دانش‌آموز و یک معلم کنار هم ایستاده‌اند. مثلاً در صف

$$\text{TSSTTTSTSTTTSTSTTSTT}$$

$A = ۱۲$. میانگین مقادیر $A$ را (وقتی که همهٔ آرایشهای ممکن این ۲۰ نفر را در نظر بگیریم) حساب کنید.

**۲۹.** دانش‌آموز بی‌حوصله‌ای در سالنی که در آن کمدهای دربسته‌ای با شماره‌های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار گرفته‌اند قدم می‌زند. او در کمد شمارهٔ ۱ را باز می‌کند و سپس در کمدها را یکی در میان باز می‌کند. پس از اینکه به انتهای سالن رسید، برمی‌گردد. به اولین کمد در بسته‌ای که برسد در آن را باز می‌کند و سپس در کمدها را یکی در میان باز می‌کند. این دانش‌آموز آنقدر می‌رود و می‌آید که در همهٔ کمدها باز شود. شمارهٔ آخرین کمدی که او درش را باز کرده است چیست؟

**۳۰.** فرض کنید $n = ۲^{۳۱}۳^{۱۹}$. چندتا از مقسوم‌علیه‌های مثبت $n^۲$ از $n$ کوچکترند اما $n$ را نمی‌شمارند؟

**۳۱.** در یک ورزشگاه در جایگاه تماشاچیان در هر ردیف ۱۹۹ نفر می‌نشینند. یک‌بار از ۱۹۹۰ دانش‌آموز برای تماشای مسابقهٔ فوتبال دعوت شد. فقط معلوم بود که از هر مدرسه حداکثر ۳۹ دانش‌آموز می‌آیند. اگر قرار باشد که دانش‌آموزان هر مدرسه در یک ردیف بنشینند، کمترین تعداد ردیفهایی را که باید به دانش‌آموزان اختصاص داد تعیین کنید.

**۳۲.** فرض کنید

$$T = \{۹^k : \ ۰ \le k \le ۴۰۰۰ \text{ و } k \text{ عددی صحیح است}\}$$

می‌دانیم $۹^{۴۰۰۰}$، ۳۸۱۷ رقم دارد و اولین رقم (سمت چپ) آن ۹ است. اولین رقم سمت چپ چندتا از عضوهای $T$، ۹ است؟

**۳۳.** به‌ازای چه مقدارهایی از عدد طبیعی $n$ عددی مانند $m$ وجود دارد که می‌توان آن را به $(n-۱)!$ طریق یا بیشتر به شکل $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ نوشت، که در آن

$$a_۱ \in \{۱\}, \quad a_۲ \in \{۱, ۲\}, \quad \ldots, \quad a_n \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$$

**۳۴.** فرض کنید مجموع هر مجموعه از عددها مجموع عضوهایش باشد. فرض کنید $S$ مجموعه‌ای از عددهای طبیعی باشد که از ۱۵ بزرگتر نیستند. فرض کنید مجموع هیچ دو زیرمجموعهٔ جدا از هم از $S$ برابر نباشد. بیشترین مقدار مجموع مجموعه‌ای مانند $S$ با این ویژگیها چقدر است؟

**۳۵.** دست‌کم چهار شکلات داریم که درون $n$ $(n \ge ۴)$ جعبه قرار دارند. آقای چاق هر بار می‌تواند

دو جعبه انتخاب کند، از هر یک از این دو جعبه یک شکلات بردارد و آنها را درون جعبه‌ای دیگر بگذارد. آیا همواره می‌توان همهٔ شکلاتها را درون یک جعبه قرار داد؟

۳۶. آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰۰ را طوری در یک ردیف مرتب کرد که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از آنها میان این دو عدد قرار نگرفته باشد؟

۳۷. فرض کنید $A_۱A_۲\ldots A_{۱۲}$ دوازده‌ضلعی منتظمی باشد که مرکزش نقطهٔ $O$ است. ناحیه‌های مثلثی $OA_iA_{i+۱}$، $۱ \leq i \leq ۱۲$ ($A_{۱۳} = A_۱$) را با رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد طوری رنگ می‌کنیم که رنگ ناحیه‌های مجاور متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۳۸. $۲n$ نفر در مهمانی حاضرند. تعداد دوستان هرکس در این مهمانی عددی زوج است. (دوستی رابطه‌ای دوطرفه است.) ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان مشترکشان در این مهمانی عددی زوج است.

۳۹. چند جدول $۴ \times ۴$ متمایز وجود دارد که درایه‌هایشان ۱ و ۱− هستند و مجموع درایه‌های هر سطر و مجموع درایه‌های هر ستون صفر است؟

۴۰. مربعی $(n-۱) \times (n-۱)$ را به‌طریق معمول به $(n-۱)^۲$ مربع واحد تقسیم می‌کنیم. هر یک از $n^۲$ رأس این مربعها را یا قرمز می‌کنیم یا آبی. تعداد رنگ‌آمیزیهای متمایزی را پیدا کنید که در آنها هر مربع واحد دقیقاً دو رأس قرمز دارد. (دو رنگ‌آمیزی وقتی متمایزند که دست‌کم رنگ یک رأس در آنها متفاوت باشد.)

۴۱. شصت‌وچهار گلوله را به چند دسته تقسیم کرده‌ایم. در هر گام می‌توانیم به‌طریق زیر عمل کنیم. دو دسته انتخاب می‌کنیم، یکی مثلاً دستهٔ $A$ با $p$ گلوله و دیگری مثلاً دستهٔ $B$ با $q$ گلوله، که در اینجا $p \geq q$، و سپس $q$ گلوله از دستهٔ $A$ برمی‌داریم و در دستهٔ $B$ می‌گذاریم. ثابت کنید می‌توان همهٔ گلوله‌ها را در یک دسته قرار داد.

۴۲. نوعی بازی یک‌نفره را با تعدادی متناهی عدد صحیح نامنفی انجام می‌دهند. در حرکت اول، بازیکن عددی صحیح را به‌عنوان بزرگ در نظر می‌گیرد و عددی صحیح و نامنفی و کوچکتر از عدد بزرگ را جایگزین یکی از عددها می‌کند. در حرکت بعدی هم بازی به‌طور مشابه انجام می‌شود، فقط باید عددی که به‌عنوان جایگزین در نظرگرفته می‌شود همان عدد بزرگ حرکت قبلی باشد. ثابت کنید پس از چند بار متناهی حرکت بازی تمام می‌شود.

۴۳. اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد، می‌توانیم $S$ را با انجام یکی از کارهای صفحهٔ بعد تغییر دهیم:

الف) اگر $۱ \notin S$، ۱ را به $S$ اضافه کنید؛

ب) اگر $n \in S$، $n$ را از $S$ حذف کنید؛

ج) به‌ازای $۱ \leq r \leq n - ۱$، اگر $r \in S$ و $r + ۱ \notin S$، $r$ را از $S$ حذف کنید و $r + ۱$ را به $S$ اضافه کنید.

فرض کنید با انجام این تغییرات می‌توان دنباله‌ای مانند

$$\varnothing \to \{۱\} \to \{۲\} \to \cdots \to \{n\}$$

به‌دست آورد که از $\varnothing$ شروع و به $\{n\}$ ختم می‌شود و در آن هر یک از $۲^n$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ دقیقاً یک بار آمده است. ثابت کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند $m$، $n = ۲^m - ۱$.

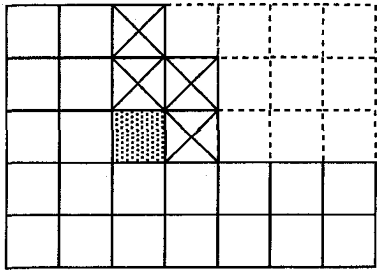
**۴۴.** ۲۰۰۱ سکه روی میز وجود دارد. به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, ۲۰۰۱$ می‌توان پشت سر هم دقیقاً $i$ سکه را پشت‌ورو کرد. ثابت کنید همواره یا می‌توان همهٔ سکه‌ها را به رو کرد یا می‌توان همهٔ سکه‌ها را به پشت کرد، اما فقط یکی از این کارها میسر است.

**۴۵.** مجموع یکی درمیان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و هر یک از زیرمجموعه‌های ناتهی آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: عددهای این زیرمجموعه را به ترتیب نزولی مرتب کنید و سپس ابتدا از بزرگترین عدد، عددها را به ترتیب یکی درمیان زیاد و کم کنید. (مثلاً، مجموع یکی درمیان مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۴, ۶, ۹\}$ برابر با $۹ - ۶ + ۴ - ۲ + ۱$ و مجموع یکی درمیان مجموعهٔ $\{۵\}$ برابر با ۵ است.) به‌ازای $n = ۷$، مجموع همهٔ مجموعهای یکی درمیان را حساب کنید.

**۴۶.** در بازی ملچ‌ملوچ خوردن دو بازیکن یکی درمیان «تکه‌هایی» از جدولی $۷ \times ۵$ از مربعهای واحد را برمی‌دارند. برای برداشتن هر تکه، بازیکن یکی از مربعهای باقی‌مانده را انتخاب می‌کند و سپس همهٔ مربعهایی را که در ناحیه‌ای که با ضلع سمت چپ (و امتداد آن به‌سمت بالا) و ضلع پایینی (و امتداد آن به‌سمت راست) این مربع تعریف شده است حذف می‌کند (می‌خورد). مثلاً، با تکه‌ای که مربع سایه‌دار در شکل صفحهٔ بعد مشخص می‌کند، مربع سایه‌دار و چهار مربعی که با علامت $\times$ مشخص شده‌اند حذف می‌شوند. (مربعهایی که دوتا یا تعداد بیشتری ضلع خط‌چین دارند در حرکتهای قبلی از صفحهٔ اصلی حذف شده‌اند.)

هدف هر بازیکن این است که کاری کند که طرف مقابلش تکهٔ آخر را بردارد. شکل صفحهٔ بعد یکی از چند زیرمجموعهٔ مجموعهٔ ۳۵ مربع واحد را نشان می‌دهد که ممکن است در طول بازی ملچ‌ملوچ خوردن پدید بیایند. درکل چندتا از این زیرمجموعه‌های متمایز وجود دارند؟ در این

شمارش، کل صفحه و صفحهٔ خالی را هم در نظر بگیرید.



**۴۷.** در هر خانهٔ صفحهٔ شطرنجی $۲۰۰۲ \times ۱۹۸۸$ یا ۰ نوشته شده یا ۱، به‌طوری که در هر سطر و هر ستون تعداد کل خانه‌هایی که ۱ در آنها نوشته شده عددی فرد است. ثابت کنید تعداد خانه‌های سفیدی که در آنها ۱ نوشته شده عددی زوج است.

**۴۸.** فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۹۸۹\}$ باشد که تفاضل هیچ دو عضوی از آن ۴ یا ۷ نیست. تعداد عضوهای $S$ حداکثر چندتاست؟

**۴۹.** پانزده دانش‌آموز زرنگ و پانزده دانش‌آموز تنبل دور میزی گرد نشسته‌اند. معلم می‌خواهد دانش‌آموزان را در گروههای دونفره دسته‌بندی کند و پانزده نوع برگهٔ امتحانی میان آنها توزیع کند ـ هر برگهٔ امتحانی برای یک گروه دونفره.

معلم حین کار از خود پرسید «به چند طریق می‌توانم دانش‌آموزان را در گروههای دونفرهٔ زرنگ/تنبل کنار هم بنشانم، به‌طوری که لازم نباشد از دانش‌آموزی بخواهم جایش را عوض کند؟» به این سؤال معلم جواب بدهید. (دو طرز نشستن را یکی می‌دانیم، هرگاه بتوان یکی را از دوران دیگری به‌دست آورد.)

**۵۰.** دو خانه در صفحهٔ شطرنجی $۸ \times ۸$ را چسبیده می‌نامیم هرگاه دست‌کم یک رأس مشترک داشته باشند. آیا شاه می‌تواند از خانه‌ای شروع به حرکت کند و به همهٔ خانه‌ها دقیقاً یک‌بار برود، به‌طوری که در تمام حرکتها، بجز اولی، به خانه‌ای برود که به تعداد زوجی از خانه‌هایی که قبلاً به آنها رفته است چسبیده باشد؟

**۵۱.** ۱۱۹ نفر در ساختمانی ۱۲۰ آپارتمانی زندگی می‌کنند. آپارتمانی را پرازدحام می‌نامیم که دست‌کم ۱۵ نفر در آن ساکن باشند. هر روز ساکنان آپارتمانهای پرازدحام مشاجره می‌کنند و هر کدام به آپارتمانی متفاوت از بقیه در همین ساختمان می‌رود (درنتیجه می‌توانند روی یکدیگر را نبینند!). آیا درست است که این روند لزوماً روزی به پایان می‌رسد؟

# ۲

# مسأله‌های پیشرفته

۱. در تورنمنتی هر بازیکن با هر یک از بازیکنان دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند. در هر بازی، برنده ۱ امتیاز می‌گیرد، بازنده هیچ امتیازی نمی‌گیرد و اگر بازی به تساوی ختم شود هر یک از دو بازیکن $\frac{۱}{۲}$ امتیاز می‌گیرد. در پایان تورنمنت معلوم شد که دقیقاً نصف امتیازهایی که هر بازیکن گرفته است در مقابل ده بازیکنی بوده است که کمترین امتیازها را دارند (به‌ویژه، هر یک از ده بازیکنی که کمترین امتیازها را دارند نصف امتیازهایش را در مقابل نه نفر دیگر از این ده نفر به‌دست آورده است). چند بازیکن در این تورنمنت بوده‌اند؟

۲. فرض کنید $n$ عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد. تعداد جایگشتهایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند $p$ را پیدا کنید که

$$|p(۱) - ۱| + |p(۲) - ۱| + \cdots + |p(n) - n| = \frac{n^۲ - ۱}{۲}$$

۳. در هر دنباله از نتیجه‌های پرتاب‌کردنهای یک سکه می‌توان تعداد دفعاتی را که یک شیر بلافاصله بعد از یک خط می‌آید، یک شیر بلافاصله بعد از یک شیر می‌آید و غیره، را حساب کرد. فرض کنید این پشت سر هم آمدنها را با $HH$، $TH$ و غیره، نشان دهیم. مثلاً، در دنبالهٔ

$$HHTTHHHHTHHTTTT$$

از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه، پنج زیردنبالهٔ $HH$، سه زیردنبالهٔ $HT$، دو زیردنبالهٔ $TH$ و چهار زیردنبالهٔ $TT$ وجود دارد. چند دنبالهٔ متفاوت از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب‌کردن یک سکه شامل دقیقاً دو زیردنبالهٔ $HH$، سه زیردنبالهٔ $HT$، چهار زیردنبالهٔ $TH$ و پنج زیردنبالهٔ $TT$ است؟

۴. فرض کنید $A = (a_۱, a_۲, \dots, a_{۲۰۰۱})$ دنباله‌ای از عددهای طبیعی باشد. فرض کنید $m$ برابر با تعداد زیردنباله‌های سه عضوی از این دنباله مانند $(a_i, a_j, a_k)$ باشد که $۱ \leq i < j < k \leq ۲۰۰۱$ و $a_j = a_i + ۱$ و $a_k = a_j + ۱$. در میان همهٔ دنباله‌هایی مانند $A$ بزرگترین $m$ را پیدا کنید.

۵. بیست‌وسه نفر که وزن هر یک از آنها عددی طبیعی است می‌خواهند فوتبال بازی کنند. این عده یکی را به‌عنوان داور انتخاب می‌کنند و سپس به دو تیم ۱۱ نفره طوری تقسیم می‌شوند که وزن کل دو تیم برابر باشد. معلوم شده است که داور هر که باشد می‌توان این کار را کرد. ثابت کنید وزن این ۲۳ نفر برابر است.

۶. کوچکترین عدد طبیعی مانند $n$، $n \geq ۴$، را پیدا کنید که بتوان از میان هر $n$ عدد صحیح متمایز چهار عدد مختلف مانند $a$، $b$، $c$ و $d$ طوری پیدا کرد که $a + b - c - d$ بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد.

۷. پستچی نامه‌ها را به نوزده خانهٔ ضلع شرقی خیابان می‌برد. او متوجه شده است که هر روز، از هر دو خانهٔ همسایه حداکثر یکی نامه دارد و هر روز تعداد خانه‌هایی که پشت سر هم هستند و نامه ندارند بیشتر از دوتا نبوده است. چند الگوی متمایز برای رساندن نامه‌ها وجود دارد؟

۸. به‌ازای $i = ۱, ۲, \dots, ۱۱$ فرض کنید $M_i$ مجموعه‌ای پنج‌عضوی باشد و اگر $۱ \leq i < j \leq ۱۱$، $M_i \cap M_j \neq \varnothing$. فرض کنید $m$ بزرگترین عددی باشد که بتوان مجموعه‌هایی مانند $M_{i_۱}$، ... و $M_{i_m}$ را طوری انتخاب کرد که $\bigcap_{k=۱}^{m} M_{i_k} \neq \varnothing$. کمترین مقدار $m$ را به‌ازای همهٔ انتخابهای ممکن $M_i$ها پیدا کنید.

۹. هر دومینو را زوجی مرتب از عددهای طبیعی تعریف می‌کنیم. هر دنبالهٔ متناسب از دومینوها دنباله‌ای از دومینوهای متمایز است که در آن درایهٔ اول هر زوج، پس از زوج اول، برابر است با درایهٔ دوم زوج پیش از آن و هیچ دو زوجی مانند $(i, j)$ و $(j, i)$ در آن به چشم نمی‌خورد. فرض کنید $D_{۴۰}$ مجموعهٔ همهٔ دومینوهایی باشد که درایه‌های آنها از ۴۰ بزرگتر نیستند. طول بلندترین دنبالهٔ متناسب از دومینوها را که می‌توان با دومینوهای $D_{۴۰}$ تشکیل داد پیدا کنید.

۱۰. تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲۰۰۰\}$ را پیدا کنید که مجموع عضوهای هر یک از آنها بر ۵ بخش‌پذیر است.

۱۱. فرض کنید $X$ مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی و $A$ زیرمجموعه‌ای از $X$ باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از $X$ مانند $B$ وجود دارد که $A$ برابر است با مجموعهٔ عضوهایی از $X$ که تعداد فردی از عضوهای $B$ را می‌شمارند.

۱۲. ۲۰۰۰ کارت داریم که آنها را با عددهای طبیعی از ۱ تا ۲۰۰۰ طوری شماره‌گذاری کرده‌ایم که عددهای روی کارتهای متفاوت با هم فرق دارند. کارتهای این دسته کارت به ترتیب عددهای نوشته شده رویشان نیستند. کارت رویی را می‌کشیم و روی میز می‌گذاریم و کارت بعدی را زیر این دسته کارت می‌گذاریم. کارت رویی جدید را می‌کشیم و روی میز در سمت راست کارتی که قبلاً روی میز گذاشته‌ایم قرار می‌دهیم و کارت بعدی را زیر این دسته کارت می‌گذاریم. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم که همهٔ کارتها روی میز قرار بگیرند. معلوم شده است که شمارهٔ کارتها از چپ به راست به ترتیب صعودی است:

$$۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۹۹۹, ۲۰۰۰$$

در دسته کارت اولیه چندتا کارت بالای کارت شمارهٔ ۱۹۹۹ قرار داشته‌اند؟

۱۳. با صفحه‌های نمایش $۱ \times ۱$ صفحه‌ای $۲۰۰۲ \times ۲۰۰۰$ تشکیل دهید. در آغاز بیش از $۱۹۹۹ \times ۲۰۰۱$تا از صفحه‌های نمایش $۱ \times ۱$ روشن‌اند. اگر در صفحه‌ای $۲ \times ۲$ سه‌تا از صفحه‌های $۱ \times ۱$ خاموش باشند، چهارمی هم خودبه‌خود خاموش می‌شود. ثابت کنید هیچ‌گاه کل صفحه خاموش نمی‌شود.

۱۴. مدیری در طول روز در زمانهای مختلفی نامه‌ای را برای تایپ به منشی می‌دهد و هر بار نامه را روی ستون نامه‌های روی میز منشی می‌گذارد. هر وقت که موقعش برسد، منشی نامهٔ رویی را برمی‌دارد و آن را تایپ می‌کند. امروز نه نامه باید تایپ شوند و مدیر آنها را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ به منشی می‌دهد. هنگام ناهار، منشی به همکارش می‌گوید که نامهٔ ۸ تایپ شده است اما از اینکه پیش از ظهر چه نامه‌هایی تایپ شده است هیچ‌چیز نمی‌گوید. همکار منشی از خود می‌پرسد که بعد از ناهار کدام‌یک از نه نامه و به چه ترتیبی باید تایپ شوند. براساس اطلاعات بالا، چندتا ترتیب تایپ بعد از ناهار ممکن است وجود داشته باشد؟ (اینکه هیچ نامه‌ای برای تایپ نمانده باشد هم یکی از حالتهای ممکن است.)

۱۵. فرض کنید $n$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید

$$\sum_{k=۰}^{n} ۲^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{۲} \rfloor} = \binom{۲n+۱}{n}$$

۱۶. فرض کنید $m$ و $n$ عددهایی طبیعی باشند. فرض کنید می‌توان مستطیلی را با ترکیبی از نوارهای $m \times ۱$ افقی و نوارهای $۱ \times n$ عمودی فرش کرد. ثابت کنید می‌توان این مستطیل را تنها با استفاده از یکی از این دو نوع نوار فرش کرد.

۱۷. دنبالهٔ

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_n$$

از عددهای حقیقی مفروض است. در هر مرحله، اگر دنباله به

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

تبدیل شده باشد، آن را با دنبالهٔ

$$|x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_n - a|$$

که در آن $a$ عددی حقیقی است، عوض می‌کنیم. در هر مرحله ممکن است مقدار $a$ تغییر کند.

**الف)** ثابت کنید همواره می‌توان دنباله‌ای به‌دست آورد که همهٔ جمله‌هایش صفرند.

**ب)** کمترین تعداد مرحله‌هایی را تعیین کنید که، بدون توجه به اینکه دنبالهٔ اولیه چه دنباله‌ای است، بتوانیم پس از این مرحله‌ها دنباله‌ای به‌دست بیاوریم که همهٔ جمله‌هایش صفرند.

۱۸. دربارهٔ دنبالهٔ $(a_n)_{n\geq 1}$ می‌دانیم $a_1 = 0$، $a_2 = 1$ و اگر $n \geq 3$،

$$a_n = \frac{1}{2} n a_{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) a_{n-2} + (-1)^n \left(1 - \frac{n}{2}\right)$$

دستوری صریح برای

$$a_n + 2\binom{n}{1} a_{n-1} + 3\binom{n}{2} a_{n-2} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-2} a_2 + n\binom{n}{n-1} a_1$$

پیدا کنید.

۱۹. به‌ازای هر مجموعه مانند $A$ فرض کنید $|A|$ و $s(A)$ به ترتیب تعداد عضوهای $A$ و مجموع عضوهای $A$ باشند. (اگر $A = \varnothing$، آن‌وقت $|A| = s(A) = 0$.) فرض کنید $S$ مجموعه‌ای از عددهای طبیعی باشد که

**الف)** دو عدد در $S$ مانند $x$ و $y$ وجود دارند که $(x, y) = 1$ ب.م.م.؛

**ب)** به‌ازای هر دو عدد در $S$ مانند $x_1$ و $y_1$، $x_1 + y_1 \in S$.

فرض کنید $T$ مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی‌ای باشد که در $S$ نیستند. ثابت کنید $s(T) \leq |T|^2 < \infty$.

۲۰. در جنگلی ۹ حیوان در لانه‌هایشان زندگی می‌کنند و دقیقاً یک راه جداگانه بین هر دو تا از این لانه‌ها وجود دارد. پیش از مراسم انتخاب سلطان جنگل، برخی حیوانات در مبارزهٔ انتخاباتی شرکت می‌کنند. هر یک از نامزدها به هر یک از لانه‌های دیگر دقیقاً یک بار سر می‌زند، فقط از راههای میان لانه‌ها برای رفت‌وآمد استفاده می‌کند، هیچ‌گاه در مسیر بین دو لانه از هیچ راهی به راهی دیگر نمی‌پیچد و در پایان مبارزهٔ انتخاباتی به لانهٔ خودش برمی‌گردد. همچنین می‌دانیم که هیچ راهی بین دو لانه را بیش از یک نفر از نامزدها طی نکرده است. بیشترین تعداد ممکن نامزدها را پیدا کنید.

**۲۱.** مجموعهٔ قطری دنباله‌ای مانند

$$A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_n$$

از زیرمجموعه‌ای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و جایگشتی مانند $\pi$ از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$D_\pi(A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_n) = \{i \in S: \ \ i \notin A_{\pi(i)}\}$$

بیشترین تعداد ممکن مجموعه‌های متمایزی که ممکن است مجموعهٔ قطری دنباله‌ای مانند

$$A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_n$$

باشند چقدر است؟

**۲۲.** زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۵\}$ مانند $M$ این ویژگی را دارد که حاصل‌ضرب هیچ سه عضوی از آن مربع کامل نیست. بیشترین تعداد عضوهای $M$ را مشخص کنید.

**۲۳.** همهٔ دنباله‌های متناهی مانند $(x_{۰}, x_{۱}, \ldots, x_n)$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر $j$، $۰ \leq j \leq n$، $x_j$ برابر با تعداد دفعه‌هایی باشد که $j$ در این دنباله آمده است.

**۲۴.** آیا می‌توان مجموعهٔ عددهای طبیعی را به دو مجموعه مانند $A$ و $B$ طوری افراز کرد که $A$ شامل هیچ تصاعد حسابی سه‌جمله‌ای و $B$ شامل هیچ تصاعد حسابی نامتناهی نباشد؟

**۲۵.** مجموعهٔ $T_{۵}$، مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی پنج‌رقمی را در نظر بگیرید که نمایش اعشاری آنها جایگشتی از رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ است. آیا می‌توان $T_{۵}$ را به دو مجموعه مانند $A$ و $B$ طوری افراز کرد که مجموع مربعهای عضوهای $A$ با مجموع مربعهای عضوهای $B$ برابر باشد؟

**۲۶.** فرض کنید $n$ عددی طبیعی باشد. تعداد چندجمله‌هایی مانند $P(x)$ را پیدا کنید که ضریبهایش عضو مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ هستند و $P(۲) = n$.

**۲۷.** فرض کنید $n$ و $k$ عددهایی طبیعی باشند که $\frac{۱}{۲}n < k \leq \frac{۲}{۳}n$. کوچکترین عدد مانند $m$ را طوری پیدا کنید که بتوان $m$ سرباز را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ طوری قرار داد که در هیچ سطر و هیچ ستونی $k$ خانهٔ پشت سر هم خالی وجود نداشته باشد.

**۲۸.** در یک دوره مسابقات فوتبال، هر تیم با هر یک از دیگر تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند و برای هر برد ۳ امتیاز و برای هر تساوی ۱ امتیاز می‌گیرد و اگر ببازد هیچ امتیازی نمی‌گیرد. در پایان مسابقات، معلوم شد که تیمی بیشترین امتیاز را گرفته است و کمترین برد را داشته است. کمترین تعداد تیمها را پیدا کنید که چنین چیزی ممکن باشد.

**۲۹.** فرض کنید

$$a_۱, a_۲, \dots, a_n$$

سطر اول آرایه‌ای مثلثی باشد، که $\{۰, ۱\}$ $a_i \in$، $۱ \le i \le n$. سطر دوم را با

$$b_۱, b_۲, \dots, b_{n-۱}$$

پر می‌کنیم، به‌طوری که اگر $a_k \neq a_{k+۱}$، آن‌وقت $b_k = ۱$ و اگر $a_k = a_{k+۱}$، آن‌وقت $b_k = ۰$. بقیهٔ سطرها را هم به‌روش مشابه پر می‌کنیم. بیشترین تعداد ممکن ۱ها را در آرایهٔ به‌دست آمده تعیین کنید.

**۳۰.** در تخت‌آباد ۱۰ شهر وجود دارد. پرواز میان شهرها در دست دو شرکت هواپیمایی است. میان هر دو شهر دقیقاً یک خط هوایی (در هر دو جهت) وجود دارد. ثابت کنید یکی از این شرکتها می‌تواند دو مسیر دوری برقرار کند که هر دور از تعداد فردی از شهرها می‌گذرد و این دو دور از شهری مشترک نمی‌گذرند.

**۳۱.** فرض کنید هر یک از عددهای طبیعی را که از $\frac{n(n^۲ - ۲n + ۳)}{۲}$، $n \ge ۲$، بزرگتر نیستند با یکی از دو رنگ (قرمز و آبی) رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید دنباله‌ای $n$جمله‌ای و تکرنگ مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_n$ وجود دارد که

$$a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$$

و

$$a_۲ - a_۱ \le a_۳ - a_۲ \le \cdots \le a_n - a_{n-۱}$$

**۳۲.** مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۳n\}$ را به سه مجموعهٔ $A$، $B$ و $C$ که هر کدام $n$ عضو دارد افراز کرده‌ایم. آیا همواره می‌توان از هر یک از این مجموعه‌ها عددی انتخاب کرد که یکی از این عددها مجموع دو عدد دیگر باشد؟

**۳۳.** فرض کنید هر یک از ۳۰ نفر دانش‌آموز کلاسی فقط به یکی از واریانتهای شطرنج و فقط به یکی از نابرابریهای کلاسیک علاقه دارد. هر یک از این دانش‌آموزان این اطلاعات را روی یک برگهٔ نظرخواهی می‌نویسد. در میان پاسخهای روی برگهٔ نظرخواهی دقیقاً ۲۰ واریانت مختلف شطرنج و دقیقاً ۱۰ نابرابری کلاسیک متفاوت وجود دارد. فرض کنید $n$ برابر با تعداد دانش‌آموزانی مانند $M$ باشد که تعداد دانش‌آموزانی که نابرابری موردعلاقهٔ $M$ را نوشته‌اند از تعداد دانش‌آموزانی که واریانت موردعلاقهٔ $M$ را نوشته‌اند بیشتر است. ثابت کنید $n \ge ۱۱$.

**۳۴.** با شروع از سه‌تایی $(a, b, c)$ از عدددهای صحیح نامنفی، هر حرکت یعنی انتخاب دوتا از این عددها، مانند $x$ و $y$ و جایگزین کردن یکی از آنها با $x + y$ یا $|x - y|$. مثلاً می‌توان با یک حرکت

از $(۳,۵,۷)$ به $(۳,۵,۴)$ رفت. ثابت کنید عددی ثابت و مثبت مانند $r$ وجود دارد که اگر $a$، $b$، $c$ و $n$ عددهایی طبیعی باشند و $a,b,c < ۲^n$، دنباله‌ای از حداکثر $rn$ حرکت وجود دارد که $(a,b,c)$ را به $(a',b',c')$ تبدیل می‌کنند که در آن $a'b'c' = ۰$.

**۳۵.** آرایه‌ای مستطیلی از عددها مفروض است. مجموع عددهای هر سطر و مجموع عددهای هر ستون عددی صحیح است. ثابت کنید هر عدد غیرصحیح در این آرایه مانند $x$ را می‌توان با $\lceil x \rceil$ یا $\lfloor x \rfloor$ طوری عوض کرد که مجموع هیچ سطری و مجموع هیچ ستونی تغییر نکند.

**۳۶.** مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی (متمایز) را باوفا می‌نامیم، هرگاه هر یک از عضوهایش مجموع همهٔ عضوهای مجموعه را بشمارد. ثابت کنید هر مجموعهٔ متناهی از عددهای طبیعی زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای باوفاست.

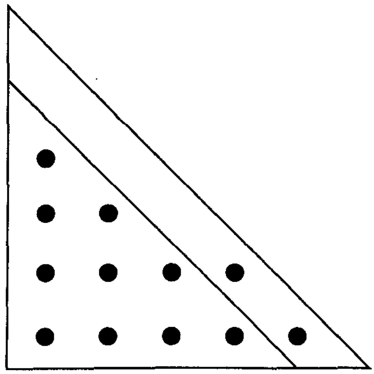
**۳۷.** دوازده نوازنده به‌نامهای $M_۱$، $M_۲$، ... و $M_{۱۲}$ در یک جشنوارهٔ یک هفته‌ای موسیقی گرد هم آمده‌اند. برای هر روز، یک کنسرت پیش‌بینی شده است که در آن برخی نوازنده‌ها برنامه اجرا می‌کنند و بقیه در میان شنوندگان می‌نشینند. به‌ازای $i = ۱,۲,\ldots,۱۲$ فرض کنید $t_i$ تعداد کنسرتهایی باشد که در آن نوازندهٔ $M_i$ برنامه اجرا می‌کند و فرض کنید $t = t_۱ + t_۲ + \cdots + t_{۱۲}$. کمترین مقدار $t$ را پیدا کنید که هر نوازنده بتواند، به‌عنوان شنونده، به برنامهٔ بقیهٔ نوازندگان گوش بدهد.

**۳۸.** آرایه‌ای $m \times n$ را با عددهای ۱، ۲، ... و $n$، که از هر کدام $m$ بار استفاده کرده‌ایم، پر کرده‌ایم. ثابت کنید همواره می‌توان جای عددهای ستونها را طوری عوض کرد که هر یک از عددهای ۱، ۲، ... و $n$ در هر سطر دقیقاً یک بار بیاید.

**۳۹.** فرض کنید $U = \{۱,۲,\ldots,n\}$، که در آن $n \geq ۳$. می‌گوییم زیرمجموعه‌ای از $U$ مانند $S$ با آرایشی از عضوهای $U$ شکافته می‌شود، هرگاه در این آرایش عضوی که در $S$ نیست جایی بین دو عضو $S$ آمده باشد. مثلاً ۱۳۵۴۲، $\{۱,۲,۳\}$ می‌شکافد، اما $\{۳,۴,۵\}$ را نمی‌شکافد. ثابت کنید به‌ازای هر $n-۲$ زیرمجموعهٔ $U$، که دست‌کم ۲ عضو و حداکثر $n-۱$ عضو دارند، آرایشی از عضوهای $U$ وجود دارد که همهٔ اینها را می‌شکافد.

**۴۰.** $n$ سنگریزه را در ستونی عمودی روی هم چیده‌ایم. این ترکیب را می‌توان با قاعده‌های زیر تغییر داد. اگر سنگریزه‌ای روی ستونی باشد که دست‌کم دو سنگریزه بیشتر از ستون سمت راستش داشته باشد، می‌توان آن را حرکت داد. (اگر سنگریزه‌ای در سمت راست نبود، این وضعیت را ستونی با ۰ سنگریزه در نظر بگیرید.) در هر مرحله، از میان سنگریزه‌هایی که می‌توان آنها را حرکت داد (اگر چنین سنگریزه‌هایی وجود داشتند)، سنگریزه‌ای را انتخاب کنید و آن را روی ستون سمت راستش قرار دهید. اگر هیچ سنگریزه‌ای را نتوان حرکت داد، این ترکیب را ترکیب نهایی می‌نامیم. ثابت

کنید، به‌ازای هر $n$، صرف‌نظر از اینکه در هر مرحله کدام سنگریزه را انتخاب کنیم، ترکیب نهایی‌ای که به‌دست می‌آید یکتاست. این ترکیب را برحسب $n$ توصیف کنید.



ترکیب نهایی به‌ازای $n = ۱۲$

۴۱. فرض کنید $B_n$ مجموعهٔ همهٔ رشته‌های دودویی به طول $n$ باشد. فاصلهٔ دو دنباله از رشته‌ها مانند $(a_i)_{i=۱}^{n}$ و $(b_i)_{i=۱}^{n}$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$d((a_i),(b_i)) = \sum_{i=۱}^{n} |a_i - b_i|$$

فرض کنید $C_n$ زیرمجموعه‌ای از $B_n$ باشد. مجموعهٔ $C_n$ را کد تصحیح خطای کامل (ک‌ت‌خ‌ک) به طول $n$ و خطای مجاز $m$ می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر رشته در $B_n$ مانند $(b_i)$، رشته‌ای یکتا در $C_n$ مانند $(c_i)$ وجود داشته باشد که $d((b_i),(c_i)) \leq m$. ثابت کنید ک‌ت‌خ‌ک‌ای به طول ۹۰ و خطای مجاز ۲ وجود ندارد.

۴۲. اگر $n = ۲۰۰۰$، $n = ۲۰۰۱$ یا $n = ۲۰۰۲$، آیا می‌توان عددهای

$$۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, n, n$$

را طوری مرتب کرد که بین هر دو عدد مانند $j$، $j$ عدد قرار داشته باشد؟ (مثلاً، اگر $n = ۴$، ۴۱۳۱۲۴۳۲ چنین آرایشی است.)

۴۳. فرض کنید $k$، $m$ و $n$ عددهایی صحیح باشند و $۱ < n \leq m - ۱ \leq k$. بیشترین اندازهٔ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots k\}$ مانند $S$ را طوری پیدا کنید که مجموع هیچ $n$ عضو متمایزی از $S$ برابر با $m$ نباشد.

۴۴. دنباله‌ای صعودی از عددهای صحیح نامنفی مانند

$$s_۰, s_۱, \ldots$$

را خیلی‌جمعی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای همهٔ عددهای صحیح نامنفی مانند $i$ و $j$، $s_{i+j} \geq s_i + s_j$. فرض کنید $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دو دنبالهٔ خیلی‌جمعی باشند و $\{u_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای صحیح باشد و هر عدد صحیح همان‌قدر در $\{u_n\}$ آمده باشد که روی هم در $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ آمده است. ثابت کنید $\{u_n\}$ هم خیلی‌جمعی است.

۴۵. عددهای طبیعی از ۱ تا $n^۲$ را به‌طور تصادفی در خانه‌های جدولی $n \times n$ می‌نویسیم. به‌ازای هر جفت از عددهایی که روی یک سطر یا روی یک ستون قرار دارند، نسبت عدد بزرگتر به عدد کوچکتر را حساب می‌کنیم. مشخصهٔ این آرایش کوچکترین کسر در میان این $n^۲(n - ۱)$ کسر است. بیشترین مقدار ممکن مشخصه را پیدا کنید.

۴۶. فرض کنید $A$ مجموعه‌ای باشد که $|A| = n$ و $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_n$ زیرمجموعه‌هایی از $A$ باشند که $|A_i| \geq ۲$، $۱ \leq i \leq n$. فرض کنید به‌ازای هر زیرمجموعهٔ دوعضوی $A$ مانند $A'$ عددی یکتا مانند $i$ وجود داشته باشد که $A' \subseteq A_i$. ثابت کنید

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing, \qquad ۱ \leq i < j \leq n$$

۴۷. فرض کنید $r_۱$، $r_۲$، ... و $r_n$ عددهایی حقیقی باشند. ثابت کنید مجموعه‌ای مانند $S$ وجود دارد که $S \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و اگر $۱ \leq i \leq n - ۲$،

$$۱ \leq |S \cap \{i, i + ۱, i + ۲\}| \leq ۲$$

و

$$\Big|\sum_{i\in S} r_i\Big| \geq \frac{۱}{۶}\sum_{i=۱}^{n} |r_i|$$

۴۸. فرض کنید $n$، $k$ و $m$ عددهایی طبیعی باشند و $n > ۲k$. فرض کنید $S$ مجموعه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های $k$عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد، به‌طوری که هر زیرمجموعهٔ $(k + ۱)$عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ شامل دقیقاً $m$ عضو $S$ باشد. ثابت کنید $S$ باید شامل تمامی زیرمجموعه‌های $k$عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد.

۴۹. مجموعه‌ای مانند $T$ را زوج می‌نامیم، هرگاه تعداد عضوهایش عددی زوج باشد. فرض کنید $n$ عددی زوج و مثبت باشد و $S_۱$، $S_۲$، ... و $S_n$ زیرمجموعه‌هایی زوج از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند. ثابت کنید $i$ و $j$ای وجود دارند که $۱ \leq i < j \leq n$ و $S_i \cap S_j$ زوج است.

۵۰. فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ...، $B_۱$، $B_۲$، ... مجموعه‌هایی باشند که $A_۱ = \varnothing$، $B_۱ = \{۰\}$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $n$،

$$A_{n+۱} = \{x + ۱ : \ x \in B_n\}, \qquad B_{n+۱} = (A_n \cap B_n) - (A_n \cap B_n)$$

همهٔ عددهای طبیعی مانند $n$ را پیدا کنید که $B_n = \{۰\}$.

**۵۱.** فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_k$ زیرمجموعه‌هایی از $S$ باشند که اگر $۱ \leq i_۱, i_۲, i_۳, i_۴ \leq k$، آن‌وقت

$$|A_{i_۱} \cup A_{i_۲} \cup A_{i_۳} \cup A_{i_۴}| \leq n - ۲$$

ثابت کنید $k \leq ۲^{n-۲}$.

# ۳

# راه‌حل مسأله‌های مقدماتی

۱. آقا و خانم گلپرور می‌خواهند نام فرزندشان را طوری بگذارند که حروف اول سه کلمهٔ اسم و فامیلش به ترتیب حروف الفبا باشند و تکراری نباشند. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟
(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۹)

### راه‌حل اول

ترکیبی که از سه حرف اول سه کلمهٔ موردنظر به‌دست می‌آید باید یکی از ترکیبهای

اب‌گ، اپ‌گ، . . .، ف‌ق‌گ، ف‌ک‌گ، ق‌ک‌گ

باشد. از ترکیب «گ» با هر زیرمجموعهٔ دوعضوی از مجموعهٔ ۲۵ حرف اول الفبا، که به ترتیب الفبایی نوشته شود، می‌توان ترکیبی به شکل دلخواه به‌دست آورد. مثلاً، {د,ض} را می‌توان به شکل {ض,د} نوشت و دض‌گ را به‌دست آورد. علاوه بر این، به هر ترکیبی به شکل موردنظر دقیقاً یک زیرمجموعهٔ دوعضوی از مجموعهٔ {ک, . . . ,پ,ب,ا} نظیر است. بنابراین، جواب مسأله، تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی‌ای است که می‌توان از مجموعهٔ ۲۵ حرف تشکیل داد؛ تعداد چنین زیرمجموعه‌هایی برابر با $\binom{۲۵}{۲}$ یا ۳۰۰ است.

### راه‌حل دوم

حرف اول کلمهٔ آخر باید «گ» باشد. اگر حرف اول کلمهٔ اول «ا» باشد، حرف اول کلمهٔ دوم باید یکی از حروف ب، پ، ت، . . . و ک باشد؛ بنابراین ۲۴ انتخاب برای حرف اول کلمهٔ دوم داریم. اگر حرف اول کلمهٔ اول «ب» باشد، ۲۳ انتخاب برای حرف اول کلمهٔ دوم داریم. اگر همین روش

شمردن را تکرار کنیم معلوم می‌شود که تعداد ترکیبهای موردنظر برابر است با

$$۲۴ + ۲۳ + \cdots + ۲ + ۱$$

اگر از دستور

$$۱ + ۲ + \cdots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

استفاده کنیم معلوم می‌شود که جواب برابر است با $\frac{۲۴ \times ۲۵}{۲}$ یا ۳۰۰.

**۲.** کمدهای دانش‌آموزان در مدرسهٔ المپیک پشت سر هم شماره خورده‌اند و شمارهٔ اولین کمد ۱ است. قیمت هر قطعه از رقمهای پلاستیکی که برای شماره‌گذاری به‌کار می‌روند دو تومان است. بنابراین، شماره‌گذاری کمد شمارهٔ ۹ دو تومان و شماره‌گذاری کمد شمارهٔ ۱۰ چهار تومان خرج دارد. اگر هزینهٔ شماره‌گذاری همهٔ کمدها ۱۳۷۹۴ تومان شده باشد، در این مدرسه چند کمد وجود دارد؟
(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

برای شماره‌گذاری کمدها به $\frac{۱۳۷۹۴}{۲}$ رقم احتیاج است که برابر است با ۶۸۹۷ رقم. برای شماره‌گذاری کمدهای شمارهٔ ۱ تا ۹ به ۹ رقم احتیاج است، برای شماره‌گذاری کمدهای شمارهٔ ۱۰ تا ۹۹ به $۲ \times ۹۰$ رقم احتیاج است و برای شماره‌گذاری کمدهای شمارهٔ ۱۰۰ تا ۹۹۹ به $۳ \times ۹۰۰$ رقم احتیاج است. بنابراین، برای شماره‌گذاری بقیهٔ کمدها به

$$۶۸۹۷ - ۳ \times ۹۰۰ - ۲ \times ۹۰ - ۹$$

رقم احتیاج است که برابر است با ۴۰۰۸ رقم. بنابراین باید $\frac{۴۰۰۸}{۴}$ یا ۱۰۰۲ کمد دیگر وجود داشته باشد که شمارهٔ هر یک از آنها ۴ رقمی است. در کل $۹۹۹ + ۱۰۰۲$ کمد دانش‌آموزی وجود دارد که برابر است با ۲۰۰۱ کمد.

**۳.** فرض کنید $n$ عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد. ثابت کنید تعداد عددهای فرد در دنبالهٔ

$$\binom{n}{۱}, \binom{n}{۲}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-۱}{۲}}$$

عددی فرد است.

(مجلهٔ ریاضی تیمیشوارا)

**راه‌حل**

مجموع عددهای دنبالهٔ موردنظر برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left(\binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n-۱}\right) = \frac{۱}{۲}(۲^n - ۲) = ۲^{n-۱} - ۱$$

که عددی فرد است و درنتیجه حکم به‌دست می‌آید.

**۴.** چند عدد طبیعی که از ۲۰۰۱ بزرگتر نیستند مضرب ۳ یا ۴اند اما مضرب ۵ نیستند؟

(مسابقهٔ ریاضی امریکا_۱۲، ۲۰۰۱)

**راه‌حل**

در میان عددهای طبیعی که از ۲۰۰۱ بزرگتر نیستند، $\left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۳} \right\rfloor$ مضرب ۳ و $\left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۴} \right\rfloor$ مضرب ۴ وجود دارد. از این $\left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۴} \right\rfloor$ عدد، مضربهای ۱۲ را که تعدادشان برابر است با $\left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۱۲} \right\rfloor$ دو بار شمرده‌ایم؛ بنابراین تعداد مضربهای ۳ یا ۴ برابر است با

$$\left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۴} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۱۲} \right\rfloor$$

که برابر است با ۱۰۰۱. از این عددها $\left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۱۵} \right\rfloor$ مضرب ۱۵ و $\left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۲۰} \right\rfloor$ مضرب ۲۰ را کنار می‌گذاریم، زیرا این عددها مضرب ۵اند. توجه کنید که به این ترتیب $\left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۶۰} \right\rfloor$ مضرب ۶۰ را دو بار کنارگذاشته‌ایم و بنابراین باید یک بار دیگر آنها را حساب کنیم. تعداد عددهایی که ویژگیهای موردنظر را دارند برابر است با

$$۱۰۰۱ - \left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۱۵} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۲۰} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۲۰۰۱}{۶۰} \right\rfloor$$

که برابر است با ۸۰۱.

**۵.** فرض کنید

$$x = ۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲\ldots۹۹۸۹۹۹$$

که در آن رقمهای بعد از ممیز با نوشتن عددهای طبیعی از ۱ تا ۹۹۹ به‌دنبال هم به‌دست آمده‌اند. رقم ۱۹۸۳ام سمت راست ممیز را پیدا کنید.

(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۳)

**راه‌حل**

۱۹۸۳ رقم نخست را در نظر بگیرید و فرض کنید رقم ۱۹۸۳ام برابر با $z$ باشد. می‌توانیم این ردیف از رقمها را به سه قطعهٔ زیر تقسیم کنیم

$$۰/\underbrace{۱۲۳۴۵۶۷۸۹}_{A}\underbrace{۱۰۱۱\ldots۹۸۹۹}_{B}\underbrace{۱۰۰۱۰۱\ldots z}_{C}$$

۹ رقم در $A$ و $۹۰ \times ۲$ رقم در $B$ وجود دارد، بنابراین $۱۹۸۳ - ۱۸۹$ رقم در $C$ وجود دارد که برابر است با ۱۷۹۴ رقم. اگر ۱۷۹۴ را بر ۳ تقسیم کنیم خارج‌قسمت ۵۹۸ و باقیمانده ۰ می‌شود.

بنابراین $C$ از نخستین ۵۹۸ عدد سه‌رقمی تشکیل شده است. چون نخستین عدد سه‌رقمی ۱۰۰ است (نه ۱۰۱ یا ۰۰۱)، پس ۵۹۸امین عدد سه‌رقمی ۹۹ + ۵۹۸ یا ۶۹۷ است. پس ۷ = $z$.

۶. بیست‌وپنج دانش‌آموز و بیست‌وپنج معلم دور میزی نشسته‌اند. ثابت کنید که می‌توان کسی را پیدا کرد که کنار دستیهایش معلم‌اند.

## راه‌حل اول

فرض کنید که افراد طوری نشسته باشند که هیچ‌یک از آنها بین دو معلم ننشسته است. هر گروهی از معلمان (دانش‌آموزان) را که پهلوبه‌پهلوی هم طوری نشسته‌اند که دو طرفشان دانش‌آموز (معلم) نشسته است قطعه می‌نامیم. بنابر فرضمان، هر قطعه از معلمان حداکثر دو معلم دارد و در فاصلهٔ میان هر دو قطعه از معلمان دست‌کم دو دانش‌آموز نشسته‌اند. بنابراین دست‌کم $\lceil \frac{۲۵}{۲} \rceil$ یا ۱۳ قطعه از معلمان وجود دارد و دست‌کم ۲ × ۱۳ دانش‌آموز در فاصله‌های میان قطعه‌های معلمان نشسته‌اند. اما فقط ۲۵ دانش‌آموز داریم، پس به تناقض رسیده‌ایم. بنابراین فرضمان غلط است و حتماً کسی وجود دارد که بین دو معلم نشسته است.

## راه‌حل دوم

باز هم فرض می‌کنیم که افراد طوری نشسته باشند که هیچ‌یک از آنها بین دو معلم ننشسته است. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که افراد در جهت ساعتگرد به ترتیب در موقعیتهای $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۵۰}$ نشسته‌اند (پس $a_{۵۰}$ کنار $a_۱$ نشسته است). اکنون این افراد را دور دو میز در جهت ساعتگرد به ترتیب $(a_۱, a_۳, a_۵, \dots, a_{۴۹})$ و $(a_۲, a_۴, a_۶, \dots, a_{۵۰})$ می‌نشانیم. در این صورت، بنابر فرضمان، هیچ دو معلمی دور این دو میز کنار هم ننشسته‌اند. پس دور هر یک از این دو میز حداکثر ۱۲ معلم نشسته‌اند و درنتیجه حداکثر ۲۴ معلم داریم، که تناقض است. بنابراین فرضمان غلط است و حتماً کسی وجود دارد که بین دو معلم نشسته است.

۷. در پایان یک دوره مسابقات قهرمانی بولینگ، پنج نفر اول به‌طور حذفی مسابقه می‌دهند. ابتدا نفر پنجم با نفر چهارم مسابقه می‌دهد. بازنده جایزهٔ پنجم را می‌گیرد و برنده با نفر سوم مسابقه می‌دهد. بازندهٔ این مسابقه جایزهٔ چهارم را می‌گیرد و برندهٔ آن با نفر دوم مسابقه می‌دهد. بازندهٔ این مسابقه جایزهٔ سوم را می‌گیرد و برندهٔ آن با نفر اول مسابقه می‌دهد. برندهٔ این بازی جایزهٔ اول را می‌گیرد و بازندهٔ آن جایزهٔ دوم را می‌گیرد. به چند ترتیب نفرات اول تا پنجم می‌توانند جایزه‌ها را تصاحب کنند؟ (آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۸)

## راه‌حل

برای اینکه برندهٔ جایزه‌های اول تا پنجم مشخص شود باید چهار بازی انجام شود و هر بازی دوجور

نتیجه ممکن است داشته باشد. نحوهٔ اهدای جایزه‌ها به‌ازای هر دو دنبالهٔ چهارتایی متمایز از نتیجه‌ها فرق می‌کند. بنابراین $۲^۴$ یا ۱۶ ترتیب مختلف برای اهدای جایزه‌ها وجود دارد.

۸. عنکبوت به هر پایش یک جوراب و یک کفش می‌کند. اگر قرار باشد که ابتدا جوراب پوشیده شود بعد کفش، عنکبوت به چند طریق مختلف می‌تواند جورابها و کفشهایش را به پا کند؟
(مسابقهٔ ریاضی امریکا_۱۲، ۲۰۰۱)

## راه‌حل

پاهای عنکبوت را از ۱ تا ۸ شماره‌گذاری کنید و فرض کنید $a_k$ و $b_k$ جوراب و کفشی باشند که باید به پای شمارهٔ $k$ بروند. هر ترتیب ممکن از جورابها و کفشها جایگشتی از شانزده نماد $a_۱$، $b_۱$، ...، $a_۸$ و $b_۸$ است، که در آن، به‌ازای $۱ \leq k \leq ۸$، $a_k$ پیش از $b_k$ آمده است. تعداد جایگشتهای این ۱۶ نماد برابر با !۱۶ است، که در نیمی از آنها، یعنی در $\frac{۱۶!}{۲}$تا از آنها، $a_۱$ پیش از $b_۱$ آمده است. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که در نیمی از اینها، یعنی در $\frac{۱۶!}{۲^۲}$تا از آنها، $a_۲$ پیش از $b_۲$ آمده است. اگر به‌همین ترتیب استدلال را ادامه دهیم نتیجه می‌گیریم که در $\frac{۱۶!}{۲^۸}$ جایگشت، به‌ازای $۱ \leq k \leq ۸$، $a_k$ پیش از $b_k$ آمده است.

۹. درکشویی که در اتاقی تاریک قرار دارد ۱۰۰ جوراب قرمز، ۸۰ جوراب سبز، ۶۰ جوراب آبی و ۴۰ جوراب مشکی وجود دارد. پسربچه‌ای هر بار یک جوراب از این کشو انتخاب می‌کند، اما نمی‌تواند رنگ جورابی را که بیرون آورده است ببیند. کمترین تعداد جورابهایی که باید درآورد تا مطمئن شد که در میان جورابهای بیرون آورده شده دست‌کم ۱۰ جفت جوراب وجود دارد چندتاست؟ (هر جفت جوراب، دو جوراب یکرنگ است. هیچ جورابی را نمی‌توان در بیش از یک جفت شمرد.)
(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۶)

## راه‌حل اول

در هر انتخابی از جورابها حداکثر یک جوراب از هر رنگ بی‌لنگه باقی می‌ماند، و این وضعیت وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که تعداد فردی جوراب از یک رنگ انتخاب شده باشند. بنابراین، برای برآورده شدن منظور ما، انتخاب ۲۴ جوراب کافی است، زیرا حداکثر ۴ جوراب بی‌لنگه می‌مانند و دست‌کم ۲۰ جوراب جفت انتخاب شده‌اند. با این وجود، انتخاب ۲۳ جوراب هم منظور ما را برآورده می‌کند! چون ۲۳ برابر با مجموع چهار عدد فرد نیست، حداکثر ۳ جوراب از ۲۳ جوراب انتخاب شده بی‌لنگه می‌مانند. از طرف دیگر، انتخاب ۲۲ جوراب منظور ما را برآورده نمی‌کند، زیرا اگر تعداد جورابهای قرمز، سبز، آبی و سیاه ۵، ۵، ۵ و ۷ باشد، ۴تا از آنها بی‌لنگه می‌مانند و درنتیجه ۹ جفت جوراب داریم. بنابراین ۲۳ کمترین تعداد جورابهایی است که باید انتخاب کرد.

**راه‌حل دوم**

استقرایی عمل می‌کنیم. اگر یک جفت جوراب بخواهیم، کافی است ۵ جوراب انتخاب کنیم. علاوه بر این، اگر ۴ جوراب انتخاب کنیم مطمئن نیستیم که یک جفت جوراب داشته باشیم، زیرا ممکن است از هر رنگ یک جوراب انتخاب کرده باشیم.

اگر دو جفت جوراب بخواهیم، کافی است ۷ جوراب انتخاب کنیم: در میان هر ۷ جوراب حتماً یک جفت جوراب وجود دارد؛ اگر این جفت را کنار بگذاریم، همان‌طور که در بالا گفتیم، در میان ۵ جوراب باقی‌مانده جفت دیگری وجود دارد. از طرف دیگر، اگر ۶ جوراب انتخاب کرده باشیم، ممکن است سه جوراب سبز، ۱ جوراب سیاه، ۱ جوراب قرمز و ۱ جوراب آبی انتخاب کرده باشیم و درنتیجه فقط یک جفت داشته باشیم. بنابراین کمترین تعداد جورابهایی که باید انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم دو جفت جوراب داریم ۷تاست.

از همین روش استدلال معلوم می‌شود که باید ۹ جوراب بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم که ۳ جفت جوراب داریم و در حالت کلی، باید $2p + 3$ جوراب بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم که $p$ جفت جوراب داریم. به‌سادگی می‌توان این مطلب را به استقرای ریاضی ثابت کرد. بنابراین باید ۲۳ جوراب بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم که ۱۰ جفت جوراب داریم.

۱۰. عددی گویا مفروض است. این عدد را به شکل کسری ساده‌نشدنی بنویسید و حاصل‌ضرب صورت و مخرج آن را حساب کنید. به‌ازای چندتا از عددهای گویا میان ۰ و ۱ این حاصل‌ضرب برابر با $20!$ است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۱)

**راه‌حل**

برای اینکه کسری ساده‌نشدنی باشد، باید صورت و مخرج آن نسبت به هم اول باشند. بنابراین هیچ مقسوم‌علیه اولی از صورت نباید مقسوم‌علیه اولی از مخرج هم باشد، و برعکس. $20!$ هشت مقسوم‌علیه اول دارد، که عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹. باید تصمیم بگیریم که هریک از این مقسوم‌علیه‌های اول در صورت بیاید یا در مخرج. به $2^8$ طریق می‌توان این کار را کرد. اما همهٔ این ۲۵۶ کسر از ۱ کوچکتر نیستند. درحقیقت، می‌توان این کسرها را به ۱۲۸ جفت که وارون یکدیگرند تقسیم کرد که هر کدام دقیقاً یک کسر کوچکتر از ۱ دارد. بنابراین تعداد عددهای گویا که ویژگیهای موردنظر را دارند برابر با ۱۲۸ است.

۱۱. به چند طریق می‌توان پنج عدد از میان نخستین هجده عدد طبیعی طوری انتخاب کرد که تفاضل هر دوتا از عددهای انتخاب‌شده دست‌کم ۲ باشد؟

**راه‌حل**

فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$ و $a_۵$ پنج عدد انتخاب شده باشند و

$$a_۱ < a_۲ < a_۳ < a_۴ < a_۵$$

فرض کنید

$$(b_۱, b_۲, b_۳, b_۴, b_۵) = (a_۱, a_۲ - ۱, a_۳ - ۲, a_۴ - ۳, a_۵ - ۴)$$

در این صورت $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$، $b_۴$ و $b_۵$ پنج عدد متمایز از نخستین چهارده عدد طبیعی‌اند. برعکس، از هر پنج عدد متمایز مانند $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$، $b_۴$ و $b_۵$ که

$$b_۱ < b_۲ < b_۳ < b_۴ < b_۵$$

اگر فرض کنیم

$$(a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵) = (b_۱, b_۲ + ۱, b_۳ + ۲, b_۴ + ۳, b_۵ + ۴)$$

می‌توانیم پنج عدد به‌دست بیاوریم که ویژگیهای موردنظر را داشته باشند. بنابراین نگاشتی یک‌به‌یک میان مجموعهٔ پنج‌تاییهایی که ویژگیهای موردنظر را دارند و مجموعهٔ پنج‌تاییهای متمایز از نخستین چهارده عدد طبیعی یافته‌ایم. بنابراین جواب مسأله $\binom{۱۴}{۵}$ است که برابر است با ۲۰۰۲.

۱۲. در اتاقی $N$ نفر حاضرند، $N > ۳$، و دست‌کم یکی از این افراد با هیچ کسی در این اتاق دست نداده است. حداکثر چند نفر از افراد حاضر در این اتاق با همهٔ افراد دیگر دست داده‌اند؟
(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۸)

**راه‌حل**

افراد را با $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_N$ طوری برچسب بزنید که $A_۱$ و $A_۲$ زوجی باشند که با هم دست نداده‌اند. ممکن است که هر دو نفر دیگری از این افراد با هم دست داده باشند و فقط $A_۱$ و $A_۲$ با بقیه دست نداده باشند. بنابراین، حداکثر $N - ۲$ نفر با بقیهٔ افراد دست داده‌اند.

۱۳. تعداد چهارتاییهای مرتب از عددهای طبیعی فرد مانند $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ را پیدا کنید که

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۹۸$$

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۸)

**راه‌حل**

هر $x_i$ را می‌توان با $۲y_i - ۱$ جایگزین کرد، که در اینجا $y_i$ عددی طبیعی است. چون

$$۹۸ = \sum_{i=۱}^{۴}(۲y_i - ۱) = ۲\left(\sum_{i=۱}^{۴} y_i\right) - ۴$$

پس

$$۵۱ = \sum_{i=۱}^{۴} y_i$$

هر چهارتایی مانند $(y_۱, y_۲, y_۳, y_۴)$ به‌طور یک‌به‌یک به ردیفی از ۵۱ رقم یک که با درج کردن سه رقم صفر به چهارگروه تقسیم شده است متناظر است. مثلاً (۱۸, ۱۱, ۵, ۱۷) متناظر با

۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱۰۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱

است. $\binom{۵۰}{۳}$ راه برای درج سه رقم صفر در پنجاه فضای خالی میان رقمهای یک مجاور وجود دارد.

۱۴. تعدادی متناهی کارت را به دو دسته تقسیم کرده‌ایم و تعداد کارتهای دستهٔ سمت چپ از تعداد کارتهای دستهٔ سمت راست بیشتر است. روی هر کارت یک اسم یا چند اسم متمایز نوشته‌ایم و ممکن است اسمی روی چند کارت مختلف نوشته شده باشد. بُر زدن هر نام یعنی اینکه هر کارتی را که این نام روی آن نوشته شده است به دستهٔ مقابل منتقل کنیم. ثابت کنید همواره می‌توانیم چند نام مختلف را طوری انتخاب کنیم که با بُر زدن تک‌تک این نامها، درنهایت تعداد کارتهای دستهٔ سمت راست بیشتر شده باشد.

(اتحاد جماهیر شوروی، ۱۹۶۸)

**راه‌حل** (از اواز نیر)

حکم را به استقرا روی $n$، تعداد نامهای متمایز نوشته شده روی کارتها، ثابت می‌کنیم. دستهٔ سمت چپ را $L$ و دستهٔ سمت راست را $R$ بنامید. در حالتی که $n = ۱$، با یک بار بُر زدن کار تمام می‌شود.

اکنون فرض کنید که حکم را در مورد $n$ نام (به‌ازای عددی طبیعی مانند $n$) ثابت کرده‌ایم و حالتی را در نظر بگیرید که $n + ۱$ نام داریم. فرض کنید $n$ نام اول $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_n$ باشند و نام جدید $a$ باشد. دو حالت وجود دارد.

**حالت ۱.** تعداد کارتهای در $L$ که فقط نام $a$ روی آنها نوشته شده است از تعداد کارتهای در $R$ که فقط نام $a$ روی آنها نوشته شده است کمتر یا با آن برابر است. می‌توانیم نام $a$ را حذف کنیم و از فرض استقرا استفاده کنیم و با استفاده از زیرمجموعه‌ای از $n$ نام $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_n$ بُر زدن موردنظر را انجام دهیم و به حکم موردنظر برسیم: در این صورت تعداد کارتهای باقی‌مانده در $R$ بیشتر از $L$ است و چون در $R$ تعداد کارتهایی که فقط نام $a$ روی آنها نوشته شده است دست‌کم به‌اندازهٔ تعداد همین نوع کارتها در $L$ است، درنهایت تعداد کارتهای $R$ از تعداد کارتهای $L$ بیشتر است.

**حالت ۲.** تعداد کارتهای در $L$ که فقط نام $a$ روی آنها نوشته شده است از تعداد کارتهای در $R$ که فقط نام $a$ روی آنها نوشته شده است بیشتر است. در این صورت یک بار نام $a$ را بُر می‌زنیم و به ابتدای حالت ۱ می‌رسیم، پس حکم درست است.

در هر حالت گام استقرایی خاتمه می‌یابد و اثباتمان کامل شده است.

۱۵. در چند جفت از عددهای متوالی از مجموعهٔ

$$\{۱۰۰۰, ۱۰۰۱, ۱۰۰۲, \ldots, ۲۰۰۰\}$$

وقتی عددها را با هم جمع می‌کنیم انتقالی نداریم؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۲)

**راه‌حل**

فرض کنید نمایش اعشاری عدد $n$، $۱abc$ باشد. اگر یکی از $a$، $b$ یا $c$ برابر با ۵، ۶، ۷ یا ۸ باشد، وقتی $n$ و $n+۱$ را با هم جمع می‌کنیم انتقالی داریم. اگر $b=۹$ و $c \neq ۹$، یا اگر $a=۹$ و یا $b \neq ۹$ یا $c \neq ۹$، باز هم وقتی که $n$ و $n+۱$ را با هم جمع می‌کنیم انتقالی داریم.

اگر $n$ هیچ‌یک از عددهایی که در بالا گفتیم نباشد، به یکی از شکلهای

$$۱abc, \qquad ۱ab۹, \qquad ۱a۹۹, \qquad ۱۹۹۹$$

است، که در آنها $a, b, c \in \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}$. به‌ازای چنین $n$ای، وقتی که $n$ و $n+۱$ را با هم جمع می‌کنیم انتقالی نداریم. تعداد چنین $n$هایی $۱ + ۵ + ۵^۲ + ۵^۳$ است که برابر است با ۱۵۶.

۱۶. شش دانش‌آموز و پروفسور آلفا، پروفسور بتا و پروفسور گاما باید روی نه صندلی که در یک ردیف چیده شده‌اند بنشینند. پروفسورها پیش از شش دانش‌آموز رسیده‌اند و تصمیم گرفته‌اند که صندلیهایشان را طوری انتخاب کنند که هر یک از آنها در میان دو دانش‌آموز قرار داشته باشد. به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند؟

(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۹۴)

**راه‌حل اول**

روی دو صندلیِ دو سر ردیف صندلیها باید دانش‌آموز بنشیند، پس پروفسورها باید صندلی خود را از میان هفت صندلی وسط طوری انتخاب کنند که صندلیهایشان مجاور نباشد. اگر این صندلیها را از ۲ تا ۸ شماره بگذاریم، می‌توان صندلیهای زیر را انتخاب کرد:

$$(۲,۴,۶), \quad (۲,۴,۷), \quad (۲,۴,۸), \quad (۲,۵,۷), \quad (۲,۵,۸)$$
$$(۲,۶,۸), \quad (۳,۵,۷), \quad (۳,۵,۸), \quad (۳,۶,۸), \quad (۴,۶,۸)$$

پروفسورها می‌توانند در هر یک از این سه‌تاییها به !۳ بنشینند، پس تعداد کل راههای موردنظر برابر است با $۶ \times ۱۰$ یا ۶۰.

### راه‌حل دوم

فرض کنید شش دانش‌آموز پیش از نشستن در یک ردیف بایستند. پنج جای خالی میان آنها وجود دارد که در هر یک از آنها حداکثر یکی از سه پروفسور ممکن است قرار بگیرد. بنابراین $P(۵,۳)$ راه برای اینکه پروفسورها جای خود را انتخاب کنند وجود دارد و

$$P(۵,۳) = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

**۱۷.** ثابت کنید در میان هر ۱۶ عدد طبیعی متمایز که از ۱۰۰ بیشتر نیستند چهار عدد متمایز مانند $a$، $b$، $c$ و $d$ وجود دارد که $a+b=c+d$.

### راه‌حل

فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_{۱۶}$ این ۱۶ عدد باشند و

$$a_۱ < a_۲ < \cdots < a_{۱۶}$$

تفاضل هر جفت از این عددها را در نظر بگیرید. تعداد این جفتها $\binom{۱۶}{۲}$ است که برابر است با ۱۲۰.

هر جفت از عددها را به شکل $(a_i, a_j)$ نشان می‌دهیم که در آن $a_i > a_j$. اگر دو جفت متمایز مانند $(a_{i_۱}, a_{i_۲})$ $(a_{i_۳}, a_{i_۴})$ داشته باشیم که $a_{i_۱} - a_{i_۲} = a_{i_۳} - a_{i_۴}$، اگر فرض کنیم

$$(a,b,c,d) = (a_{i_۱}, a_{i_۴}, a_{i_۲}, a_{i_۳})$$

بجز وقتی که $a_{i_۲} = a_{i_۳}$، چهارتایی $(a,b,c,d)$ ویژگی موردنظر را دارد. می‌گوییم عدد $a$ برای دو جفت $(a_{i_۱}, a)$ و $(a, a_{i_۲})$ نامناسب است هرگاه $a_{i_۱} - a = a - a_{i_۲}$ (یا $۲a = a_{i_۱} + a_{i_۲}$). توجه کنید که اگر عددی مانند $a$ برای دو جفت از جفت عددها نامناسب باشد، حکم را ثابت کرده‌ایم. درحقیقت، اگر $a$ برای $(a_{i_۱}, a)$ و $(a, a_{i_۲})$ و نیز برای $(a_{i_۳}, a)$ و $(a, a_{i_۴})$ نامناسب باشد، آن‌وقت

$$a_{i_۱} + a_{i_۲} = ۲a = a_{i_۳} + a_{i_۴}$$

سرانجام، فرض کنید هر یک از $a_i$ها حداکثر برای یک جفت از جفت عددها نامناسب باشد. در مورد هر جفت از چنین عددهایی یک جفت را کنار می‌گذاریم. بنابراین، دیگر عددی نامناسب نداریم. البته هنوز دست‌کم ۱۶ − ۱۲۰ یا ۱۰۴ جفت از عددها باقی مانده‌اند. تفاضل عددهای هر یک از جفتهای باقی‌مانده عددی از ۱ تا ۹۹ است. بنابر اصل لانه کبوتری، مقدار برخی از این تفاضلها با هم برابر است. اگر فرض کنیم $a_{i_۱} - a_{i_۲} = a_{i_۳} - a_{i_۴}$، چهارتایی $(a_{i_۱}, a_{i_۲}, a_{i_۳}, a_{i_۴})$ ویژگی موردنظر را دارد.

**۱۸.** پسربچه‌ای ۹۶ مهرهٔ متمایز دارد. جنس هر مهره یا پلاستیک است یا چوب، اندازهٔ هر مهره یا کوچک است یا متوسط یا بزرگ، رنگ هر مهره یا آبی است یا سبز یا قرمز یا زرد و شکل هر مهره

یا دایره است یا شش‌ضلعی یا مربع یا مثلث. چندتا از این مهره‌ها با مهرهٔ «پلاستیکی متوسط قرمز دایره‌ای» دقیقاً در دو مشخصه فرق دارند؟ (مهرهٔ «چوبی متوسط قرمز مربعی» یکی از این مهره‌هاست.)

(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۹)

**راه‌حل**

برای اینکه مهره‌ای با مهرهٔ موردنظر فرق کند در مورد جنس مهره ۱ انتخاب، در مورد اندازهٔ مهره ۲ انتخاب، در مورد رنگ مهره ۳ انتخاب و در مورد شکل مهره ۳ انتخاب داریم. $\binom{۴}{۲}$ حالت برای اینکه مهره‌ای با مهرهٔ موردنظر دقیقاً در دو مشخصه فرق داشته باشد وجود دارد:

۱. جنس و اندازه: ۲ × ۱ مهرهٔ متفاوت.
۲. جنس و رنگ: ۳ × ۱ مهرهٔ متفاوت.
۳. جنس و شکل: ۳ × ۱ مهرهٔ متفاوت.
۴. اندازه و رنگ: ۳ × ۲ مهرهٔ متفاوت.
۵. اندازه و شکل: ۳ × ۲ مهرهٔ متفاوت.
۶. رنگ و شکل: ۳ × ۳ مهرهٔ متفاوت.

بنابراین

$$۲ + ۳ + ۳ + ۶ + ۶ + ۹$$

یا ۲۹ مهره با مهرهٔ موردنظر در دقیقاً دو مشخصه فرق دارند.

۱۹. شمارهٔ تلفن هفت‌رقمی $d_۱d_۲d_۳ - d_۴d_۵d_۶d_۷$ را به‌یادماندنی بنامید، هرگاه دنبالهٔ پیش‌شمارهٔ آن، یعنی $d_۱d_۲d_۳$، با دنبالهٔ $d_۴d_۵d_۶$ یا دنبالهٔ $d_۵d_۶d_۷$ (یا هر دو آنها) یکسان باشد. با فرض اینکه هر یک از $d_i$ها ممکن است یکی از ده رقم اعشاری ۰، ۱، ۲، ... و ۹ باشد، تعداد شمارهٔ تلفنهای به‌یادماندنی متمایز را پیدا کنید.

(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۹۸)

**راه‌حل اول**

۱۰۰۰۰ راه برای نوشتن چهار رقم آخر، یعنی $d_۴d_۵d_۶d_۷$، وجود دارد و در میان اینها ۱۰ − ۱۰۰۰۰ یا ۹۹۹۰ تا دست‌کم دو رقم متمایز دارند. در مورد هر یک از اینها دقیقاً دو راه وجود دارد که می‌توان سه رقم $d_۱d_۲d_۳$ را طوری نوشت که شمارهٔ به‌دست آمده به‌یادماندنی شود. ده شمارهٔ به‌یادماندنی وجود دارد که چهار رقم آخرشان یکسان است، پس درکل ۱۰ + ۹۹۹۰ × ۲ یا ۱۹۹۹۰ شمارهٔ تلفن به‌یادماندنی وجود دارد.

### راه‌حل دوم

فرض کنید $A$ مجموعهٔ شمارهٔ تلفنهایی باشد که در آنها $d_۱d_۲d_۳$ با $d_۴d_۵d_۶$ یکسان است و $B$ مجموعهٔ شمارهٔ تلفنهایی باشد که در آنها $d_۱d_۲d_۳$ بر $d_۵d_۶d_۷$ منطبق است. شمارهٔ تلفنی مانند $d_۱d_۲d_۳ - d_۴d_۵d_۶d_۷$ وقتی و فقط وقتی عضو $A \cap B$ است که

$$d_۱ = d_۴ = d_۵ = d_۲ = d_۶ = d_۳ = d_۷$$

بنابراین $|A \cap B| = ۱۰$. به این ترتیب، بنابر اصل شمول و عدم شمول،

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= ۱۰^۳ \times ۱ \times ۱۰ + ۱۰^۳ \times ۱۰ \times ۱ - ۱۰ = ۱۹۹۹۰\end{aligned}$$

**۲۰.** دوتا از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی $۷ \times ۷$ را زرد و بقیه را سبز می‌کنیم. دو رنگ‌آمیزی را هم‌ارز می‌نامیم اگر بتوان یکی را با دوران صفحهٔ شطرنج از دیگری به‌دست آورد. چند رنگ‌آمیزی غیرهم‌ارز می‌توان به‌دست آورد؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۶)

### راه‌حل

$\binom{۴۹}{۲}$ راه برای انتخاب خانه‌های زرد وجود دارد که برابر است با ۱۱۷۶. چون می‌توان صفحه را یک‌چهارم دور چرخاند، تعداد رنگ‌آمیزیهای غیرهم‌ارز از ۱۱۷۶ کمتر است. رنگ‌آمیزیهایی که در آنها دو خانهٔ زردرنگ متقاطر نیستند چهار رنگ‌آمیزی هم‌ارز به‌وجود می‌آورند. رنگ‌آمیزیهایی که در آنها دو خانهٔ زردرنگ متقاطرند دو رنگ‌آمیزی هم‌ارز به‌وجود می‌آورند و $\frac{۴۹ - ۱}{۲}$ یا ۲۴ جفت از این خانه‌های زردرنگ وجود دارد. بنابراین تعداد رنگ‌آمیزیهای غیرهم‌ارز برابر است با

$$\frac{۱۱۷۶ - ۲۴}{۴} + \frac{۲۴}{۲} = ۳۰۰$$

**۲۱.** به چند طریق می‌توان عددهای ۲۱، ۳۱، ۴۱، ۵۱، ۶۱، ۷۱ و ۸۱ را طوری مرتب کرد که مجموع هر چهار عدد متوالی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

(لیگ منطقه‌ای ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

### راه‌حل

چون فقط لازم است عددها را به‌پیمانهٔ ۳ در نظر بگیریم، عددهای ۲۱، ۳۱، ۴۱، ۵۱، ۶۱، ۷۱ و ۸۱ را ۰، ۱، ۲، ۰، ۱، ۲ و ۰ در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_۷$$

یکی از آرایشهای موردنظر باشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned} ۰ &\equiv (a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴) + (a_۴ + a_۵ + a_۶ + a_۷) \\ &\equiv (a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۷) + a_۴ \\ &\equiv (۰ + ۱ + ۲ + ۰ + ۱ + ۲ + ۰) + a_۴ \\ &\equiv a_۴ \ (\text{به‌پیمانهٔ ۳}) \end{aligned}$$

بنابراین $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ باید جایگشتی از ۰، ۱ و ۲ باشند، زیرا

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ \equiv a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ ۳})$$

چون

$$a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ \equiv a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ ۳})$$

پس (به‌پیمانهٔ ۳) $a_۵ \equiv a_۱$. به‌همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که ترتیب $a_۵$، $a_۶$ و $a_۷$ به‌طور یکتا براساس $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ معلوم می‌شود. بنابراین تعداد آرایشهای موردنظر برابر است با $۳! \times ۲^۳ \times ۳$ یا ۱۴۴.

**۲۲.** فرض کنید $S$ مجموعه‌ای شش‌عضوی باشد. به چند طریق مختلف می‌توان دو زیرمجموعه از $S$ را که لزوماً متمایز نیستند طوری انتخاب کرد که اجتماع این دو زیرمجموعه برابر با $S$ باشد؟ ترتیب انتخاب مهم نیست؛ مثلاً، انتخاب دو زیرمجموعهٔ $\{a, c\}$ و $\{b, c, d, e, f\}$ با انتخاب دو زیرمجموعهٔ $\{b, c, d, e, f\}$ و $\{a, c\}$ فرقی ندارد.

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۳)

**راه‌حل**

برای اینکه $A \cup B = S$، به‌ازای هر عضو $S$ مانند $s$ باید دقیقاً یکی از حکمهای زیر درست باشد:

$$s \in A, \quad s \notin B$$

$$s \in A, \quad s \in B$$

$$s \notin A, \quad s \in B$$

بنابراین اگر $S$، $n$عضوی باشد، $۳^n$ راه برای انتخاب $A$ و $B$ وجود دارد. بجز در جفتهایی که در آنها $A = B$، در این روش هر جفت از مجموعه‌ها را دو بار شمرده‌ایم. چون $A \cup B = S$ و $A = B$ وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که $A = B = S$، تعداد جفتهایی از زیرمجموعه‌های $S$ که اجتماعشان برابر با $S$ است برابر است با

$$\frac{۳^n - ۱}{۲} + ۱$$

که وقتی $n = ۶$ برابر است با ۳۶۵.

**۲۳.** مجموعه‌ای از عددهای مثبت مثلثی است، هرگاه سه عضو متمایز داشته باشد که سه ضلع مثلثی با مساحت مثبت باشند. مجموعه‌هایی مانند $\{۴, ۵, ۶, \ldots, n\}$ از عددهای طبیعی متوالی را در نظر بگیرید که همهٔ زیرمجموعه‌های ده‌عضوی آنها مثلثی‌اند. بیشترین مقدار ممکن $n$ چقدر است؟ (آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۲۰۰۱)

راه‌حل

مجموعهٔ $\{۴, ۵, ۹, ۱۴, ۲۳, ۳۷, ۶۰, ۹۷, ۱۵۷, ۲۵۴\}$ زیرمجموعه‌ای ده‌عضوی از مجموعهٔ $\{۴, ۵, ۶, \ldots, ۲۵۴\}$ است که مثلثی نیست. فرض کنید $N$ کوچکترین عدد صحیحی باشد که مجموعهٔ $\{۴, ۵, ۶, \ldots, N\}$ زیرمجموعه‌ای ده‌عضوی دارد که مثلثی نیست. فرض کنید $\{a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_{۱۰}\}$ چنین زیرمجموعه‌ای باشد و

$$a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots < a_{۱۰}$$

چون هیچ‌یک از زیرمجموعه‌های سه‌عضوی این مجموعه طول ضلعهای هیچ مثلثی نیستند، باید

$$\begin{aligned} N &\geq a_{۱۰} \geq a_۹ + a_۸ \geq (a_۸ + a_۷) + a_۸ \\ &= ۲a_۸ + a_۷ \geq ۲(a_۷ + a_۶) + a_۷ = ۳a_۷ + ۲a_۶ \\ &\geq ۳(a_۶ + a_۵) + ۲a_۶ = ۵a_۶ + ۳a_۵ \geq ۸a_۵ + ۵a_۴ \\ &\geq ۱۳a_۴ + ۸a_۳ \geq ۲۱a_۳ + ۱۳a_۲ \geq ۳۴a_۲ + ۲۱a_۱ \\ &\geq ۳۴ \times ۵ + ۲۱ \times ۴ = ۲۵۴ \end{aligned}$$

بنابراین $N = ۲۵۴$ و بیشترین مقدار $n$ برابر است با $N - ۱$ یا ۲۵۳.

**۲۴.** $A$ و $B$ دو مجموعهٔ جدا از هم‌اند که اجتماعشان مجموعهٔ عددهای طبیعی است. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $n$، عددهایی متمایز مانند $a$ و $b$ وجود دارند که $a, b > n$ و یا $\{a, b, a+b\} \subseteq A$ یا $\{a, b, a+b\} \subseteq B$.

(دورهٔ تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۷)

راه‌حل

عددهای $a$ و $b$ را طوری پیدا می‌کنیم که $a, b > n$ و $a + b$ در همان مجموعه‌ای باشد که $a$ و $b$ هستند. ابتدا فرض کنید که $|A|$ متناهی و $m$ بزرگترین عضو آن باشد. در این صورت به‌ازای هر $n$ که $n \geq m$، $n + ۱$، $n + ۲$ و $۲n + ۳$ همگی در $B$ هستند، زیرا

$$۲n + ۳ = (n + ۱) + (n + ۲)$$

درنتیجه، فرض می‌کنیم که $A$ و $B$ هر دو نامتناهی باشند.

از استدلال غیرمستقیم استفاده می‌کنیم. فرض کنید عددی طبیعی مانند $n$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $a$ و هر $b$ که $a, b > n$،

$$\{a, b, a+b\} \not\subset A, \qquad \{a, b, a+b\} \not\subset B$$

اکنون $x$، $y$ و $z$ را در $A$ طوری انتخاب کنید که

$$x > y > z > n, \qquad y - z > n$$

چون $A$ نامتناهی و درنتیجه بی‌کران است می‌توان این کار را انجام داد. در این صورت

$$\{x+y, y+z, z+x\} \subset B$$

اما به این ترتیب $y - z$ بدون جا می‌ماند. پس فرضمان غلط است و حکم را ثابت کرده‌ایم.

**۲۵.** دنبالهٔ صعودی

$$۱, ۳, ۴, ۹, ۱۰, ۱۲, ۱۳, \ldots$$

از همهٔ عددهای طبیعی تشکیل شده است که توان ۳اند یا مجموع توانهای متمایز ۳اند. جملهٔ ۱۰۰ام این دنباله را پیدا کنید (۱ جملهٔ اول است، ۳ جملهٔ دوم است و همین‌طور در مورد بقیه).
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۶)

### راه‌حل اول

اگر فقط از نخستین شش توان ۳ که نماهایشان عددهایی صحیح و غیرمنفی‌اند، یعنی از ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۸۱ و ۲۴۳، استفاده کنیم فقط می‌توانیم ۶۳ جمله را بنویسیم، زیرا

$$\binom{۶}{۱} + \binom{۶}{۲} + \cdots + \binom{۶}{۶} = ۲^{۶} - ۱ = ۶۳$$

درنتیجه، به توان بعدی ۳، یعنی ۷۲۹، هم احتیاج داریم.

پس از ۶۳ جملهٔ اول دنبالهٔ موردنظر، جمله‌های بعدی باید یکی از جمعوندهایشان ۷۲۹ باشد و جمعوند ۲۴۳ نداشته باشند. ۳۲تا از این جمله‌ها وجود دارد، زیرا

$$\binom{۵}{۰} + \binom{۵}{۱} + \cdots + \binom{۵}{۵} = ۳۲$$

که تعداد جمله‌ها را به ۹۵ می‌رساند. چون جملهٔ ۱۰۰ام را می‌خواهیم، باید ۲۴۳ را حساب کنیم و ۸۱ را حذف کنیم. با این کار معلوم می‌شود که جمله‌های ۹۶ام، ۹۷ام، ... و ۱۰۰ام $۲۴۳ + ۷۲۹$، $۱ + ۲۴۳ + ۷۲۹$، $۳ + ۲۴۳ + ۷۲۹$، $۱ + ۳ + ۲۴۳ + ۷۲۹$ و $۹ + ۲۴۳ + ۷۲۹$ هستند.
پس جملهٔ ۱۰۰ام ۹۸۱ است.

**راه‌حل دوم**

توجه کنید که عددی طبیعی وقتی و فقط وقتی عضوی از این دنباله است که بسط آن در مبنای ۳ فقط از رقمهای ۰ و ۱ تشکیل شده باشد. بنابراین می‌توانیم تناظری یک‌به‌یک میان عددهای طبیعی و عضوهای این دنباله برقرار کنیم، به این ترتیب که هر دو را با رقمهای دودویی (۱, ۰) نمایش دهیم، ابتدا در مبنای ۲ و سپس در مبنای ۳:

$$\begin{aligned}
۱ &= ۱_{(۲)} &\Leftrightarrow\quad ۱_{(۳)} &= ۱\\
۲ &= ۱۰_{(۲)} &\Leftrightarrow\quad ۱۰_{(۳)} &= ۳\\
۳ &= ۱۱_{(۲)} &\Leftrightarrow\quad ۱۱_{(۳)} &= ۴\\
۴ &= ۱۰۰_{(۲)} &\Leftrightarrow\quad ۱۰۰_{(۳)} &= ۹\\
۵ &= ۱۰۱_{(۲)} &\Leftrightarrow\quad ۱۰۱_{(۳)} &= ۱۰\\
&&\vdots&
\end{aligned}$$

به این ترتیب تناظری یک‌به‌یک میان جمله‌های این دو دنباله، که به ترتیب مفروض قرار گرفته‌اند، برقرار کرده‌ایم، یعنی $k$امین عدد طبیعی نظیر $k$امین مجموع از توانهای متمایز ۳ (به ترتیب صعودی) است. دلیل این مطلب این است که وقتی عددهای دودویی را به ترتیب صعودی می‌نویسیم، وقتی که آنها را در هر مبنای دیگری هم به حساب آوریم باز هم به ترتیب صعودی‌اند. (اگر بتوانید موضوع را وقتی که عددها را در مبنای ۱۰ به حساب می‌آوریم روشن کنید در مورد مبنای ۳ هم می‌توانید.)

بنابراین برای اینکه جملهٔ ۱۰۰ام را پیدا کنیم فقط کافی است سطر ۱۰۰ام تناظر بالا را در نظر بگیریم:

$$۱۰۰ = ۱۱۰۰۱۰۰_{(۲)} \Leftrightarrow ۱۱۰۰۱۰۰_{(۳)} = ۹۸۱$$

**۲۶.** دسته‌ای کارت داریم که روی هر کارت آن یکی از شکلهای دایره، مربع یا مثلث حک شده است و هر یک از این شکلها به یکی از سه رنگ قرمز، آبی یا سبز است. علاوه بر این، سایهٔ هر یک از رنگها یا ملایم است یا متوسط یا سیر. در این دسته ۲۷ کارت وجود دارد و هر ترکیبی از شکل ـ رنگ ـ سایه در آن آمده است. مجموعه‌ای از سه کارت این دسته را متمم می‌نامیم، هرگاه حکمهای زیر هر سه درست باشند:

**الف)** یا شکل هر سه کارت متفاوت باشد یا شکل هر سه کارت یکسان باشد.

**ب)** یا رنگ هر سه کارت متفاوت باشد یا رنگ هر سه کارت یکسان باشد.

**ج)** یا سایهٔ هر سه کارت متفاوت باشد یا سایهٔ هر سه کارت یکسان باشد.

چند مجموعهٔ سه‌کارتی متمم وجود دارد؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۷)

**راه‌حل**

یک جفت کارت دلخواه از این دسته کارت در نظر بگیرید. ثابت می‌کنیم که دقیقاً یک کارت وجود دارد که با این دو کارت مجموعه‌ای متمم تشکیل می‌دهد. اگر شکل کارتهای جفت موردنظر یکسان باشد، شکل کارت سوم هم باید همین شکل باشد و اگر شکل کارتها متفاوت باشد، شکل کارت سوم باید با شکلهای این دو کارت فرق داشته باشد. در هر حالت، شکل کارت سوم به‌طور یکتا معلوم می‌شود. از همین نحوهٔ استدلال معلوم می‌شود که رنگ و سایهٔ کارت سوم هم به‌طور یکتا معلوم می‌شود. کارت سوم، که براساس دو کارت اول مشخص می‌شود، هرگز یکی از دو کارت اول نیست. بنابراین، برای حساب کردن تعداد مجموعه‌های متمم، می‌توانیم تعداد جفت کارتها را حساب کنیم و آن را بر ۳ تقسیم کنیم، زیرا در این روش هر مجموعهٔ متمم سه بار شمرده می‌شود. تعداد مجموعه‌های متمم برابر است با

$$\frac{۱}{۳}\binom{۲۷}{۲} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۲۷ \times ۲۶}{۲} = ۱۱۷$$

**۲۷.** در اردوی ریاضی، هر $m$ دانش‌آموز دقیقاً یک دوست مشترک دارند، $m \geq ۳$. (اگر $A$ دوست $B$ باشد، $B$ هم دوست $A$ است. همچنین، هیچکس دوست خودش نیست.) فرض کنید $P$ بیشترین تعداد دوستان را داشته باشد. این تعداد را مشخص کنید.

(چین، ۱۹۹۰)

**راه‌حل اول**

ابتدا توجه کنید که هر دانش‌آموزی دوستی دارد. فرض کنید دانش‌آموزان $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_k$ دوست یکدیگر باشند، که در اینجا $k$ عددی طبیعی است و $۲ \leq k \leq m$. در این صورت دانش‌آموزی مانند $A_{k+۱}$ وجود دارد که دوست مشترک همهٔ $A_i$ها، $۱ \leq i \leq k$، است. بنابراین می‌توانیم دو دانش‌آموز مانند $A_۱$ و $A_۲$ در نظر بگیریم که دوست یکدیگرند و هر بار یک دانش‌آموز اضافه کنیم تا $m+۱$ دانش‌آموز مانند $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{m+۱}$ به‌دست بیاوریم که دوست یکدیگر باشند.

ادعا می‌کنیم که دانش‌آموز دیگری بجز $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{m+۱}$ در اردو حضور ندارد. فرض کنید دانش‌آموز دیگری مانند $B$ هم در اردو باشد. در این صورت $B$ دوستی دارد. حالتهای زیر را در نظر بگیرید.

**حالت ۱.** اگر $B$ دست‌کم دو دوست در میان دانش‌آموزان $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{m+۱}$ داشته باشد، می‌توانیم بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود فرض کنیم که $A_۱$ و $A_۲$ دوست $B$

هستند. در این صورت $m$ دانش‌آموز $B$، $A_۳$، $A_۴$، ... و $A_{m+۱}$ دو دوست مشترک دارند، یکی $A_۱$ و دیگری $A_۲$، که خلاف فرض مسأله است.

**حالت ۲.** اگر $B$ حداکثر یک دوست در میان دانش‌آموزان $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{m+۱}$ در اردو داشته باشد، می‌توانیم بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود فرض کنیم که $A_۲$، $A_۳$، ... و $A_{m+۱}$ دوست $B$ نیستند. در این صورت $m$ دانش‌آموز $B$، $A_۱$، $A_۳$، ... و $A_m$ دوست مشترکی مانند $C$ دارند که $C$ هیچ‌یک از $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{m+۱}$ نیست. اما چون $m \geq ۳$، دانش‌آموز $C$ دست‌کم دو دوست در میان دانش‌آموزان $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{m+۱}$ دارد. اما بنابر آنچه در حالت ۱ استدلال کردیم چنین چیزی ممکن نیست.

در کل، ثابت کرده‌ایم که در اردوی موردنظر فقط دانش‌آموزان $A_۱$، $A_۲$، ...و $A_{m+۱}$ حضور دارند و همهٔ آنها با یکدیگر دوست‌اند. بنابراین تعداد موردنظر برابر با $m$ است.

### راه‌حل دوم

ابتدا توجه کنید که $P$ باید دست‌کم $m$ دوست داشته باشد، زیرا دوست مشترک هر $m$ دانش‌آموز دست‌کم $m$ دوست دارد (یعنی همین $m$ دانش‌آموز). اکنون ثابت می‌کنیم که ممکن نیست $P$ بیشتر از $m$ دوست داشته باشد. فرض کنید چنین نباشد. فرض کنید $S$ مجموعهٔ دوستان $P$ باشد و $n = |S|$. بنابر فرض $n \geq m + ۱$. ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ $(m - ۱)$عضوی $S$ مانند $S'$، دانش‌آموز یکتایی مانند $Q_{S'}$ در $S$ وجود دارد که دوست مشترک اعضای $S'$ است.

زیرمجموعه‌ای مانند $S'$ در نظر بگیرید. اگر $P$ را به این مجموعه اضافه کنیم، مجموعه‌ای $m$عضوی به‌دست می‌آید و درنتیجه، دانش‌آموز یکتایی مانند $Q$ وجود دارد که دوست $P$ و همهٔ اعضای $S'$ است. ادعا می‌کنیم این $Q$ همان $Q_{S'}$ است که به‌دنبالش می‌گردیم. درحقیقت، $Q \in S$، زیرا بنابر تعریف، $S$ مجموعهٔ همهٔ دوستان $P$ است.

اکنون ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ $(m - ۱)$عضوی $S$ مانند $S_۱$ و $S_۲$، $Q_{S_۱}$ و $Q_{S_۲}$ یکی نیستند. فرض کنید چنین نباشد، یعنی زیرمجموعه‌هایی از $S$ مانند $S_۱$ و $S_۲$ وجود داشته باشند که $Q_{S_۱}$ و $Q_{S_۲}$ یکی هستند. زیرمجموعه‌ای $m$عضوی از $S_۱ \cup S_۲$ انتخاب کنید. در این صورت دانش‌آموزان این مجموعه دو دوست مشترک دارند، یکی $Q_{S_۱}$ و دیگری $P$، که خلاف فرض مسأله است.

درنتیجه، هر زیرمجموعهٔ $(m - ۱)$عضوی مانند $S'$ متناظر با دانش‌آموزی مانند $Q_{S'}$ مختص خودش است. تعداد زیرمجموعه‌های $(m - ۱)$عضوی $S$ برابر است با $\binom{n}{m-۱}$ و چون $n \geq m + ۱$ و $m \geq ۳$،

$$\binom{n}{m - ۱} \geq \binom{n}{۲} > n$$

اما $|S| = n$، پس دوتا از $Q$ها باید یکی باشند، که تناقض است.

**۲۸.** ۷ دانش‌آموز و ۱۳ معلم در یک صف ایستاده‌اند. فرض کنید $A$ تعداد جاهایی در این صف باشد که یک دانش‌آموز و یک معلم کنار هم ایستاده‌اند. مثلاً در صف

$$\text{TSSTTTSTSTTTSTSTTSTT}$$

$A = ۱۲$. میانگین مقادیر $A$ را (وقتی که همهٔ آرایشهای ممکن این ۲۰ نفر را در نظر بگیریم) حساب کنید.

(آزمون ریاضیات دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۹)

### راه‌حل اول

فرض کنید $S^*$ یکی از دانش‌آموزان و $T^*$ یکی از معلمها باشد. به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, ۱۹$، فرض کنید $S_i$ و $T_i$ به ترتیب تعداد جایگشتهایی (از میان همهٔ $۲۰!$ جایگشت ممکن) باشند که در آنها $i$امین نفر و $(i+۱)$امین نفر $S^*$ و $T^*$ یا $T^*$ و $S^*$اند. در این صورت $S_i = T_i = ۱۸!$ و $۱۸!$ تعداد جایگشتهای بقیهٔ افراد است.

به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, ۱۹$، فرض کنید $N_i$ تعداد حالتهایی باشد که یک جفت دانش‌آموز ـ معلم یا معلم ـ دانش‌آموز در مکانهای $i$ام و $(i+۱)$ام ایستاده‌اند. چون ۷ دانش‌آموز و ۱۳ معلم داریم،

$$N_i = ۷ \times ۱۳ \times (S_i + T_i), \qquad i = ۱, ۲, \ldots, ۱۹$$

بنابراین میانگین مقدارهای $S$ برابر است با

$$\frac{N_۱ + N_۲ + \ldots + N_{۱۹}}{۲۰!} = \frac{۱۹(۷ \times ۱۳ \times (۱۸! + ۱۸!))}{۲۰!} = \frac{۹۱}{۱۰}$$

### راه‌حل دوم

در حالت کلی فرض کنید $k$ دانش‌آموز و $n-k$ معلم داریم. به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$، فرض کنید $A_i$ احتمال این باشد که در مکان $(i, i+۱)$ صف یک جفت دانش‌آموز ـ معلم ایستاده باشد. چون یا هیچ جفتی در $(i, i+۱)$ نایستاده‌اند یا یک جفت در این مکان ایستاده‌اند، $A_i$ امید جفتهای ایستاده در این مکان هم هست. بنابر تقارن، همهٔ $A_i$ها برابرند (این مطلب از اینکه استدلال به مقدار $i$ ربطی ندارد هم نتیجه می‌شود). بنابراین میانگین موردنظر برابر با $(n-۱)A_i$ است.

می‌توانیم دانش‌آموزان و نیز معلمها را بدون مشخصاتشان در نظر بگیریم (چرا؟). در این صورت هر جایگشت دنباله‌ای از $k$ تا S و $n-k$ تا T است. برای اینکه در مکان $(i, i+۱)$ یک جفتِ معلم و دانش‌آموز ایستاده باشد باید در این مکان ST یا TS داشته باشیم و در $n-۲$

جای دیگر باید $k - ۱$ دانش‌آموز و $n - k - ۱$ معلم بایستند. بنابراین $۲\binom{n-۲}{k-۱}$ دنباله داریم که در آنها یک جفتِ معلم و دانش‌آموز در $(i, i+۱)$ ایستاده است. چون $\binom{n}{k}$ دنباله داریم، میانگین موردنظر برابر است با

$$(n-۱)A_i = \frac{(n-۱) \times ۲\binom{n-۲}{k-۱}}{\binom{n}{k}} = \frac{۲k(n-k)}{n}$$

که به‌ازای $n = ۲۰$ و $k = ۷$ برابر است با $\frac{۹۱}{۱۰}$.

**۲۹.** دانش‌آموز بی‌حوصله‌ای در سالنی که در آن کمدهای دربسته‌ای با شماره‌های ۱ تا ۱۰۲۴ در یک ردیف قرار گرفته‌اند قدم می‌زند. او در کمد شمارهٔ ۱ را باز می‌کند و سپس درکمدها را یکی در میان باز می‌کند. پس از اینکه به انتهای سالن رسید، برمی‌گردد. به اولین کمد دربسته‌ای که برسد در آن را باز می‌کند و سپس درکمدها را یکی در میان باز می‌کند. این دانش‌آموز آنقدر می‌رود و می‌آید که در همهٔ کمدها باز شود. شمارهٔ آخرین کمدی که او درش را باز کرده است چیست؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۶)

## راه‌حل اول

فرض کنید $۲^k$ کمد در یک ردیف قرار گرفته باشند و $L_k$ شمارهٔ آخرین کمدی باشد که درش باز می‌شود. وقتی که دانش‌آموز برای اولین بار برمی‌گردد، $۲^{k-۱}$ کمد در بسته باقی مانده است. شمارهٔ همهٔ این کمدهای دربسته زوج است و از جایی که دانش‌آموز ایستاده است به ترتیب نزولی قرار گرفته‌اند. اکنون از آخر، جایی که دانش‌آموز ایستاده است، کمدهای بسته را دوباره از ۱ تا $۲^{k-۱}$ شماره‌گذاری کنید. توجه کنید کمدی که در ابتدا شماره‌اش $n$ بوده است (که در اینجا $n$ عددی زوج است) اکنون شماره‌اش $۲^{k-۱} + ۱ - \frac{n}{۲}$ است. بنابراین، چون $L_{k-۱}$ شمارهٔ آخرین کمدی است که در شماره‌گذاری جدید درش باز می‌شود،

$$L_{k-۱} = ۲^{k-۱} + ۱ - \frac{L_k}{۲}$$

پس

$$L_k = ۲^k + ۲ - ۲L_{k-۱}$$

اگر از این رابطهٔ بازگشتی یک بار دیگر استفاده کنیم به‌دست می‌آید

$$L_k = ۲^k + ۲ - ۲(۲^{k-۱} + ۲ - ۲L_{k-۲}) = ۴L_{k-۲} - ۲ \qquad (۱)$$

وقتی که تعداد کمدها ۱۰۲۴ یا $۲^{۱۰}$ است، آخرین کمدی که درش باز می‌شود $L_{۱۰}$ است. چون $L_۰ = ۱$، اگر از تساوی (۱) چند بار استفاده کنیم معلوم می‌شود که $L_۲ = ۴L_۰ - ۲ = ۲$، $L_۴ = ۶$، $L_۶ = ۲۲$، $L_۸ = ۸۶$ و $L_{۱۰} = ۳۴۲$.

### راه‌حل دوم

رابطهٔ بازگشتی (۱) را، که می‌توان آن را به شکل

$$L_k - \frac{۲}{۳} = ۴\left(L_{k-۲} - \frac{۲}{۳}\right)$$

نوشت، حل می‌کنیم.

چون $L_۰ = ۱$ و $L_۱ = ۲$، پس

$$L_k - \frac{۲}{۳} = \begin{cases} \left(۱ - \frac{۲}{۳}\right)۴^{\frac{k}{۲}} & \text{اگر } k \text{ عددی زوج باشد} \\ \left(۲ - \frac{۲}{۳}\right)۴^{\frac{k-۱}{۲}} & \text{اگر } k \text{ عددی فرد باشد} \end{cases}$$

این دستورها را می‌توان یکجا به شکل

$$L_k = \frac{۱}{۳}\left(۴^{\lfloor\frac{k+۱}{۲}\rfloor} + ۲\right)$$

نوشت. به‌ویژه، $L_{۱۰} = ۳۴۲$.

### یادداشت

اگر ۱۰۰۰ کمد در سالن باشد، راه‌حل چه تغییری می‌کند؟

**۳۰.** فرض کنید $n = ۲^{۳۱}۳^{۱۹}$. چندتا از مقسوم‌علیه‌های مثبت $n^۲$ از $n$ کوچکترند اما $n$ را نمی‌شمارند؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۵)

### راه‌حل اول

فرض کنید $n = p^r q^s$، که در آن $p$ و $q$ عددهایی اول و متمایزند. در این صورت $n^۲ = p^{۲r}q^{۲s}$، پس تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $n^۲$ برابر است با

$$(۲r + ۱)(۲s + ۱)$$

به‌ازای هر مقسوم‌علیهی از $n^۲$ که کوچکتر از $n$ است، مقسوم‌علیهی هم وجود دارد که بزرگتر از $n$ است. اگر $n$ را هم کنار بگذاریم معلوم می‌شود که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $n^۲$ که از $n$ کوچکترند برابر است با

$$\frac{(۲r + ۱)(۲s + ۱) - ۱}{۲} = ۲rs + r + s$$

چون تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $n$ برابر با $(r + ۱)(s + ۱)$ است (خود $n$ را هم شمرده‌ایم) و چون هر مقسوم‌علیه $n$ مقسوم‌علیه $n^۲$ هم هست، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $n^۲$ که از $n$ کوچکترند

و مقسوم‌علیه $n$ نیستند برابر است با

$$۲rs + r + s - ((r+۱)(s+۱) - ۱) = rs$$

وقتی که $r = ۳۱$ و $s = ۱۹$، تعداد چنین مقسوم‌علیه‌هایی برابر است با ۵۸۹.

**راه‌حل دوم** (از چنگد فنگ)

مقسوم‌علیهی مثبت از $n^۲$ مانند $d$ وقتی و فقط وقتی از $n$ کوچکتر است و $n$ را نمی‌شمارد که

$$d = \begin{cases} ۲^{۳۱+a}۳^{۱۹-b} & ۲^a < ۳^b \\ ۲^{۳۱-a}۳^{۱۹+b} & ۲^a < ۳^b \end{cases}$$

که در آنها $a$ و $b$ عددهایی صحیح‌اند که $۱ \leq a \leq ۳۱$ و $۱ \leq b \leq ۱۹$. چون اگر $a$ و $b$ عددهایی طبیعی باشند، $۲^a \neq ۳^b$، تعداد مقسوم‌علیه‌های موردنظر برابر است با $۳۱ \times ۱۹$ یا ۵۸۹.

**۳۱.** در یک ورزشگاه در جایگاه تماشاچیان در هر ردیف ۱۹۹ نفر می‌نشینند. یک بار از ۱۹۹۰ دانش‌آموز برای تماشای مسابقهٔ فوتبال دعوت شد. فقط معلوم بود که از هر مدرسه حداکثر ۳۹ دانش‌آموز می‌آیند. اگر قرار باشد که دانش‌آموزان هر مدرسه در یک ردیف بنشینند، کمترین تعداد ردیفهایی را که باید به دانش‌آموزان اختصاص داد تعیین کنید.

(چین، ۱۹۹۰)

**راه‌حل**

چون ۱۹۹ عددی اول است، ۲۰۰ را در نظر می‌گیریم. بزرگترین مقسوم‌علیه ۲۰۰ که از ۳۹ بیشتر نیست ۲۵ است. توجه کنید که

$$۱۹۹۰ = ۷۹ \times ۲۵ + ۱۵$$

اگر ۷۹ مدرسه هرکدام ۲۵ دانش‌آموز بفرستند و یک مدرسه ۱۵ دانش‌آموز بفرستد، دست‌کم باید $\left\lceil \frac{۷۹}{\left\lfloor \frac{۱۹۹}{۲۵} \right\rfloor} \right\rceil$ ردیف برای نشاندن همهٔ دانش‌آموزان در نظر بگیریم، که برابر است با ۱۲ ردیف.

اکنون ثابت می‌کنیم که ۱۲ ردیف برای برآوردن مقصود ما کافی است. دانش‌آموزان را مدرسه به مدرسه، سطر به سطر، بنشانید تا همهٔ صندلیهای ۱۰ ردیف اول پر شود، حتی اگر مجبور باشیم دانش‌آموزان برخی مدارس را در دو ردیف پخش کنیم. چنین چیزی حداکثر برای ۹ مدرسه پیش می‌آید. دانش‌آموزان این مدرسه‌ها را خارج کنید و آنها را در دو ردیف بگنجانید. این کار ممکن است، چون می‌توان در هر ردیف دانش‌آموزان دست‌کم ۵ مدرسه را جا داد، زیرا $۵ \times ۳۹ = ۱۹۵ < ۱۹۹$.

### یادداشت

ممکن است خوانندگان علاقه‌مند بخواهند دوگان این مسأله را هم حل کنند: در یک ورزشگاه ۱۱ ردیف صندلی وجود دارد و هر ردیف ۱۹۹ صندلی دارد. $n$ دانش‌آموز می‌آیند مسابقهٔ بسکتبال تماشا کنند. فقط می‌دانیم که از هر مدرسه حداکثر ۳۹ دانش‌آموز می‌آید. اگر قرار باشد که دانش‌آموزان هر مدرسه در یک ردیف بنشینند، بیشترین تعداد دانش‌آموزان را طوری تعیین کنید که همهٔ دانش‌آموزان بتوانند بنشینند.

**۳۲.** فرض کنید

$$T = \{۹^k :\ \ ۰ \le k \le ۴۰۰۰ \text{ و } \text{عددی صحیح است } k\}$$

می‌دانیم $۹^{۴۰۰۰}$، ۳۸۱۷ رقم دارد و اولین رقم (سمت چپ) آن ۹ است. اولین رقم سمت چپ چندتا از عضوهای $T$، ۹ است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۰)

### راه‌حل

توجه کنید که بجز وقتی که $۹^k$ با رقم ۹ شروع می‌شود، $۹^k$ یک رقم بیشتر از $۹^{k-۱}$ دارد. در حالتی که $۹^k$ با رقم ۹ شروع می‌شود، با تقسیم کردن معلوم می‌شود که $۹^{k-۱}$ با ۱ شروع می‌شود و تعداد رقمهایش با تعداد رقمهای $۹^k$ برابر است. بنابراین، وقتی که توانهای ۹ را از $۹^۰$ تا $۹^{۴۰۰۰}$ حساب می‌کنیم، ۳۸۱۶ بار تعداد رقمها زیاد می‌شود. بنابراین در $۴۰۰۰ - ۳۸۱۶$ یا ۱۸۶ جا وقتی که $۹^k$ را از روی $۹^{k-۱}$ $(۱ \le k \le ۴۰۰۰)$ حساب می‌کنیم تعداد رقمها زیاد نمی‌شود. چون $۱ = ۹^۰$، پس $۹^۰$ با رقم ۹ شروع نمی‌شود و نتیجه می‌گیریم که دقیقاً وقتی $۹^k$ $(۱ \le k \le ۴۰۰۰)$ با رقم ۹ شروع می‌شود که وقتی می‌خواهیم $۹^k$ را از روی $۹^{k-۱}$ حساب کنیم تعداد رقمها زیاد نشود. درنتیجه ۱۸۴ عدد از عددهای موردنظر با رقم ۹ شروع می‌شوند.

### یادداشت

لازم نیست بدانید که $۹^{۴۰۰۰}$ با رقم ۹ شروع می‌شود، اما مهم است که به‌یاد داشته باشید که $۹^۰$ با رقم ۹ شروع نمی‌شود.

**۳۳.** به‌ازای چه مقدارهایی از عدد طبیعی $n$ عددی مانند $m$ وجود دارد که می‌توان آن را به $(n-۱)!$ طریق یا بیشتر به شکل $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ نوشت، که در آن

$$a_۱ \in \{۱\}, \quad a_۲ \in \{۱, ۲\}, \ldots, \quad a_n \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$$

(جیم پراپ، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

## راه‌حل اول

توجه کنید که به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ به ترتیب می‌توانیم فرض کنیم $m = ۱, ۳, ۵, ۷$.

توجه کنید که در هر طریق نوشتن عدد $m$ به شکل $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$، که در آن

$$a_۱ \in \{۱\}, \quad a_۲ \in \{۱, ۲\}, \ldots, \quad a_n \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$$

به $(n-۱)$تایی‌ای مرتب مانند $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ متمایز از بقیه احتیاج داریم. علاوه بر این، فقط $(n-۱)!$تا از چنین $(n-۱)$تاییهایی وجود دارد، پس از هر یک از آنها می‌توان استفاده کرد؛ یعنی، باید

$$۲n - ۱ = \underbrace{۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{n-۱} + n \geq m$$

یا وقتی که

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = ۱$$

نمی‌توان $m$ را به شکل موردنظر نوشت؛ همچنین

$$m \geq ۱ + ۲ + \cdots + (n-۱) + ۱ = \frac{n(n-۱)}{۲} + ۱$$

یا وقتی که $a_۱ = ۱$، $a_۲ = ۲$، ... و $a_{n-۱} = n - ۱$، نمی‌توان $m$ را به شکل موردنظر نوشت.

اگر دو نابرابری بالا را با هم در نظر بگیریم معلوم می‌شود که

$$۲(n-۱) \geq \frac{n(n-۱)}{۲}$$

پس $n \leq ۴$.

بنابراین تنها مقدارهای $n$ که ویژگیهای موردنظر را دارند ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند.

## راه‌حل دوم (از دیوید ونسان)

به‌ازای هر $n$ فرض کنید

$$f_n(x) = x(x + x^۲) \cdots (x + x^۲ + \cdots + x^n)$$

معلوم است که $f_n(x)$ چندجمله‌ایی از درجهٔ

$$۱ + ۲ + \cdots + n$$

است، که برابر است با $\frac{n(n+۱)}{۲}$. می‌توانیم بنویسیم

$$f_n(x) = f_{n,۱}x + f_{n,۲}x^۲ + \cdots + f_{n,\frac{n(n+۱)}{۲}} x^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$$

در این صورت ضریب جملهٔ $x^m$ در $f_n(x)$، یعنی $f_{n,m}$، برابر است با تعداد راههایی که می‌توان

$m$ را به شکل $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ نوشت، که در آن

$$a_۱ \in \{۱\}, \quad a_۲ \in \{۱, ۲\}, \ldots, \quad a_n \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$$

برای راحتی کار می‌توانیم این تعریف را به همهٔ توانهای $x$ تعمیم دهیم، به این ترتیب که اگر $m$ای اصلاً نیامده بود فرض می‌کنیم $f_{n,m} = ۰$.

می‌توان نوشت

$$f_۱(x) = x$$

$$f_۲(x) = x^۲ + x^۳$$

$$f_۳(x) = x^۳ + ۲x^۴ + ۲x^۵ + x^۶$$

$$f_۴(x) = x^۴ + ۳x^۵ + ۵x^۶ + ۶x^۷ + ۵x^۸ + ۳x^۹ + x^{۱۰}$$

درنتیجه به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ به ترتیب می‌توان فرض کرد $m = ۱$؛ $m = ۲$ یا $m = ۳$؛ $m = ۴$ یا $m = ۵$؛ $m = ۷$.

به‌سادگی معلوم می‌شود که تعداد جمله‌های $f_n(x)$ برابر است با

$$(۱ + ۲ + \cdots + n) - n + ۱ = \frac{n(n-۱)}{۲} + ۱$$

همین‌طور به‌سادگی معلوم می‌شود که به‌ازای $n \geq ۵$، تعداد جمله‌های $f_{n-۱}(x)$ از $n$ بیشتر است، زیرا

$$\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲} + ۱ > n$$

چون

$$f_n(x) = f_{n-۱}(x)(x + x^۲ + \cdots + x^n)$$

اگر $m$ عددی طبیعی باشد،

$$\text{ضریب } x^m \text{ در } f_n(x) = f_{n-۱,m-۱} + f_{n-۱,m-۲} + \cdots + f_{n-۱,m-n}$$
$$< \sum_{i=۱}^{\frac{n(n-۱)}{۲}} f_{n-۱,i} = f_{n-۱}(۱) = (n-۱)!$$

**۳۴.** فرض کنید مجموع هر مجموعه از عددها مجموع عضوهایش باشد. فرض کنید $S$ مجموعه‌ای از عددهای طبیعی باشد که از ۱۵ بزرگتر نیستند. فرض کنید مجموع هیچ دو زیرمجموعهٔ جدا از هم از $S$ برابر نباشد. بیشترین مقدار مجموع مجموعه‌ای مانند $S$ با این ویژگیها چقدر است؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۶)

**راه‌حل**

ابتدا ثابت می‌کنیم که $S$ حداکثر پنج عضو دارد. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت $S$ دست‌کم $\binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۳} + \binom{۶}{۲} + \binom{۶}{۱}$ یا ۵۶ زیرمجموعهٔ حداکثر چهارعضوی دارد. مجموع هر یک از این زیرمجموعه‌ها حداکثر ۵۴ است (زیرا $۵۴ = ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵$)؛ بنابراین، بنابر اصل لانه کبوتری، دست‌کم دوتا از این مجموعها برابرند. اگر این زیرمجموعه‌ها اشتراکی نداشته باشند، حکم را ثابت کرده‌ایم؛ اگر زیرمجموعه‌ها اشتراک داشته باشد، با حذف عضو یا عضوهای مشترک آنها، به تناقض می‌رسیم.

از طرف دیگر، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که مجموعهٔ $S' = \{۱۵, ۱۴, ۱۳, ۱۱, ۸\}$ شرطهای مسأله را دارد. مجموع $S'$ برابر با ۶۱ است. بنابراین، مجموعه‌ای مانند $S$ که به‌دنبالش هستیم، مجموعه‌ای پنج‌عضوی است که مجموعش دست‌کم ۶۱ است. فرض کنید $S = \{a, b, c, d, e\}$، که در آن

$$a < b < c < d < e$$

و مجموع $S$، $s$ باشد. در این صورت معلوم است که $d + e \leq ۲۹$ و $c \leq ۱۳$. چون $S$، $\binom{۵}{۲}$ زیرمجموعهٔ دو عضوی دارد، پس

$$a + b \leq d + e - ۱۰ + ۱ \leq ۲۰$$

بنابراین $s \leq ۲۰ + ۱۳ + ۲۹ = ۶۲$. اگر $c \leq ۱۲$، آن‌وقت $s \leq ۶۱$؛ اگر $c = ۱۳$، آن‌وقت $d = ۱۴$ و $e = ۱۵$. در این صورت $s \leq a + b + ۴۲$. چون $۱۲ + ۱۵ = ۱۳ + ۱۴$، پس $b \leq ۱۱$. اگر $b \leq ۱۰$، آن‌وقت $a + b \leq ۱۹$ و $s \leq ۶۱$؛ اگر $b = ۱۱$، آن‌وقت $a \leq ۸$ و از اینکه

$$۱۰ + ۱۵ = ۱۱ + ۱۴, \quad ۹ + ۱۵ = ۱۱ + ۱۳$$

نتیجه می‌شود $s \leq ۸ + ۱۱ + ۴۲ = ۶۱$. در همهٔ حالتها، $s \leq ۶۱$. بنابراین بیشترین مقدار موردنظر برابر با ۶۱ است.

**۳۵.** دست‌کم چهار شکلات داریم که درون $n$ $(n \geq ۴)$ جعبه قرار دارند. آقای چاق هربار می‌تواند دو جعبه انتخاب کند، از هر یک از این دو جعبه یک شکلات بردارد و آنها را درون جعبه‌ای دیگر بگذارد. آیا همواره می‌توان همهٔ شکلاتها را درون یک جعبه قرار داد؟

(زونگو کیو، چین، ۱۹۹۴)

**راه‌حل**

همواره می‌توان همهٔ شکلاتها را درون یک جعبه قرار داد. این حکم را به استقرا روی $m$، تعداد شکلاتها، ثابت می‌کنیم.

وقتی که $m = ۴$، حداکثر ۴ جعبهٔ غیرخالی وجود دارد. جعبه‌های خالی را کنار می‌گذاریم و همهٔ حالتهای ممکن توزیع اولیهٔ شکلاتها را در نظر می‌گیریم:

۱. $(۱, ۱, ۱, ۱)$ ۲. $(۰, ۱, ۲, ۱)$ ۳. $(۰, ۰, ۲, ۲)$ ۴. $(۰, ۰, ۳, ۱)$

در حالت (۱) به‌طریق زیر عمل می‌کنیم

$$(۴, ۰, ۰, ۰) \rightarrow (۲, ۱, ۰, ۱) \rightarrow (۰, ۲, ۰, ۲) \rightarrow (۰, ۰, ۱, ۳) \rightarrow (۱, ۱, ۱, ۱)$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که همهٔ حالتهای دیگر در دنبالهٔ بالا بررسی شده‌اند. بنابراین حکم را در این حالت ثابت کرده‌ایم.

اکنون فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای عددی طبیعی مانند $m$، $m \geq ۴$، درست باشد. اگر $m + ۱$ شکلات داشته باشیم، یکی از آنها را در نظر می‌گیریم و آن را مخصوص می‌نامیم. ابتدا شکلات مخصوص را کنار می‌گذاریم و فقط $m$ شکلات دیگر را در نظر می‌گیریم. بنابر فرض استقرا، می‌توانیم همهٔ این $m$ شکلات را درون یک جعبه قرار دهیم. اگر این جعبه شامل شکلات مخصوص هم باشد، حکم را ثابت کرده‌ایم. اگر چنین نباشد، دو جعبهٔ خالی انتخاب می‌کنیم و مانند زیر عمل می‌کنیم:

$$(۱, m, ۰, ۰) \rightarrow (۰, m - ۱, ۲, ۰) \rightarrow (۰, m - ۲, ۱, ۲)$$
$$\rightarrow (۲, m - ۳, ۰, ۲) \rightarrow (۱, m - ۱, ۰, ۱) \rightarrow (۰, m + ۱, ۰, ۰)$$

در این صورت همهٔ شکلاتها در یک جعبه هستند و استقرا کامل شده است.

**۳۶.** آیا می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰۰ را طوری در یک ردیف مرتب کرد که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از آنها میان این دو عدد قرار نگرفته باشد؟

**راه‌حل**

ادعا می‌کنیم که می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و $n$ را طوری در یک ردیف مرتب کرد که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از آنها میان این دو عدد قرار نگرفته باشد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که این حکم به‌ازای $n = ۲^m$، که در آن $m$ عددی طبیعی است، درست است. از استقرا روی $m$ استفاده می‌کنیم. وقتی که $m = ۱$ معلوم است که حکم درست است.

اکنون فرض می‌کنیم که به‌ازای عددی طبیعی مانند $m$ می‌توانیم عددهای ۱، ۲، ... و $۲^m$ را در یک ردیف مانند $(a_۱, a_۲, \ldots, a_{۲^m})$ طوری مرتب کنیم که میانگین هیچ دو عدد متمایزی از آنها میان این دو عدد قرار نگرفته باشد. به‌سادگی معلوم می‌شود که اگر

$$(b_۱, b_۲, \ldots, b_{۲^{m+۱}}) = (۲a_۱ - ۱, ۲a_۲ - ۱, \ldots, ۲a_{۲^m} - ۱, ۲a_۱, ۲a_۲, \ldots, ۲a_{۲^m})$$

آن‌وقت $(b_1, b_2, \ldots, b_{2^{m+1}})$ ترتیبی از عددهای ۱، ۲، ... و $2^{m+1}$ است که ویژگی موردنظر را دارد. درحقیقت، بنابر فرض استقرا، میانگین دو عدد $b_i$ و $b_j$ که در آنها یا $1 \leq i < j \leq 2^m$ یا $2^m + 1 \leq i < j \leq 2^{m+1}$، میان این دو عدد قرار ندارد و میانگین دو عدد $b_i$ و $b_j$ که در آنها $1 \leq i \leq 2^m < j \leq 2^{m+1}$، عددی صحیح نیست. بنابراین استقرا کامل شده است.

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $n$ که توانی از ۲ نیست همواره می‌توانیم عددی طبیعی مانند $m$ پیدا کنیم که $n < 2^m$. ابتدا عددهای ۱، ۲، ... و $2^m$ را به شکل موردنظر مرتب می‌کنیم و سپس همهٔ عددهای بزرگتر از $n$ را حذف می‌کنیم تا ترتیبی از عددهای ۱، ۲، ... و $n$ به‌دست بیاوریم که ویژگی موردنظر را داشته باشد.

**۳۷.** فرض کنید $A_1A_2 \ldots A_{12}$ دوازده‌ضلعی منتظمی باشد که مرکزش نقطهٔ $O$ است. ناحیه‌های مثلثی $OA_iA_{i+1}$، $1 \leq i \leq 12$ $(A_{13} = A_1)$ را با رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد طوری رنگ می‌کنیم که رنگ ناحیه‌های مجاور متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

### راه‌حل

دستوری کلی پیدا می‌کنیم. فرض کنید $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 3)$ $n$ضلعی منتظمی باشد که مرکزش نقطهٔ $O$ است. ناحیه‌های مثلث $OA_1A_{i+1}$، $1 \leq i \leq n$ $(A_{n+1} = A_1)$ را با یکی از $k$ $(k \geq 3)$ رنگی که در اختیار داریم طوری رنگ می‌کنیم که رنگ ناحیه‌های مجاور متفاوت باشد. فرض کنید $p_{n,k}$ تعداد راههای چنین رنگ‌آمیزیی باشد. می‌خواهیم $p_{12,4}$ را پیدا کنیم.

ناحیهٔ $OA_1A_2$ را به $k$ طریق می‌توان رنگ کرد و سپس ناحیه‌های $OA_2A_3$، $OA_3A_4$، ... را به $k-1$ طریق می‌توان رنگ کرد. باید در مورد رنگ کردن ناحیهٔ $OA_nA_1$ دقت کنیم. ممکن است رنگ این ناحیه با رنگ ناحیهٔ $OA_1A_2$ یکی باشد. اما در این صورت می‌توانیم ناحیهٔ $OA_nA_2$ را یک ناحیه به‌حساب آوریم و به رنگ‌آمیزی مجازی برای $n-1$ ناحیه برسیم. معلوم است که با این کار تناظری یک‌به‌یک میان این نوع رنگ‌آمیزیهای غیرمجاز برای $n$ ناحیه و رنگ‌آمیزیهای مجاز برای $n-1$ ناحیه به‌دست می‌آید. بنابراین

$$p_{n,k} = k(k-1)^{n-1} - p_{n-1,k}$$

توجه کنید که $p_{3,k} = k(k-1)(k-2)$. درنتیجه

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + k(k-1)^{n-3} \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n-4}k(k-1)^3 + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2) \\ &= k \times \frac{(k-1)^n + (-1)^{n-4}(k-1)^3}{1 + (k-1)} + (-1)^{n-3}k(k-1)(k-2) \\ &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)^3 + (-1)^{n-1}k(k-1)(k-2) \end{aligned}$$

$$= (k-۱)^n + (-۱)^n(k-۱)\big((k-۱)^۲ - k(k-۲)\big)$$
$$= (k-۱)^n + (-۱)^n(k-۱)$$

بنابراین

$$p_{۱۲,۴} = ۳^{۱۲} + ۳ = ۵۳۱۴۴۴$$

**۳۸.** $۲n$ نفر در مهمانی حاضرند. تعداد دوستان هر کس در این مهمانی عددی زوج است. (دوستی رابطه‌ای دوطرفه است.) ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان مشترکشان در این مهمانی عددی زوج است.

**راه‌حل**

فرض کنید حکم درست نباشد و تعداد دوستان مشترک هر دو نفر از افراد حاضر در مهمانی عددی فرد باشد. شخصی مانند $P$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $A$ مجموعهٔ دوستان $P$ و $B$ مجموعهٔ بقیهٔ افراد (یعنی هر کس بجز $P$ و دوستانش) باشد. توجه کنید که چون $|A|$ عددی زوج و تعداد کل افراد حاضر در مهمانی برابر با $۲n$ است، پس $|B|$ عدد فرد است. شخصی مانند $Q$ را در $B$ در نظر بگیرید. بنابر تعریف $B$، $Q$ دوست $P$ نیست. بنابر فرض، تعداد دوستان مشترک $Q$ و $P$ عددی فرد است، پس تعداد دوستان $Q$ در $A$ عددی فرد است. چون تعداد دوستان $Q$ عددی زوج است، تعداد دوستان $Q$ در $B$ هم عددی فرد است. اکنون اگر تعداد دوستان افرادی مانند $Q$ را در $B$ جمع کنیم، حاصل برابر است با دو برابر تعداد دوستیهای میان افراد $B$. اما این مجموع عددی فرد است، زیرا همان‌طور که قبلاً گفتیم $|B|$ عددی فرد است. این هم تناقض است و درنتیجه دو نفر در مهمانی وجود دارند که تعداد دوستان مشترکشان عددی زوج است.

**یادداشت**

می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر کسی مانند $P$ در این مهمانی شخصی مانند $Q$ وجود دارد که تعداد دوستان مشترکش با $P$ در مهمانی عددی زوج است. درحقیقت، فرض کنید $A$ و $B$ همان مجموعه‌های اشاره‌شده در راه‌حل باشند. مجموعهٔ $B$ ناتهی است، زیرا $|B|$ عددی فرد است. شخصی مانند $Q$ وجود دارد که تعداد دوستانش در $B$ عددی زوج است. به این ترتیب تعداد دوستان $Q$ در $A$ هم باید عددی زوج باشد. برای اثبات این حکم کلیتر از روش اثبات با استفاده از رسیدن به تناقض استفاده نکرده‌ایم.

**۳۹.** چند جدول $۴ \times ۴$ متمایز وجود دارد که درایه‌هایشان ۱ و ۱− هستند و مجموع درایه‌های هر سطر و مجموع درایه‌های هر ستون صفر است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۷)

**راه‌حل**

هر سطر و هر ستون باید دوتا ۱ و دوتا ۱− داشته باشد و برای پر کردن سطر اول $\binom{۴}{۲}$ راه وجود دارد، که برابر است با ۶. همچنین، شش راه برای پر کردن سطر دوم وجود دارد. از اینها، یکی چهار درایه‌اش با چهار درایهٔ سطر اول مطابقت دارد، چهارتا دوتا از درایه‌هایشان با دوتا از درایه‌های سطر اول مطابقت دارد و یکی هیچ‌کدام از درایه‌هایش با درایه‌های سطر اول مطابقت ندارد. در حالت اول می‌توان به یک طریق سطر سوم را پر کرد، در حالت دوم می‌توان به دو طریق سطر سوم را پر کرد و در حالت سوم می‌توان به شش طریق سطر سوم را پر کرد. وقتی که سه سطر اول پر شدند، سطر چهارم را فقط به یک طریق می‌توان پر کرد. بنابراین $(۱ \times ۱ + ۴ \times ۲ + ۱ \times ۶)۶$ یا ۹۰ راه برای پر کردن جدول به‌شیوهٔ موردنظر وجود دارد.

۴۰. مربعی $(n-۱) \times (n-۱)$ را به‌طریق معمول به $(n-۱)^۲$ مربع واحد تقسیم می‌کنیم. هر یک از $n^۲$ رأس این مربعها را یا قرمز می‌کنیم یا آبی. تعداد رنگ‌آمیزیهای متمایزی را پیدا کنید که در آنها هر مربع واحد دقیقاً دو رأس قرمز دارد. (دو رنگ‌آمیزی وقتی متمایزند که دست‌کم رنگ یک رأس در آنها متفاوت باشد.)

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۶)

**راه‌حل**

فرض کنید رأسهای سطر پایینی را به‌طور دلخواه رنگ کرده باشیم و رنگ دوتا از رأسهای مجاور یکسان باشد. در این صورت به‌سادگی معلوم می‌شود که رنگ بقیهٔ رأسها خودبه‌خود مشخص می‌شود. $۲^n - ۲$ راه برای رنگ‌آمیزی سطر پایینی وجود دارد، به‌طوری که در آنها دوتا از رأسهای مجاور همرنگ باشند (زیرا کلاً $۲^n$ راه برای رنگ‌آمیزی رأسها وجود دارد و در ۲ تا از آنها رنگ رأسها یکی‌درمیان یکسان است.)

اگر رنگ رأسهای سطر پایینی یکی‌درمیان یکسان باشد، رنگ رأسهای بقیهٔ سطرها هم همین‌گونه است. بنابراین هر سطر را می‌توان به ۲ طریق و همهٔ سطرها را درکل به $۲^n$ طریق رنگ کرد. بنابراین جواب مسأله $۲^n + ۲^n - ۲$ یا $۲^{n+۱} - ۲$ طریق است.

۴۱. شصت‌وچهار گلوله را به چند دسته تقسیم کرده‌ایم. در هر گام می‌توانیم به‌طریق زیر عمل کنیم. دو دسته انتخاب می‌کنیم، یکی مثلاً دستهٔ $A$ با $p$ گلوله و دیگری مثلاً دستهٔ $B$ با $q$ گلوله، که در اینجا $p \geq q$، و سپس $q$ گلوله از دستهٔ $A$ برمی‌داریم و در دستهٔ $B$ می‌گذاریم. ثابت کنید می‌توان همهٔ گلوله‌ها را در یک دسته قرار داد.

**راه‌حل**

به استقرا ثابت می‌کنیم که اگر به‌ازای عددی صحیح و نامنفی مانند $m$، $n = ۲^m$، می‌توانیم همهٔ

$n$ گلوله را در یک دسته قرار دهیم. اگر $m = \text{۰}$ و $m = \text{۱}$، درستی حکم معلوم است.

اکنون فرض می‌کنیم که به‌ازای عددی طبیعی مانند $m$ می‌توان همهٔ $\text{۲}^m$ گلوله را در یک دسته قرار داد. ثابت می‌کنیم که می‌توان $\text{۲}^{m+\text{۱}}$ گلوله را هم در یک دسته قرار داد. ابتدا توجه کنید که تعداد دسته‌هایی که تعداد گلوله‌های آنها عددی فرد است، عددی زوج است. این دسته‌ها را دوتا دوتا جفت می‌کنیم و در هر دسته عمل موردنظر را انجام می‌دهیم. در این صورت پس از چند بار انجام این عمل، تعداد گلوله‌های هر یک از دسته‌ها عددی زوج است. بعد جفتهای هر دسته را کنار هم می‌گذاریم تا گلوله‌ای بزرگ تشکیل شود. به این ترتیب تعدادی دسته به‌دست آورده‌ایم که هر کدام $\text{۲}^m$ گلولهٔ بزرگ دارد. بنابر فرض استقرا، می‌توانیم این گلوله‌های بزرگ را در یک دسته قرار دهیم. در این صورت همهٔ $\text{۲}^{m+\text{۱}}$ گلوله در یک دسته جمع شده‌اند و استقرا کامل شده است.

**۴۲.** نوعی بازی یک‌نفره را با تعدادی متناهی عدد صحیح نامنفی انجام می‌دهند. در حرکت اول، بازیکن عددی صحیح را به‌عنوان بزرگ در نظر می‌گیرد و عددی صحیح و نامنفی و کوچکتر از عدد بزرگ را جایگزین یکی از عددها می‌کند. در حرکت بعدی هم بازی به‌طور مشابه انجام می‌شود، فقط باید عددی که به‌عنوان جایگزین در نظر گرفته می‌شود همان عدد بزرگ حرکت قبلی باشد. ثابت کنید پس از چند بار متناهی حرکت بازی تمام می‌شود.

(ریچارد استونگ، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

فرض کنید در زمانی عددهای صحیح $a_\text{۱}$، $a_\text{۲}$، ... و $a_n$ باشند و اندیس عددی که در گام قبل به‌عنوان بزرگ انتخاب کرده‌ایم برابر با $l$ باشد. نمرهٔ این موقعیت را این‌طور تعریف می‌کنیم: $S = \sum_{i\neq l} a_i$. در هر گام باید عدد صحیحی مانند $a_{l'}$ را به‌عنوان بزرگ جدید انتخاب کنیم (که در اینجا در $S$ به‌حساب می‌آید اما پس از حرکت خیر) و $a_l$ را (که در اینجا در $S$ به‌حساب نمی‌آید) با عددی کوچکتر از $a_{l'}$ (که در $S$ جدید به‌حساب می‌آید) جایگزین کنیم. پس در هر حرکت $S$ دست‌کم یک واحد کم می‌شود. چون در آغاز مقدار $S$ متناهی است و همواره $S \geq \text{۰}$، بازی با انجام تعدادی متناهی حرکت تمام می‌شود.

**۴۳.** اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{\text{۱}, \text{۲}, \ldots, n\}$ باشد، می‌توانیم $S$ را با انجام یکی از کارهای زیر تغییر دهیم:

**الف)** اگر $\text{۱} \notin S$، ۱ را به $S$ اضافه کنید؛

**ب)** اگر $n \in S$، $n$ را از $S$ حذف کنید؛

**ج)** به‌ازای $\text{۱} \leq r \leq n - \text{۱}$، اگر $r \in S$ و $r + \text{۱} \notin S$، $r$ را از $S$ حذف کنید و $r + \text{۱}$ را به $S$ اضافه کنید.

فرض کنید با انجام این تغییرات می‌توان دنباله‌ای مانند

$$\varnothing \to \{۱\} \to \{۲\} \to \cdots \to \{n\}$$

به‌دست آورد که از $\varnothing$ شروع و به $\{n\}$ ختم می‌شود و در آن هر یک از $۲^n$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ دقیقاً یک بار آمده است. ثابت کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند $m$، $n = ۲^m - ۱$.

(سیسیل روسو، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۲۰۰۰)

**راه‌حل**

فرض کنید $m$ برابر با مجموع عضوهای مجموعه باشد. وقتی که عملهای (الف) یا (ج) را انجام می‌دهیم، $m$ یکی زیاد می‌شود و وقتی که عمل (ب) را انجام می‌دهیم، $m$، $n$تا کم می‌شود. اگر در دنباله‌ای از $k$ بار تغییر که ابتدا و انتهای آن یک مجموعه است، $d$ بار عمل (ب) را انجام داده باشیم، آن‌وقت $(k - d) - dn = ۰$، یعنی $k = d(n + ۱)$. چون با اضافه کردن $\{n\} \to \varnothing$ به دنبالهٔ مفروض به

$$\varnothing \to \{۱\} \to \{۲\} \to \cdots \to \{n\} \to \varnothing$$

می‌رسیم، که دوری به‌طول $۲^n$ است (یعنی $k = ۲^n$)، پس $n + ۱ \mid ۲^n$. بنابراین $n$ باید به شکل $۲^m - ۱$ باشد، که در آن $m \leq n$.

**۴۴.** ۲۰۰۱ سکه روی میز وجود دارد. به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, ۲۰۰۱$، می‌توان پشت سر هم دقیقاً $i$ سکه را پشت‌وروکرد. ثابت کنید همواره یا می‌توان همهٔ سکه‌ها را به روکرد یا می‌توان همهٔ سکه‌ها را به پشت کرد، اما فقط یکی از این کارها میسر است.

(پینگ‌شن تائو، چین، ۱۹۸۹)

**راه‌حل**

حکم مسأله در مورد هر تعداد فردی سکه درست است. این حکم را به استقرا روی $n$ ($n$ عددی فرد است)، تعداد سکه‌ها، ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۱$، درستی حکم معلوم است.

فرض کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند $k$، حکم به‌ازای $n = ۲k - ۱$ درست باشد. اگر $n = ۲k + ۱$، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم.

**حالت ۱.** سکه‌ای مانند $C_۱$ وجود دارد که به روست و سکه‌ای مانند $C_۲$ وجود دارد که به پشت است. ابتدا $۲k - ۱$ سکهٔ دیگر را در نظر می‌گیریم. بنابر فرض استقرا، می‌توانیم پشت سر هم ۱، ۲، ... و $۲k - ۱$ سکه را طوری پشت و رو کنیم که $۲k - ۱$ سکه همگی به یک طرف باشند. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که $۲k - ۱$ سکه همگی

به رو هستند. اکنون این سکه و $C_۱$ را برمی‌گردانیم و سپس $۲k + ۱$ سکه را برمی‌گردانیم تا همگی به رو شوند.

**حالت ۲.** همهٔ سکه‌ها به یک طرف‌اند. سکه‌ها را روی یک دایره می‌چینیم و آنها را در جهت ساعتگرد با عددهای ۱، ۲، . . . و $۲k - ۱$ شماره می‌گذاریم. ابتدا سکهٔ شمارهٔ ۱ را برمی‌گردانیم، سپس سکه‌های شمارهٔ ۲ و ۳ را برمی‌گردانیم، بعد سکه‌های شمارهٔ ۴، ۵ و ۶ را برمی‌گردانیم و همین‌طور تا آخر. در این صورت

$$۱ + ۲ + \cdots + (۲k + ۱)$$

بار عمل برگشتن را انجام داده‌ایم و هر سکه را $k + ۱$ بار برگردانده‌ایم، زیرا

$$۱ + ۲ + \cdots + (۲k + ۱) = (k + ۱)(۲k + ۱)$$

چون سکه‌ها در ابتدا به یک طرف بوده‌اند، در آخر کار هم به یک طرف قرار دارند.

مطابق آنچه در بالا گفتیم، می‌توانیم همهٔ $۲k + ۱$ سکه را، بدون در نظر گرفتن اینکه در ابتدا چگونه قرار گرفته‌اند، پس از $۲k + ۱$ مرحله به یک رو قرار دهیم.

اکنون ثابت می‌کنیم که نمی‌توان هم کاری کرد که همهٔ سکه‌ها به رو باشند هم کاری کرد که همهٔ سکه‌ها به پشت باشند. فرض کنید چنین نباشد و آرایشی از سکه‌ها مانند $A$ وجود داشته باشد که بتوان با فرایندهایی مانند $T_۱$ و $T_۲$ به ترتیب همهٔ سکه‌ها را به رو و به پشت کرد. در این صورت می‌توانیم در ابتدا همهٔ سکه‌ها را به پشت کنیم، همهٔ گامهای $T_۲$ را برعکس طی کنیم تا به آرایش $A$ برسیم و سپس با طی کردن همهٔ گامهای $T_۱$ در انتها همهٔ سکه‌ها را به رو کنیم. تعداد دفعاتی که هر سکه را برگردانده‌ایم عدد فرد است. چون ۲۰۰۱ سکه داریم، تعداد کل تعداد دفعاتی که سکه‌ها را برگردانده‌ایم عددی فرد است. از طرف دیگر، تعداد دفعاتی که سکه‌ها را برگردانده‌ایم برابر است با

$$۲(۱ + ۲ + \cdots + ۲۰۰۱)$$

که عددی زوج است. به تناقض رسیده‌ایم. پس فرضمان غلط است و فقط می‌توان به یکی از دو آرایش نهایی رسید.

**۴۵.** مجموع یکی درمیان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ و هر یک از زیرمجموعه‌های ناتهی آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم: عددهای این زیرمجموعه را به ترتیب نزولی مرتب کنید و سپس ابتدا از بزرگترین عدد، عددها را به ترتیب یکی درمیان زیاد و کم کنید. (مثلاً، مجموع یکی درمیان مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۴, ۶, ۹\}$ برابر با $۹ - ۶ + ۴ - ۲ + ۱$ و مجموع یکی درمیان مجموعهٔ $\{۵\}$ برابر با ۵ است.) به‌ازای $n = ۷$، مجموع همهٔ مجموعهای یکی درمیان را حساب کنید.

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۳)

**راه‌حل**

شاید ساده‌تر باشد که مسأله را در حالتی (حتی کمی) کلیتر حل کنیم، یعنی اینکه مجموع همهٔ مجموعهای یکی درمیان زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را حساب کنیم (مجموعهٔ تهی را هم در نظر می‌گیریم). برای اینکه مجموعهٔ تهی را هم به‌حساب بیاوریم و این کار تأثیری در جواب نداشته باشد کافی است مجموع یکی درمیان آن را صفر در نظر بگیریم. زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ را می‌توان به دو نوع تقسیم کرد: آنهایی که شامل $n$ نیستند و آنهایی که شامل $n$ هستند. علاوه بر این، به‌طریق زیر هر زیرمجموعه از نوع اول را می‌توان در تناظری یک‌به‌یک با زیرمجموعه‌ای از نوع دوم قرار داد:

$$\{a_۱, a_۲, \ldots, a_i\} \longleftrightarrow \{n, a_۱, a_۲, \ldots, a_i\}$$

(در مورد زیرمجموعهٔ تهی تناظر $\{n\} \leftrightarrow \varnothing$ را در نظر می‌گیریم). در این صورت، اگر فرض کنیم

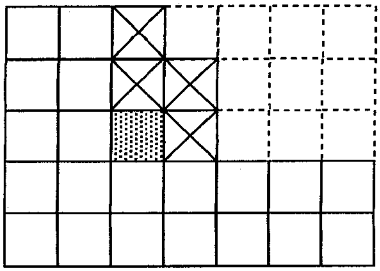
$$n > a_۱ > a_۲ > \cdots > a_i$$

مجموع مجموعهای یکی درمیان هر یک از این جفتها برابر است با

$$(a_۱ - a_۲ + \cdots \pm a_i) + (n - a_۱ + a_۲ - \cdots \mp a_i) = n$$

و چون تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ برابر با $۲^n$ است و درنتیجه $۲^{n-۱}$ جفت از زیرمجموعه‌ها داریم، مجموع موردنظر برابر است با $n۲^{n-۱}$. سرانجام، اگر $n = ۷$، مجموع موردنظر برابر است با ۴۴۸.

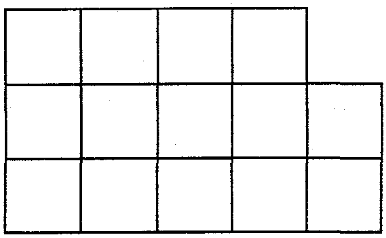
**۴۶.** در بازی ملچ‌ملوچ خوردن دو بازیکن یکی درمیان «تکه‌هایی» از جدولی $۷ \times ۵$ از مربعهای واحد را برمی‌دارند. برای برداشتن هر تکه، بازیکن یکی از مربعهای باقی‌مانده را انتخاب می‌کند و سپس همهٔ مربعهایی را که در ناحیه‌ای که با ضلع سمت چپ (و امتداد آن به‌سمت بالا) و ضلع پایینی (و امتداد آن به‌سمت راست) این مربع تعریف شده است حذف می‌کند (می‌خورد). مثلاً، با تکه‌ای که مربع سایه‌دار در شکل زیر مشخص می‌کند، مربع سایه‌دار و چهار مربعی که با علامت $\times$ مشخص شده‌اند حذف می‌شوند. (مربعهایی که دوتا یا تعداد بیشتری ضلع خط‌چین دارند در حرکتهای قبلی از صفحهٔ اصلی حذف شده‌اند.)



هدف هر بازیکن این است که کاری کند که طرف مقابلش تکهٔ آخر را بردارد. شکل صفحهٔ قبل یکی از چند زیرمجموعهٔ مجموعهٔ ۳۵ مربع واحد را نشان می‌دهد که ممکن است در طول بازی ملچ‌ملوچ خوردن پدید بیایند. در کل چندتا از این زیرمجموعه‌های متمایز وجود دارند؟ در این شمارش، کل صفحه و صفحهٔ خالی را هم در نظر بگیرید.
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۲)

## راه‌حل

در هر مرحله از بازی، وقتی از چپ به راست نگاه کنیم، مربعهای خورده نشده ستونهایی با ارتفاعهای نزولی تشکیل می‌دهند.



به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که این شرط نه تنها برای اینکه آرایشی از مربعها در بازی پدید بیاید لازم است، بلکه کافی هم هست. (از خواننده می‌خواهیم که این مطلب را ثابت کند.) علاوه بر این، هر چنین آرایشی را می‌توان با مسیری ۱۲ـ تکه‌ای که از قسمت بالا سمت چپ صفحهٔ اصلی شروع می‌شود و به قسمت پایین سمت راست صفحهٔ اصلی ختم می‌شود و مرز میان مربعهای خورده شده و مربعهای خورده نشده است مشخص کرد. این مرز را می‌توان با دنباله‌ای دوازده حرفی از حرفهای $H$ و $V$ مشخص کرد. چنین دنباله‌ای شامل هفت $H$ و پنج $V$ است، که در آن هر $H$ نشانهٔ بالای سطری خورده نشده (یا پایین ستونی کاملاً خورده شده) و هر $V$ نشانهٔ یک پله سقوط به‌طور عمودی از بالای ستونی خورده نشده به بالای ستونی کنار آن است که البته ارتفاعش کمتر است. مثلاً، می‌توان وضعیت شکلی را که در صورت مسأله آورده‌ایم با $HHHVHVVHHHVV$ مشخص کرد و دنباله‌های $HHHHHHHVVVVV$ و $VVVVVHHHHHHH$ به ترتیب صفحهٔ کامل و صفحهٔ خالی را مشخص می‌کنند. بنابراین، تعداد زیرمجموعه‌های ممکن برابر است با $\binom{۱۲}{۷}$ یا ۷۹۲.

## یادداشت

بازی ملچ‌ملوچ خوردن از دیوید گیل است و مارتین گاردنر آن را در ستون «بازیهای ریاضی»اش در مجلهٔ ساینتیفیک امریکن معرفی (و نامگذاری) کرده است. این ستون بار دیگر در مجموعهٔ دونات گره خورده از گاردنر آمده است.

**۴۷.** در هر خانهٔ صفحهٔ شطرنجی ۲۰۰۲ × ۱۹۸۸ یا ۰ نوشته شده یا ۱، به‌طوری که در هر سطر و هر ستون تعداد کل خانه‌هایی که ۱ در آنها نوشته شده عددی فرد است. ثابت کنید تعداد خانه‌های سفیدی که در آنها ۱ نوشته شده عددی زوج است.

**راه‌حل**

فرض کنید $(i, j)$، $1 \leq i \leq 1998$ و $1 \leq j \leq 2002$، خانه‌ای باشد که در سطر $i$ام و ستون $j$ام قرار دارد و $a_{ij}$ عددی باشد که در $(i, j)$ نوشته شده است. خانه‌ای مانند $(i, j)$ وقتی و فقط وقتی سفید است که زوجیت $i$ و $j$ یکسان باشد. بنابر فرض مسأله، مجموع

$$R_{\text{فرد}} = \sum_{i=1}^{999} \sum_{j=1}^{2002} a_{2i-1,j}$$

مجموع همهٔ عددهای واقع در سطرهای فرد است، یعنی $R_{\text{فرد}}$ فرد است، زیرا مجموع ۹۹۹ عدد فرد است. به‌طور مشابه معلوم می‌شود که مجموع همهٔ عددهای واقع در ستونهای زوج، یعنی

$$C_{\text{زوج}} = \sum_{j=1}^{1001} \sum_{i=1}^{1998} a_{2j,i}$$

هم عددی فرد است، زیرا مجموع ۱۰۰۱ عدد فرد است. فرض کنید $B$ مجموعهٔ همهٔ خانه‌های سیاه در ستونهای زوج و $S(B)$ مجموع عددهای نوشته شده در خانه‌های مجموعهٔ $B$ باشد. توجه کنید که عددی که در هر یک خانه‌های $B$ نوشته شده است دقیقاً یک بار در مجموع $R_{\text{فرد}}$ به‌حساب می‌آید. همچنین، توجه کنید که عددی که در هر یک از خانه‌های $B$ نوشته شده است دقیقاً یک بار در مجموع $C_{\text{زوج}}$ به‌حساب می‌آید. سرانجام، توجه کنید که هر عدد در خانه‌ای سفید دقیقاً یک بار در مجموع $C_{\text{زوج}} + R_{\text{فرد}}$ به‌حساب می‌آید. بنابراین تعداد خانه‌های سفید برابر است با $C_{\text{زوج}} + R_{\text{فرد}} - 2S(B)$، که عددی زوج است. بنابراین تعداد خانه‌های سفیدی که در آنها ۱ نوشته شده است عددی زوج است.

**۴۸.** فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ باشد که تفاضل هیچ دو عضوی از آن ۴ یا ۷ نیست. تعداد عضوهای $S$ حداکثر چندتاست؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۹)

**راه‌حل**

ابتدا ثابت می‌کنیم که در هر مجموعهٔ ۱۱عضوی از عددهای متوالی از مجموعهٔ

$$\{1, 2, 3, \ldots, 1989\}$$

حداکثر پنج‌تا عضو ممکن است عضو $S$ باشند. این مطلب را در مورد مجموعهٔ $T = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۱\}$ ثابت می‌کنیم، اما از همین روش اثبات در مورد هر مجموعه‌ای از ۱۱ عدد متوالی دیگر هم می‌توان استفاده کرد. $T$ را به شکل زیر افراز کنید، که در آن هر زیرمجموعه طوری انتخاب شده است که حداکثر یکی از عضوهایش ممکن است عضو $S$ باشد:

$$\{۱, ۵\}, \ \{۲, ۹\}, \ \{۳, ۷\}, \ \{۴, ۱۱\}, \ \{۶, ۱۰\}, \ \{۸\} \qquad (*)$$

اگر شش عضو $T$ در $S$ باشند، از هر یک از مجموعه‌های $(*)$ دقیقاً یک عضو در $S$ قرار دارد. در زیر نشان داده‌ایم که چرا چنین چیزی ممکن نیست:

$$۸ \in S \Rightarrow ۱ \notin S \Rightarrow ۵ \in S \Rightarrow ۹ \notin S \Rightarrow ۲ \in S \Rightarrow ۶ \notin S \Rightarrow ۱۰ \in S$$
$$\Rightarrow ۳ \notin S \Rightarrow ۷ \in S \Rightarrow ۱۱ \notin S \Rightarrow ۴ \in S \Rightarrow ۸ \notin S$$

به کمک مجموعه‌های $(*)$، یا به‌طریقی دیگر، به‌سادگی می‌توانیم زیرمجموعه‌ای ۵عضوی از $T$ پیدا کنیم که ویژگی اصلی $S$ (اینکه تفاضل هیچ دو عضوش ۴ یا ۷ نیست) را داشته باشد. یکی از این مجموعه‌ها $T' = \{۱, ۳, ۴, ۶, ۹\}$ است. همچنین، ویژگی فوق‌العادهٔ $T'$ این است که می‌توان از روی آن به‌طور دوره‌ای مجموعه‌ای با ویژگی موردنظر ساخت. یعنی اگر فرض کنیم

$$S' = \{k + ۱۱n : \ \ k \in T, \ \ n \in \mathbb{Z}\}$$

$S'$ هم این ویژگی را دارد که تفاضل هیچ دو عضوش ۴ یا ۷ نیست. علاوه بر این، چون

$$۱۹۸۹ = ۱۸۰ \times ۱۱ + ۱۹$$

معلوم است که $S$ بیشتر از $۵ \times ۱۸۱$ یا ۹۰۵ عضو ندارد. چون بزرگترین عضو $T'$، ۹ است، پس مجموعهٔ

$$S = S' \cap \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۹۸۹\}$$

۹۰۵ عضو دارد که نشان می‌دهد کران بالای ۹۰۵ برای اندازهٔ مجموعهٔ موردنظر دست‌یافتنی است.

### یادداشت

ممکن است خواننده بخواهد زیرمجموعه‌های ۵عضوی دیگری از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۱\}$ پیدا کند که ویژگی اصلی $S$ را داشته باشند. کدام‌یک از این زیرمجموعه‌ها، مانند زیرمجموعه‌ای که در بالا از آن استفاده کردیم، بزرگترین $S$ را تولید می‌کنند؟

همچنین، از خواننده می‌خواهیم که مسأله‌هایی مشابه این مسأله که در آنها به‌جای ۴ و ۷ زوجهای دیگری (یا سه‌تاییهای دیگری، ...) استفاده شده است طرح کند و دلایل قانع‌کننده‌ای برای انتخاب ۱۱ برای اندازهٔ قطعه‌های عددهای صحیح در راه‌حل بالا بیابد.

**۴۹.** پانزده دانش‌آموز زرنگ و پانزده دانش‌آموز تنبل دور میزی گرد نشسته‌اند. معلم می‌خواهد دانش‌آموزان را در گروههای دونفره دسته‌بندی کند و پانزده نوع برگهٔ امتحانی میان آنها توزیع کند ـ هر برگهٔ امتحانی برای یک گروه دونفره.

معلم حین کار از خود پرسید «به چند طریق می‌توانم دانش‌آموزان را در گروههای دونفرهٔ زرنگ/تنبل کنار هم بنشانم، به‌طوری که لازم نباشد از دانش‌آموزی بخواهم جایش را عوض کند؟» به این سؤال معلم جواب بدهید. (دو طرز نشستن را یکی می‌دانیم، هرگاه بتوان یکی را از دوران دیگری به‌دست آورد.)

(زومینگ فنگ، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۲۰۰۲)

**راه‌حل**

جفت کردن خوب جفت‌کردنی است که در آن هر جفت شامل یک دانش‌آموز زرنگ و یک دانش‌آموز تنبل باشد. معلوم است که $۱۵!$ جفت کردن خوب وجود دارد. به‌ازای هر جفت کردن خوب، $۲^{۱۵} \times ۱۴!$ راه برای نشاندن دانش‌آموزان دور میز وجود دارد. هر چنین طرز نشاندنی را یک رابطهٔ کاری خوب می‌نامیم. بنابراین، $۱۲^{۱۵} \times ۱۵! \times ۱۴!$ رابطهٔ کاری خوب وجود دارد.

طرز نشاندن خوب طرز نشاندنی است که معلم بتواند دانش‌آموزان را در گروههای دونفرهٔ زرنگ/تنبل کنار هم طوری بنشاند که لازم نباشد از دانش‌آموزی بخواهد جایش را عوض کند. می‌خواهیم $x$، تعداد طرز نشاندنهای خوب، را حساب کنیم. دو نوع طرز نشاندن خوب وجود دارد:

**الف)** طرز نشاندن خوبی که دقیقاً یک رابطهٔ کاری خوب برقرار می‌کند. یعنی اینکه دست‌کم دو دانش‌آموز زرنگ کنار هم نشسته‌اند. این طرز نشاندنها را طرز نشاندنهای خوب نوع اول می‌نامیم. فرض کنید $x_۱$ تعداد طرز نشاندنهای خوب نوع اول باشد.

**ب)** طرز نشاندن خوبی که دقیقاً دو رابطهٔ کاری خوب برقرار می‌کند. یعنی اینکه دانش‌آموزان زرنگ و تنبل یکی درمیان نشسته‌اند. این طرز نشاندنها را طرز نشاندنهای خوب نوع دوم می‌نامیم. فرض کنید $x_۲$ تعداد طرز نشاندنهای خوب نوع دوم باشد. در این صورت $x_۲ = ۱۴! \times ۱۵!$، زیرا $۱۴!$ راه برای نشاندن دانش‌آموزان زرنگ دور میز وجود دارد و $۱۵!$ راه هم برای نشاندن هر یک از دانش‌آموزان تنبل در میان دو دانش‌آموز زرنگ کنار هم وجود دارد.

توجه کنید که $x = x_۱ + x_۲$، که در آن $x_۲ = ۱۴! \times ۱۵!$ و

$$x_۱ + ۲x_۲ = ۱۴! \times ۱۵! \times ۲^{۱۵}$$

بنابراین $x = ۱۴! \times ۱۵!(۲^{۱۵} - ۱)$.

**۵۰.** دو خانه در صفحهٔ شطرنجی $۸ \times ۸$ را چسبیده می‌نامیم هرگاه دست‌کم یک رأس مشترک داشته باشند. آیا شاه می‌تواند از خانه‌ای شروع به حرکت کند و به همهٔ خانه‌ها دقیقاً یک بار برود، به‌طوری

که در تمام حرکتها، بجز اولی، به خانه‌ای برود که به تعداد زوجی از خانه‌هایی که قبلاً به آنها رفته است چسبیده باشد؟

(حوزهٔ بالتیک، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

خیر، شاه نمی‌تواند با شرطهای موردنظر به همهٔ خانه‌ها برود. فرض کنید چنین نباشد و مسیری وجود داشته باشد که شاه در تمام حرکتها، بجز اولی، به خانه‌ای برود که به تعداد زوجی از خانه‌هایی که قبلاً به آنها رفته است چسبیده است. معلوم است که شاه در حرکت اول باید به خانه‌ای برود که دقیقاً به یک خانه که قبلاً در آن بوده است چسبیده است، یعنی خانه‌ای که حرکت را از آن شروع کرده است. اگر تعداد خانه‌های چسبیده را در همهٔ حرکتهای قبلی با هم جمع کنیم عددی فرد به‌دست می‌آید. از طرف دیگر، در این مجموع هر جفت خانهٔ چسبیده، به‌ازای عضوی از این جفت که شاه دیرتر به آن رفته است، دقیقاً یک بار به‌حساب آمده است. بنابراین، این مجموع برابر است با تعداد جفتهای چسبیده. اما این عدد زوج است، زیرا تعداد جفتهای چسبیده در امتداد شمال-جنوب و شرق-غرب برابر است، همین‌طور تعداد جفتهای چسبیده در جهت شمال شرق-جنوب غرب و شمال غرب-جنوب شرق. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و هیچ مسیری با ویژگیهای موردنظر وجود ندارد.

۵۱. ۱۱۹ نفر در ساختمانی ۱۲۰ آپارتمانی زندگی می‌کنند. آپارتمانی را پرازدحام می‌نامیم که دست‌کم ۱۵ نفر در آن ساکن باشند. هر روز ساکنان آپارتمانهای پرازدحام مشاجره می‌کنند و هر کدام به آپارتمانی متفاوت از بقیه در همین ساختمان می‌رود (درنتیجه می‌توانند روی یکدیگر را نبینند!). آیا درست است که این روند لزوماً روزی به پایان می‌رسد؟

(سنت‌پترزبورگ، ۱۹۸۸)

**راه‌حل**

فرض کنید $p_۱$، $p_۲$، ... و $p_{۱۲۰}$، ۱۲۰ آپارتمان باشند و $a_i$ تعداد ساکنان آپارتمان $p_i$ باشد. فرض کنید

$$S = \frac{a_۱(a_۱ - ۱)}{۲} + \frac{a_۲(a_۲ - ۱)}{۲} + \cdots + \frac{a_{۱۲۰}(a_{۱۲۰} - ۱)}{۲}$$

(فرض کنید ساکنان هر آپارتمان صبح هر روز با هم دست می‌دهند؛ در این صورت $S$ تعداد دست‌دادنها در این روز است.) اگر هر یک از $a_i$ها از ۱۵ کمتر باشد، هیچ دلیلی برای رفتن کسی به آپارتمانی دیگر وجود ندارد. در غیر این صورت، بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $a_۱ \geq ۱۵$ و ساکنان آپارتمان $p_۱$ به آپارتمانهای مختلفی در ساختمان

می‌روند. فرض کنید این افراد به آپارتمانهای $p_{i_1}$، $p_{i_2}$، . . . و $p_{i_{a_1}}$ بروند. روز بعد، مقدار $S$ به‌اندازهٔ

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_{a_1}} - \frac{a_1(a_1 - 1)}{2}$$

تغییر می‌کند، که مقداری مثبت است، زیرا

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_{a_1}} \leq 119 - a_1 \leq 119 - 15 = 104$$

و

$$\frac{a_1(a_1 - 1)}{2} \geq \frac{15 \times 14}{2} = 105$$

بنابراین مقدار $S$ در این نقل و انتقالات کمتر می‌شود. از طرف دیگر، مقدار $S$ در ابتدا متناهی است و $S$ همواره مثبت است. بنابراین روند نقل و انتقالات روزی به پایان می‌رسد.

# ۴

# راه‌حل مسأله‌های پیشرفته

۱. در تورنمنتی هر بازیکن با هر یک از بازیکنان دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند. در هر بازی، برنده ۱ امتیاز می‌گیرد، بازنده هیچ امتیازی نمی‌گیرد و اگر بازی به تساوی ختم شود هر یک از دو بازیکن $\frac{1}{2}$ امتیاز می‌گیرد. در پایان تورنمنت معلوم شد که دقیقاً نصف امتیازهایی که هر بازیکن گرفته است در مقابل ده بازیکنی بوده است که کمترین امتیازها را دارند (به‌ویژه، هر یک از ده بازیکنی که کمترین امتیازها را دارند نصف امتیازهایش را در مقابل نه نفر دیگر از این ده نفر به‌دست آورده است). چند بازیکن در این تورنمنت بوده‌اند؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۵)

### راه‌حل

فرض کنید که $n$ بازیکن در تورنمنت شرکت کرده باشند. دو عبارت برحسب $n$ به‌دست می‌آوریم: یکی کل امتیازهایی که همهٔ بازیکنان گرفته‌اند و دیگری امتیازهایی که بازنده‌ها (۱۰ بازیکنی که کمترین امتیازها را گرفته‌اند) و امتیازهایی که برنده‌ها ($n - ۱۰$ بازیکن دیگر) گرفته‌اند. برای این منظور، از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر $k$ بازیکن در مقابل یکدیگر بازی کنند، در کل $\frac{k(k-۱)}{۲}$ بازی انجام داده‌اند و $\frac{k(k-۱)}{۲}$ امتیاز در میان آنها تقسیم شده است. با در نظر داشتن این مطلب، $n$ بازیکن در این تورنمنت در کل $\frac{n(n-۱)}{۲}$ امتیاز گرفته‌اند. به همین ترتیب، بازنده‌ها در بازیهای میان خودشان $\frac{۱۰ \times ۹}{۲}$ یا ۴۵ امتیاز گرفته‌اند و چون این مقدار نصف امتیازهایشان است، در کل ۹۰ امتیاز گرفته‌اند. $n - ۱۰$ برنده نیز در بازیهای میان خودشان $\frac{(n-۱۰)(n-۱۱)}{۲}$ امتیاز گرفته‌اند و چون این مقدار نصف کل امتیازهایشان است (نصف دیگر امتیازها مربوط به بازیهای

مقابل بازنده‌هاست)، کل امتیازهایشان $(n-۱۰)(n-۱۱)$ است. بنابراین

$$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۹۰ + (n-۱۰)(n-۱۱)$$

که با

$$n^۲ - ۴۱n + ۴۰۰ = ۰$$

هم‌ارز است. چون سمت چپ این معادله را می‌توان به شکل $(n-۱۶)(n-۲۵)$ تجزیه کرد، پس یا $n = ۱۶$ یا $n = ۲۵$. حالت $n = ۱۶$ ممکن نیست، زیرا اگر ۱۶ بازیکن در تورنمنت وجود داشته باشند، فقط ۶ نفر آنها برنده‌اند و کل امتیازهایشان باید ۳۰ امتیاز باشد، که درنتیجه میانگین امتیاز هر یک از آنها ۵ امتیاز است. این مقدار امتیاز از $\frac{۹۰}{۱۰}$ یا ۹ امتیازی که هر یک از بازنده‌ها به‌طور میانگین کسب کرده است کمتر است! بنابراین، $n = ۲۵$، یعنی ۲۵ نفر در تورنمنت شرکت کرده‌اند.

سرانجام، ثابت می‌کنیم که می‌توان تورنمنتی با این ویژگیها برگزار کرد. چون $n = ۲۵$، ۱۵ نفر برنده و ۱۰ نفر بازنده داریم. هر بازی میان برنده‌ها به تساوی ختم می‌شود، پس هر بازیکن $\frac{۱۵-۱}{۲}$ یا ۷ امتیاز از بازیهایی که با بقیهٔ برنده‌ها انجام داده است می‌گیرد. به همین ترتیب، هر بازی میان بازنده‌ها به تساوی ختم می‌شود، که درنتیجه به هر یک از ۱۰ بازنده ۴٫۵ امتیاز می‌رسد. در ده بازیی که هر برنده با بازنده‌ها انجام می‌دهد، شش برد، دو باخت و دو تساوی وجود دارد، که به هر برنده ۷ امتیاز دیگر از بازیهای مقابل بازنده‌ها می‌رسد. بنابراین هر بازنده، در بازیهای مقابل برندگان سه برد، نه باخت و سه تساوی دارد، که در مجموع ۴٫۵ امتیاز دیگر می‌گیرد. به این ترتیب، هر یک از این ۲۵ بازیکن نصف امتیازهایش را در بازیهای مقابل بازنده‌ها به‌دست آورده است، همان چیزی که می‌خواهیم.

**۲.** فرض کنید $n$ عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد. تعداد جایگشتهایی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند $p$ را پیدا کنید که

$$|p(۱) - ۱| + |p(۲) - ۱| + \cdots + |p(n) - n| = \frac{n^۲ - ۱}{۲}$$

(تیتو آندریسکو، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

می‌توان نوشت

$$|p(۱) - ۱| + |p(۲) - ۱| + \cdots + |p(n) - n|$$

$$= \pm ۱ \pm ۱ \pm ۲ \pm ۲ \pm \cdots \pm n \pm n$$

بیشترین مقدار $|p(1)-1|+|p(2)-2|+\cdots+|p(n)-n|$ برابر است با

$$2\left(-1-2-\cdots-\frac{n-1}{2}\right)-\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2}+2\left(\frac{n+3}{2}+\cdots+n\right)$$
$$=-\left(1+\frac{n-1}{2}\right)\frac{n-1}{2}+\left(\frac{n+3}{2}+n\right)\frac{n-1}{2}=\frac{n^2-1}{2}$$

فرض کنید $k=p\left(\frac{n+1}{2}\right)$. در این صورت، اگر $k\le\frac{n-1}{2}$،

$$\left\{p(1),p(2),\dots,p\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}=\left\{\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\dots,n\right\}$$

و

$$p\left\{\left(\frac{n+3}{2}\right),p\left(\frac{n+5}{2}\right),\dots,p(n)\right\}=\left\{1,2,\dots,\frac{n+1}{2}\right\}-\{k\}$$

و اگر $k\ge\frac{n+1}{2}$،

$$\left\{p(1),p(2),\dots,p\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}=\left\{\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},\dots,n\right\}-\{k\}$$

و

$$\left\{p\left(\frac{n+3}{2}\right),p\left(\frac{n+5}{2}\right),\dots,p(n)\right\}=\left\{1,2,\dots,\frac{n-1}{2}\right\}$$

تعداد جایگشتهای موردنظر برابر است با

$$\frac{n-1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2+\frac{n+1}{2}\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2=n\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2$$

**۳.** در هر دنباله از نتیجه‌های پرتاب‌کردنهای یک سکه می‌توان تعداد دفعاتی را که یک شیر بلافاصله بعد از یک خط می‌آید، یک شیر بلافاصله بعد از یک شیر می‌آید و غیره، را حساب کرد. فرض کنید این پشت سر هم آمدنها را با $TH$، $HH$ و غیره، نشان دهیم. مثلاً، در دنبالهٔ

$$HHTTHHHHTHHTTTT$$

از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه، پنج زیردنبالهٔ $HH$، سه زیردنبالهٔ $HT$، دو زیردنبالهٔ $TH$ و چهار زیردنبالهٔ $TT$ وجود دارد. چند دنبالهٔ متفاوت از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه شامل دقیقاً دو زیردنبالهٔ $HH$، سه زیردنبالهٔ $HT$، چهار زیردنبالهٔ $TH$ و پنج زیردنبالهٔ $TT$ است؟

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۸۶)

**راه‌حل**

هر چنین دنباله‌ای از نتیجه‌های پرتاب کردن یک سکه را می‌توان زنجیره‌ای از قطعه‌هایی از $T$ و $H$، که آنها را به ترتیب با $\{T\}$ و $\{H\}$ نشان می‌دهیم، در نظر گرفت. اکنون توجه کنید که هر یک از دنباله‌های $HT$ و $TH$ به ترتیب محل گذر از $\{H\}$ به $\{T\}$ و از $\{T\}$ به $\{H\}$ است. چون در هر دنباله از نتیجه‌های ۱۵ بار پرتاب کردن یک سکه سه گذر از نوع اول و چهار گذر از نوع دوم داریم، هر چنین دنباله‌ای به شکل

$$\{T\}\{H\}\{T\}\{H\}\{T\}\{H\}\{T\}\{H\} \qquad (*)$$

است.

کار بعدی، قرار دادن $T$ها و $H$ها در قطعه‌های نظیرشان است، به‌طوری که مطمئن باشیم در هر دنباله دو زیردنبالهٔ $HH$ و پنج زیردنبالهٔ $TT$ وجود دارد. برای این منظور، فرض می‌کنیم که هر قطعه در $(*)$ در ابتدا فقط یک عضو دارد. در این صورت، برای اینکه شرطهای مسأله برآورده شوند کافی است دوتا $H$ دیگر در $\{H\}$ها و پنج‌تا $T$ دیگر در $\{T\}$ها بگذاریم. بنابراین، برای اینکه مسأله را حل کنیم باید تعداد راههای انجام این کار را بشماریم.

به‌یاد بیاورید که تعداد راههای قرار دادن $p$ گلولهٔ یکسان (در این مورد $H$ها و $T$های اضافی) درون $q$ جعبهٔ یکسان ($\{H\}$ها و $\{T\}$ها، که با ترتیبشان در دنباله مشخص شده‌اند) برابر است با $\binom{p+q-1}{p}$. (دانش‌آموزانی که این مطلب را نمی‌دانند آن را ثابت کنند.) در این مورد، از این مطلب نتیجه می‌شود که دوتا $H$ را می‌توان به $\binom{2+4-1}{2}$ یا ۱۰ طریق در چهارتا $\{H\}$ قرار داد و پنج‌تا $T$ را می‌توان به $\binom{5+4-1}{5}$ یا ۵۶ طریق در چهارتا $\{T\}$ قرار داد. جواب مسأله حاصل‌ضرب این عددها، یعنی ۵۶۰، است.

**۴.** فرض کنید $A=(a_1,a_2,\ldots,a_{2001})$ دنباله‌ای از عددهای طبیعی باشد. فرض کنید $m$ برابر با تعداد زیردنباله‌های سه‌عضوی از این دنباله مانند $(a_i,a_j,a_k)$ باشد که $1\le i<j<k\le 2001$ و $a_j=a_i+1$ و $a_k=a_j+1$. در میان همهٔ دنباله‌هایی مانند $A$ بزرگترین $m$ را پیدا کنید. (مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۱)

**راه‌حل**

دو عمل زیر را روی دنبالهٔ $A$ در نظر بگیرید:

۱. اگر $a_i>a_{i+1}$، جای $a_i$ و $a_{i+1}$ را عوض کنید تا دنبالهٔ جدید

$$(a_1,a_2,\ldots,a_{i+1},a_i,\ldots,a_{2001})$$

به‌دست بیاید.

۲. اگر $a_{i+1} = a_i + 1 + d$، که در آن $d > 0$، $a_1$، ... و $a_i$ را به‌اندازهٔ $d$ زیاد کنید تا دنبالهٔ جدید

$$(a_1 + d, a_2 + d, \dots, a_i + d, a_{i+1}, \dots, a_{2001})$$

به‌دست بیاید.

معلوم است که با انجام عمل (۱) مقدار $m$ کمتر نمی‌شود. اگر عمل (۱) را پی‌درپی تکرار کنیم، می‌توانیم دنبالهٔ موردنظر را طوری مرتب کنیم که صعودی باشد. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم دنباله‌ای که در آن $m$ بیشترین مقدار ممکن است صعودی است. اکنون توجه کنید که اگر $A$ دنباله‌ای صعودی باشد، با انجام عمل (۲) مقدار $m$ کمتر نمی‌شود. پس هر دنباله‌ای مانند $A$ که در آن $m$ بیشترین مقدار ممکن است به شکل

$$(\underbrace{a, \dots, a}_{t_1}, \underbrace{a+1, \dots, a+1}_{t_2}, \dots, \underbrace{a+s-1, \dots, a+s-1}_{t_s})$$

است که در آن $t_1$، $t_2$، ... و $t_s$ تعداد جمله‌های زیردنبالهٔ متناظرشان هستند و $s \geq 3$. در چنین دنباله‌ای،

$$m = t_1t_2t_3 + t_2t_3t_4 + \dots + t_{s-2}t_{s-1}t_s \qquad (*)$$

می‌ماند که بهترین انتخاب برای $s$ و بهترین افراز ۲۰۰۱ به عددهای طبیعی $t_1$، $t_2$، ... و $t_s$ را پیدا کنیم.

بیشترین مقدار $m$ وقتی به‌دست می‌آید که $s = 3$ یا $s = 4$. اگر $s > 4$، می‌توانیم با استفاده از افرازی از ۲۰۰۱ به $s - 1$ بخش، یعنی

$$t_2, t_3, (t_1 + t_4), \dots, t_s$$

مقدار $m$ را که برحسب تساوی $(*)$ به‌دست می‌آید زیاد کنیم. توجه کنید که وقتی $s = 4$، این تغییر، مقداری را که براساس تساوی $(*)$ به‌دست می‌آید عوض نمی‌کند. بنابراین می‌توان بیشترین مقدار $m$ را به‌ازای $s = 3$ به‌دست آورد. در این حالت، $m = t_1t_2t_3$ و $m$ وقتی بیشترین مقدار است که

$$t_1 = t_2 = t_3 = \frac{2001}{3} = 667$$

بنابراین بیشترین مقدار $m$ برابر با $667^3$ است. این بیشترین مقدار را وقتی که $s = 4$ هم می‌توان به‌دست آورد، که در این حالت به‌ازای $t_1 = a$، $t_2 = t_3 = 667$ و $t_4 = 667 - a$، که در اینجا $1 \leq a \leq 666$، به‌دست می‌آید.

۵. بیست‌وسه نفر که وزن هر یک از آنها عددی طبیعی است می‌خواهند فوتبال بازی کنند. این عده یکی را به‌عنوان داور انتخاب می‌کنند و سپس به دو تیم ۱۱ نفره طوری تقسیم می‌شوند که وزن کل

دو تیم برابر باشد. معلوم شده است که داور هر که باشد می‌توان این کار را کرد. ثابت کنید وزن این ۲۳ نفر برابر است.

(پال زایتس، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۸۹)

## راه‌حل

فرض کنید حکم درست نباشد و ۲۳ نفر وجود داشته باشند که وزنشان برابر نباشد و شرطهای مسأله در مورد آنها برقرار باشد. در این صورت، در میان چنین مجموعه‌هایی از افراد مجموعه‌ای مانند $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_{۲۳}\}$ وجود دارد که وزن کل افرادش، یعنی $w = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۲۳}$، کمترین مقدار ممکن است. اگر $a_i$ داور باشد، آن‌وقت $w - a_i = ۲s_i$، که در آن $s_i$ وزن کل هر یک از تیمهاست. بنابراین (به‌پیمانهٔ ۲) $a_i \equiv w$، یعنی زوجیت $a_i$ها یکسان است.

اگر $a_i$ها همگی زوج باشند، می‌توان $A$ را با

$$A' = \left\{\frac{a_۱}{۲}, \frac{a_۲}{۲}, \ldots, \frac{a_{۲۳}}{۲}\right\}$$

جایگزین کرد، که مجموعه‌ای است که وزن کلش کمتر است و شرطهای مسأله در مورد آن برقرار است و چون $a_i$ها همگی برابر نیستند، $\frac{a_i}{۲}$ ها هم همگی برابر نیستند. این هم با اینکه $A$ مجموعه‌ای است که وزن کلش کمترین مقدار ممکن است تناقض دارد.

اگر $a_i$ها همگی فرد باشند، می‌توانیم از مجموعهٔ

$$A'' = \left\{\frac{a_۱ + a}{۲}, \frac{a_۲ + ۱}{۲}, \ldots, \frac{a_{۲۳} + ۱}{۲}\right\}$$

استفاده کنیم و مانند قبل به تناقض برسیم.

بنابراین فرضمان غلط است و وزن هر ۲۳ نفر برابر است.

## یادداشت

با معلوماتی از نظریهٔ ماتریسها می‌توان حکمی کلیتر را ثابت کرد. فرض کنید $n$ عددی طبیعی باشد و $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{۲n+۱}$ عددهایی حقیقی باشند. اگر هر یک از این عددها را که کنار بگذاریم بتوان بقیه را به دو مجموعهٔ $n$ عضوی طوری تقسیم کرد که مجموعشان برابر باشد، آن‌وقت

$$x_۱ = x_۲ = \cdots = x_{۲n+۱}$$

۶. کوچکترین عدد طبیعی مانند $n$، $n \geq ۴$، را پیدا کنید که بتوان از میان هر $n$ عدد صحیح متمایز چهار عدد مختلف مانند $a$، $b$، $c$ و $d$ طوری پیدا کرد که $a + b - c - d$ بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۸)

## راه‌حل

ابتدا فقط مجموعه‌هایی از عددهای صحیح را در نظر می‌گیریم که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۲۰ مختلف است. به‌ازای هر مجموعهٔ $k$ عضوی این‌چنینی، $\frac{k(k-۱)}{۲}$ جفت از عددها می‌توان تشکیل داد. اگر $۲۰ < \frac{k(k-۱)}{۲}$ (یعنی اگر $k \geq ۷$)، دو جفت از عددها مانند $(a, b)$ و $(c, d)$ وجود دارند که

$$a + b \equiv c + d \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲۰)$$

و $a$، $b$، $c$ و $d$ متمایزند.

در حالت کلی، مجموعه‌ای از ۹ عدد صحیح متمایز در نظر می‌گیریم. اگر باقیماندهٔ تقسیم هفت‌تا از این عددها بر ۲۰ مختلف باشد، بنابر آنچه در بالا گفتیم کار تمام شده است. فرض کنید باقیماندهٔ حداکثر شش‌تا از عددهای این مجموعه بر ۲۰ مختلف باشد، یعنی دست‌کم سه‌تا از باقیمانده‌ها تکراری باشند. در این صورت یا چهار عدد مانند $a$، $b$، $c$ و $d$ وجود دارند که

$$a \equiv b \equiv c \equiv d \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲۰)$$

یا دو جفت از عددها مانند $(a, c)$ و $(b, d)$ وجود دارند که

$$a \equiv c \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲۰), \qquad b \equiv d \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲۰)$$

در هر دو حالت، چهارتایی $(a, b, c, d)$ ویژگی موردنظر را دارد.

به‌سادگی می‌توان مجموعه‌ای از ۸ عدد پیدا کرد که ویژگی موردنظر را نداشته باشد:

$$\{۰, ۲۰, ۴۰, ۱, ۲, ۴, ۷, ۱۲\}$$

باقیماندهٔ تقسیم این عددها بر ۲۰ به ترتیب ۰، ۰، ۰، ۱، ۲، ۴، ۷ و ۱۲ است. ویژگی این باقیمانده‌ها این است که هر یک از آنها که صفر نیست از مجموع هر دوتای دیگر که از آن کوچکترند بزرگتر است و مجموع هر دوتا از آنها از ۲۰ کوچکتر است. فرض کنید $a$، $b$، $c$ و $d$ باقیمانده‌های چهارتا از عددهای متمایز این مجموعه باشند. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که $a$ بزرگترین این عددهاست (زیرا $a$ را می‌توان با $b$ عوض کرد و می‌توان آن را پس از ضرب کردن در ۱−، که در بخش‌پذیری آن بر ۲۰ تأثیری ندارد، با $c$ یا $d$ هم عوض کرد). بنابراین $a$ یکی از باقیمانده‌های غیرصفر است و

$$۰ < a - c - d \leq a + b - c - d \leq a + b < ۲۰$$

بنابراین $a + b - c - d$ بر ۲۰ بخش‌پذیر نیست.

بنابراین کمترین مقدار $n$ برابر با ۹ است.

۷. پستچی نامه‌ها را به نوزده خانهٔ ضلع شرقی خیابان می‌برد. او متوجه شده است که هر روز، از هر دو

خانهٔ همسایه حداکثر یکی نامه دارد و هر روز تعداد خانه‌هایی که پشت سر هم هستند و نامه ندارند بیشتر از دوتا نبوده است. چند الگوی متمایز برای رساندن نامه‌ها وجود دارد؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۲۰۰۱)

### راه‌حل اول

از شرط اول نتیجه می‌شود که در یک روز حداکثر ده خانه نامه دارند و از شرط دوم نتیجه می‌شود که در یک روز دست‌کم شش خانه نامه دارند. اگر شش خانه نامه داشته باشند، باید درکل دست‌کم پنج خانه میان آنها باشد، که این خانه‌ها نامه ندارند. هشت خانهٔ دیگری را که نامه ندارند باید در هفت فضای خالی مجاور شش خانه‌ای که نامه دارند توزیع کرد. این کار را می‌توان به ۷ طریق انجام داد: در هر انتهای خیابان دو خانه قرار دهید و چهارتای دیگر را به $\binom{۵}{۴}$ یا ۵ طریق توزیع کنید، یا در هر یک از هفت فضای خالی یک خانه قرار دهید و یک خانهٔ دیگر را در یکی از دو طرف خیابان قرار دهید. اگر هفت خانه نامه داشته باشند، هشت فضای خالی به‌وجود می‌آید که در میان شش‌تا از آنها باید دست‌کم یک خانه باشد که نامه‌ای ندارد. شش خانهٔ باقی‌مانده را که نامه ندارند می‌توان به ۱۱۳ طریق در میان این هشت فضای خالی توزیع کرد: شش‌تا از هشت فضای خالی را می‌توان به $\binom{۸}{۶}$ یا ۲۸ طریق انتخاب کرد و یک خانه در هر یک از آنها قرار داد؛ در هر دو انتهای خیابان می‌توان دو خانه قرار داد و دو فضای خالی میانی را می‌توان به $\binom{۶}{۲}$ یا ۱۵ طریق انتخاب کرد؛ در یک انتهای خیابان می‌توان دو خانه قرار داد و چهار فضای خالی را می‌توان به $\binom{۷}{۴}۲$ یا ۷۰ طریق انتخاب کرد و در هر یک از آنها یک خانه قرار داد. اگر به همین روش استدلال کنیم، معلوم می‌شود که وقتی هشت خانه نامه دارند $\binom{۹}{۴} + ۱ + \binom{۸}{۲}۲$ یا ۱۸۳ الگو و وقتی نه خانه نامه دارند $\binom{۱۰}{۲} + ۲$ یا ۴۷ الگو وجود دارد. وقتی ده خانه نامه دارند فقط یک الگو وجود دارد و بنابراین تعداد کل الگوها برابر است با

$$۷ + ۱۱۳ + ۱۸۳ + ۴۷ + ۱ = ۳۵۱$$

### راه‌حل دوم

رشته‌ای $n$رقمی از رقمهای ۰ و ۱ در نظر بگیرید که به ترتیب نشانهٔ نامه نداشتن یا نامه داشتن هستند. چنین دنباله‌ای را پذیرفتنی می‌نامیم، هرگاه در آن ۱۱ یا ۰۰۰ وجود نداشته باشد. فرض کنید $f_n$ برابر با تعداد رشته‌های $n$رقمی پذیرفتنی باشد، $a_n$ برابر با تعداد رشته‌های $n$رقمی پذیرفتنی‌ای باشد که در آنها ۰۰ پس از اولین رقم ۱ از سمت چپ آمده است و $b_n$ برابر با تعداد رشته‌های $n$رقمی پذیرفتنی‌ای باشد که در آنها ۰۱ پس از اولین رقم ۱ از سمت چپ آمده است. توجه کنید که اگر $n \geq ۵$، $f_n = a_n + b_n$. اگر اولین ۱۰۰ از سمت چپ را حذف کنیم معلوم می‌شود $b_n = f_{n-۳}$ و اگر اولین ۱۰۱ از سمت چپ را حذف کنیم معلوم می‌شود

$b_n = f_{n-۲}$. درنتیجه، اگر $n \geq ۵$، $f_n = f_{n-۲} + f_{n-۳}$. به‌سادگی می‌توان حساب کرد که $f_۱ = ۲$، $f_۲ = ۳$، $f_۳ = ۴$ و $f_۴ = ۷$. اکنون می‌توان از رابطهٔ بازگشتی به‌دست آمده استفاده کرد و نتیجه گرفت $f_{۱۹} = ۳۵۱$.

۸. به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, ۱۱$ فرض کنید $M_i$ مجموعه‌ای پنج‌عضوی باشد و اگر $۱ \leq i < j \leq ۱۱$، $M_i \cap M_j \neq \varnothing$. فرض کنید $m$ بزرگترین عددی باشد که بتوان مجموعه‌هایی مانند $M_{i_۱}$، ... و $M_{i_m}$ را طوری انتخاب کرد که $\bigcap_{k=۱}^{m} M_{i_k} \neq \varnothing$. کمترین مقدار $m$ را به‌ازای همهٔ انتخابهای ممکن $M_i$ها پیدا کنید.

(چین، ۱۹۹۶)

## راه‌حل

کمترین مقدار $m$ برابر با ۴ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم $m \geq ۴$. فرض کنید $X = \bigcup_{i=۱}^{۱۱} M_i$ و به‌ازای هر $x$ در $X$ فرض کنید $n(x)$ تعداد $i$هایی باشد که $x \in M_i$، $۱ \leq i \leq ۱۱$. در این صورت

$$m = \max\{n(x) : \ x \in X\}$$

توجه کنید که

$$\sum_{x\in X} n(x) = ۵۵$$

چون $M_i \cap M_j \neq \varnothing$، $\binom{۱۱}{۲}$ یا ۵۵ جفت از مجموعه‌های موردنظر اشتراکشان ناتهی است. از طرف دیگر، هر عضوی مانند $x$ در $\binom{n(x)}{۲}$ تا از این اشتراکها وجود دارد. بنابراین

$$\sum_{x\in X} \binom{n(x)}{۲} \geq \binom{۱۱}{۲} = ۵۵$$

پس

$$\sum_{x\in X} \frac{n(x)(n(x)-۱)}{۲} \geq ۵۵$$

و درنتیجه

$$\frac{m-۱}{۲} \sum_{x\in X} n(x) \geq ۵۵$$

پس $\frac{m-۱}{۲} \geq ۱$ یا $m \geq ۳$. اگر $m = ۳$، در همهٔ نابرابریهای بالا تساوی برقرار است؛ به‌طور دقیقتر، به‌ازای هر $x$، $n(x) = m = ۳$. اما چون

$$\sum_{x\in X} n(x) = ۵۵$$

و ۵۵ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، ممکن نیست همهٔ $n(x)$ها برابر با ۳ باشند. بنابراین $m \geq ۴$.
اکنون ثابت می‌کنیم حالتی پیش می‌آید که $m = ۴$. جدول ۴ × ۴ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{array}$$

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که به‌ازای $m = ۴$، مجموعه‌های

$$M_۱ = \{a, b, c, d, H\}, \quad M_۲ = \{e, f, g, h, H\}$$

$$M_۳ = \{۱, ۲, ۳, ۴, H\}, \quad M_۴ = \{۵, ۶, ۷, ۸, H\}$$

(که آنها را مجموعه‌های افقی می‌نامیم) و

$$M_۵ = \{a, e, ۱, ۵, V\}, \quad M_۶ = \{b, f, ۲, ۶, V\}$$

$$M_۷ = \{c, g, ۳, ۷, V\}, \quad M_۸ = \{d, h, ۴, ۸, V\}$$

(که آنها را مجموعه‌های عمودی می‌نامیم) و

$$M_۹ = \{a, f, ۳, ۸, D\}, \quad M_{۱۰} = \{b, g, ۴, ۵, D\}$$

$$M_{۱۱} = \{c, h, ۱, ۶, D\}$$

(که آنها را مجموعه‌های قطری می‌نامیم) ویژگیهای موردنظر را دارند.

**۹.** هر دومینو را زوجی مرتب از عددهای طبیعی تعریف می‌کنیم. هر دنبالهٔ متناسب از دومینوها دنباله‌ای از دومینوهای متمایز است که در آن درایهٔ اول هر زوج، پس از زوج اول، برابر است با درایهٔ دوم زوج پیش از آن و هیچ دو زوجی مانند $(i, j)$ و $(j, i)$ در آن به چشم نمی‌خورد. فرض کنید $D_{۴۰}$ مجموعهٔ همهٔ دومینوهایی باشد که درایه‌های آنها از ۴۰ بزرگتر نیستند. طول بلندترین دنبالهٔ متناسب از دومینوها را که می‌توان با دومینوهای $D_{۴۰}$ تشکیل داد پیدا کنید.
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۸)

### راه‌حل اول

فرض کنید $A_n = \{۱, ۲, ۳, \ldots, n\}$ و $D_n$ مجموعهٔ دومینوهایی باشد که می‌توان از عددهای طبیعی مجموعهٔ $A_n$ تشکیل داد. هر عدد در $A_n$ مانند $k$ در $۲(n - ۱)$ دومینو در $D_n$ ظاهر می‌شود؛ پس حداکثر $n - ۱$ بار در دنباله‌ای متناسب از عضوهای $D_n$ ظاهر می‌شود. بجز عددهای $i$ و $j$ که در ابتدا و انتهای دنباله‌ای متناسب آمده‌اند، تعداد دفعه‌هایی که بقیهٔ عددها در

این دنباله ظاهر می‌شوند عددی فرد است. بنابراین، اگر $n$ عددی زوج باشد، هر عدد دیگری بجز $i$ و $j$ حداکثر در $n-۲$ دومینو ظاهر می‌شود. پس کران بالای تعداد دومینوهای طولانیترین دنبالهٔ متناسب از عضوهای $D_n$ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left((n-۲)^۲+۲(n-۱)\right)=\frac{n^۲-۲n+۲}{۲}$$

درحقیقت، به‌ازای هر عدد زوج مانند $n$ این کران دست‌یافتنی است. به‌ازای $n=۲$، به‌سادگی می‌توان درستی این مطلب را تحقیق کرد، پس به استقرا فرض کنید که به‌ازای $n$ای می‌توان دنباله‌ای پیدا کرد که طولش این کران باشد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود، می‌توانیم فرض کنیم $i=۱$، $j=۲$ و ${}_pX_{p+۲}$ دنباله‌ای چهارتایی از دومینوها به شکل

$$(p,n+۱)(n+۱,p+۱)(p+۱,n+۲)(n+۲,p+۲)$$

باشد. با افزودن

$${}_۲X_۴,{}_۴X_۶,\ldots,{}_{n-۲}X_n,(n,n+۱)(n+۱,۱)(۱,n+۲)(n+۲,۲)$$

به دنبالهٔ متناسب مفروض، دنباله‌ای متناسب به‌دست می‌آوریم که از ۱ شروع و به ۲ ختم می‌شود و طولش برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{n^۲-۲n+۲}{۲}+۴\times\frac{n-۲}{۲}+۴&=\frac{n^۲+۲n+۲}{۲}\\&=\frac{(n+۲)^۲-۲(n+۲)+۲}{۲}\end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات استقرایی کامل شده است. به‌ویژه، وقتی که $n=۴۰$، طول بلندترین دنبالهٔ متناسب برابر است با ۷۶۱.

### راه‌حل دوم

برای نشان دادن هر دنبالهٔ متناسب می‌توانیم درایه‌های مشترک زوجهای مرتب مجاور را یک بار بنویسیم. مثلاً

$$(۴,۷),(۷,۳),(۳,۵)$$

را با

$$۴,۷,۳,۵$$

نشان می‌دهیم. رأسهای $n$ضلعی‌ای منتظم را با عددهای ۱، ۲، ... و $n$ شماره‌گذاری کنید. به این ترتیب، هر دومینو را می‌توان با پاره‌خطی جهتدار از یک رأس این $n$ضلعی به رأس دیگری از آن نشان داد و هر دنبالهٔ متناسب را می‌توان با مسیری که از هیچ‌یک از پاره‌خطهایش دو بار رد

نمی‌شود نشان داد. هر بار که چنین مسیری به رأسی غیرانتهایی می‌رسد باید از آن خارج شود. بنابراین، وقتی که $n$ عددی زوج است، ممکن نیست که چنین مسیری از هر یک از پاره‌خطها بگذرد، زیرا از هر رأس تعدادی فرد پاره‌خط خارج شده است. با این حال، می‌توان $\frac{۱}{۲}(n-۲)$ پاره‌خط مناسب را انتخاب و آنها را طوری حذف کرد که $n-۲$ پاره‌خط از $n-۲$ رأس خارج شده باشند و از دقیقاً دوتا از رأسها تعداد فردی پاره‌خط خارج شده باشد. در این وضعیت، می‌توان مسیری پیدا کرد که از هر یک از پاره‌خطهای باقی‌مانده دقیقاً یک بار می‌گذرد و از یکی از دو رأس نامبرده شروع و به دیگری ختم می‌شود. طول این مسیر برابر است با $\binom{n}{۲}-\frac{۱}{۲}(n-۲)$، که وقتی $n=۴۰$ برابر است با ۷۶۱.

### یادداشت

وقتی که $n$ عددی فرد است، می‌توان دنباله‌ای متناسب به طول $\binom{n}{۲}$ از دومینوهای عضو $D_n$ پیدا کرد. در این حالت، درایهٔ دوم آخرین دومینو با درایهٔ اول اولین دومینو برابر است. به زبان نظریهٔ گراف، چنین چیزی مدار اویلری است.

۱۰. تعداد زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲۰۰۰\}$ را پیدا کنید که مجموع عضوهای هر یک از آنها بر ۵ بخش‌پذیر است.

(کیوهونگ کی، ریاضیات دبیرستانی، ۱/۱۹۹۴)

### راه‌حل

جواب $\frac{۱}{۲}(۲^{۲۰۰۰}+۲^{۴۰۲})$ است.

چندجمله‌ای

$$f(x)=(۱+x)(۱+x^{۲})\cdots(۱+x^{۲۰۰۰})$$

را در نظر بگیرید. در این صورت تناظری یک‌به‌یک میان زیرمجموعهٔ $\{a_۱,a_۲,\ldots,a_m\}$ از مجموعهٔ $\{۱,۲,\ldots,۲۰۰۰\}$ و جملهٔ $x^{a_۱}x^{a_۲}\cdots x^{a_m}$ در حاصل‌ضرب پرانتزها وجود دارد. بنابراین باید مجموع ضریبهای جمله‌هایی مانند $x^{۵k}$ را پیدا کنیم، که در آن $k$ عددی طبیعی است. این مجموع را $S$ بنامید.

فرض کنید $\xi=e^{\frac{۲\pi i}{۵}}$، یعنی $\xi$ ریشه‌ای پنجم از واحد است. در این صورت

$$\xi^{۵}=۱,\qquad ۱+\xi+\xi^{۲}+\xi^{۳}+\xi^{۴}=۰$$

بنابراین

$$S=\frac{۱}{۵}\sum_{j=۱}^{۵}f(\xi^{j})$$

توجه کنید که $\xi$، $\xi^۲$، $\xi^۳$، $\xi^۴$ و $\xi^۵$ ریشه‌های $g(x) = x^۵ - ۱$ هستند، یعنی

$$g(x) = x^۵ - ۱ = (x - \xi)(x - \xi^۲)(x - \xi^۳)(x - \xi^۴)(x - \xi^۵)$$

درنتیجه

$$g(-۱) = -۲ = (-۱ - \xi)(-۱ - \xi^۲)(-۱ - \xi^۳)(-۱ - \xi^۴)(-۱ - \xi^۵)$$

بنابراین

$$(۱ + \xi)(۱ + \xi^۲)(۱ + \xi^۳)(۱ + \xi^۴)(۱ + \xi^۵) = ۲$$

و $f(\xi) = ۲^{۴۰۰}$. به همین ترتیب معلوم می‌شود

$$f(\xi^j) = ۲^{۴۰۰}, \quad j = ۲, ۳, ۴$$

سرانجام،

$$f(\xi^۵) = f(۱) = ۲^{۲۰۰۰}$$

پس

$$S = \frac{۱}{۵}(۴ \times ۲^{۴۰۰} + ۲^{۲۰۰۰}) = \frac{۱}{۵}(۲^{۴۰۲} + ۲^{۲۰۰۰})$$

۱۱. فرض کنید $X$ مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی و $A$ زیرمجموعه‌ای از $X$ باشد. ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از $X$ مانند $B$ وجود دارد که $A$ برابر است با مجموعهٔ عضوهایی از $X$ که تعداد فردی از عضوهای $B$ را می‌شمارند.

(دوره تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

$B$ را گام‌به‌گام می‌سازیم. فرض کنید $B = \varnothing$ و عضوهای $X$ را از بزرگتر به کوچکتر در نظر بگیرید. به‌ازای هر عضو $X$ مانند $x$ ببینید که آیا زوجیت تعداد عضوهایی از $B$ که بر $x$ بخش‌پذیرند آنچه می‌خواهیم هست یا نه. (یعنی، اگر $x \in A$، $x$ تعداد فردی از عضوهای $B$ را بشمارد؛ اگر $x \in X - A$، $x$ تعداد زوجی از عضوهای $B$ را بشمارد.) اگر نبود، $x$ را به $B$ اضافه کنید. بنابراین، اولین عضوی که به $B$ اضافه می‌شود بزرگترین عضو $A$ است. اکنون توجه کنید که این روند شرط بخش‌پذیری را برای هیچ عضوی بزرگتر از $x$ عوض نمی‌کند و معلوم می‌شود که $x$ این شرط را دارد یا نه. بنابراین، وقتی همهٔ عضوهای $X$ را به این ترتیب بررسی کنیم، عضوهای $X$ که ویژگی موردنظر را دارند مشخص می‌شوند و مجموعهٔ $B$ ویژگی موردنظر را دارد.

۱۲. ۲۰۰۰ کارت داریم که آنها را با عددهای طبیعی از ۱ تا ۲۰۰۰ طوری شماره‌گذاری کرده‌ایم که عددهای روی کارتهای متفاوت با هم فرق دارند. کارتهای این دسته کارت به ترتیب عددهای نوشته

شده رویشان نیستند. کارت رویی را می‌کشیم و روی میز می‌گذاریم و کارت بعدی را زیر این دسته کارت می‌گذاریم. کارت رویی جدید را می‌کشیم و روی میز در سمت راست کارتی که قبلاً روی میز گذاشته‌ایم قرار می‌دهیم و کارت بعدی را زیر این دسته کارت می‌گذاریم. این کار را آنقدر تکرار می‌کنیم که همهٔ کارتها روی میز قرار بگیرند. معلوم شده است که شمارهٔ کارتها از چپ به راست به ترتیب صعودی است:

$$۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۹۹۹, ۲۰۰۰$$

در دسته کارت اولیه چندتا کارت بالای کارت شمارهٔ ۱۹۹۹ قرار داشته‌اند؟
(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۲۰۰۰)

## راه‌حل اول

روندی را که طی کرده‌ایم برعکس کنید. ابتدا کارت شمارهٔ ۲۰۰۰ را بردارید. سپس کارت شمارهٔ ۱۹۹۹ را بردارید، آن را روی دسته کارت بگذارید و کارت زیرین را روی دسته کارت قرار دهید. بعد کارت شمارهٔ ۱۹۹۸ را بردارید. آن را روی دسته کارت بگذارید و کارت زیرین را روی دسته کارت قرار دهید. اکنون کارت شمارهٔ ۱۹۹۹ بالای دسته کارت سه‌تایی قرار دارد. توجه کنید که وقتی $m$ کارت دیگر را برداریم، کارت رویی دسته کارت $m$تایی، کارت رویی دسته کارت $۲m$تایی می‌شود (و این $m$ کارت از زیر دسته کارت به روی آن می‌آیند). به استقرا معلوم می‌شود که اگر تعداد کارتهای دسته $۲^k \times ۳$ باشد، که در آن $k$ عددی صحیح و نامنفی است که $۲۰۰۰ > ۲^k \times ۳$، کارت شمارهٔ ۱۹۹۹ روی دسته کارت است. به‌ویژه، آخرین باری که این وضعیت پیش می‌آید درست پس از وقتی است که $۲^۹ \times ۳$ یا ۱۵۳۶ کارت را برداشته‌ایم. در این صورت کارتهای شمارهٔ ۱ تا شمارهٔ ۴۶۴ روی میز باقی مانده‌اند. پس از اینکه هر یک از کارتهای شمارهٔ ۴۶۴، ۴۶۳، ... و ۲ را برمی‌داریم و روی دسته کارت می‌گذاریم، کارت دیگری را هم از زیر دسته کارت روی آن می‌گذاریم. در آخر، کارت شمارهٔ ۱ را هم روی دسته کارت می‌گذاریم و دسته کارت به وضعیت اولیه‌اش درمی‌آید. بنابراین $۱ + ۴۶۳ \times ۲$ یا ۹۲۷ کارت روی کارت شمارهٔ ۱۹۹۹ قرار داشته‌اند.

## راه‌حل دوم

چون کاری که کرده‌ایم باعث شده کارتها برحسب شماره‌هایشان به ترتیب صعودی روی میز قرار بگیرند، کارت شمارهٔ ۱۹۹۹ کارت یکی مانده به آخر است که روی میز قرارگرفته است. برای اینکه رد این کارت را بگیریم، ابتدا توجه کنید که اگر دسته‌ای از $۲^m$ کارت داشته باشیم، کارتی که یکی مانده به آخر روی میز قرارگرفته است در ابتدا در جای $۲^{m-۱}$ در دسته کارت بوده است. اکنون دسته کارتی را در نظر بگیرید که $۲^{۱۱}$ یا ۲۰۴۸ کارت دارد. پس از اینکه ۴۸ کارت را روی میز قرار دادیم و ۴۸ کارت دیگر را از روی دسته کارت برداشتیم و در زیر آن گذاشتیم، دسته‌ای ۲۰۰۰

کارتی باقی می‌ماند. کارتهایی را که روی میزند کنار بگذارید. کارتی که از دسته ۲۰۰۰ کارتی یکی مانده به آخر روی میز می‌گذاریم کارتی است که در دسته ۲۰۴۸ کارتی در جای ۱۰۲۴ است. جای این کارت در دسته ۲۰۰۰ کارتی (۴۸ + ۴۸) − ۱۰۲۴ یا ۹۲۸ است، پس ۹۲۷ کارت روی این کارت قرار دارند.

۱۳. با صفحه‌های نمایش ۱ × ۱ صفحه‌ای ۲۰۰۲ × ۲۰۰۰ تشکیل دهید. در آغاز بیش از ۲۰۰۱ × ۱۹۹۹تا از صفحه‌های نمایش ۱ × ۱ روشن‌اند. اگر در صفحه‌ای ۲ × ۲ سه‌تا از صفحه‌های ۱ × ۱ خاموش باشند، چهارمی هم خودبه‌خود خاموش می‌شود. ثابت کنید هیچ‌گاه کل صفحه خاموش نمی‌شود.

**راه‌حل**

برای اینکه صفحه‌ای ۱ × ۱ خاموش شود باید چهارمین صفحهٔ صفحه‌ای ۲ × ۲ باشد که سه‌تا از صفحه‌هایش خاموش‌اند. برعکس، از هر صفحهٔ ۲ × ۲ فقط یک بار می‌توان برای خاموش کردن صفحه‌ای ۱ × ۱ استفاده کرد. چون ۲۰۰۱ × ۱۹۹۹ صفحهٔ ۲ × ۲ داریم، حداکثر ۲۰۰۱ × ۱۹۹۹ صفحهٔ ۱ × ۱ را می‌توانیم خاموش کنیم. بنابراین کل صفحه هیچ‌گاه خاموش نمی‌شود.

۱۴. مدیری در طول روز در زمانهای مختلفی نامه‌ای را برای تایپ به منشی می‌دهد و هر بار نامه را روی ستون نامه‌های روی میز منشی می‌گذارد. هر وقت که موقعش برسد، منشی نامهٔ رویی را برمی‌دارد و آن را تایپ می‌کند. امروز نه نامه باید تایپ شوند و مدیر آنها را به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ به منشی می‌دهد. هنگام ناهار، منشی به همکارش می‌گوید که نامهٔ ۸ تایپ شده است اما از اینکه پیش از ظهر چه نامه‌هایی تایپ شده است هیچ‌چیز نمی‌گوید. همکار منشی از خود می‌پرسد که بعد از ناهار کدام‌یک از نه نامه و به چه ترتیبی باید تایپ شوند. براساس اطلاعات بالا، چندتا ترتیب تایپ بعد از ناهار ممکن است وجود داشته باشد؟ (اینکه هیچ نامه‌ای برای تایپ نمانده باشد هم یکی از حالتهای ممکن است.)

(آزمون دعوتی ریاضیات امریکا، ۱۹۹۸)

**راه‌حل**

در هر زمانی، نامه‌ها از بالا به پایین به ترتیب نزولی قرار دارند. بنابراین دنبالهٔ نامه‌ها به‌طور یکتا با مجموعهٔ نامه‌ها مشخص می‌شود. دو حالت داریم: نامهٔ ۹ پیش از ناهار به منشی داده شده است یا بعد از ناهار.

**حالت ۱.** چون نامهٔ ۹ پیش از ناهار به منشی داده شده است، هیچ نامهٔ دیگری داده نخواهد شد و تعداد ترتیبهای ممکن تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $T = \{۱, ۲, \ldots, ۶, ۷, ۹\}$ است،

که ممکن است نامه‌های متناظرشان باقی مانده باشند. درحقیقت، هر یک از زیرمجموعه‌های $T$ ممکن است جواب باشد، زیرا ممکن است منشی نامه‌هایی را که در این زیرمجموعه نیستند بلافاصله پس از تحویل آنها تایپ کند و هیچ نامهٔ دیگری را تایپ نکند. چون $T$ هشت عضو دارد، تعداد زیرمجموعه‌هایش (با احتساب مجموعهٔ تهی) برابر است با $۲^۸$ یا ۲۵۶.

**حالت ۲.** چون نامهٔ ۹ پیش از ناهار به منشی داده نشده است، سؤال این است که ردیف قرار دادن این نامه برای تایپ کجاست؟ هر جایی در هر زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۶, ۷\}$ که نامه‌های متناظرش به هنگام ناهار باقی مانده‌اند ممکن است جای نامهٔ ۹ باشد. مثلاً، اگر هنگام ناهار نامه‌های باقی‌مانده ۶، ۳ و ۲ باشند، ترتیب نامه‌ها ممکن است ۶، ۳، ۹ و ۲ باشد، زیرا ممکن است مدیر درست پس از اینکه نامهٔ ۳ تایپ شد نامهٔ ۹ را بدهد. به‌نظر می‌رسد که در دنباله‌ای از $k$ نامه، $k+۱$ جا برای قرار دادن نامهٔ ۹ وجود دارد. با این وجود، اگر نامهٔ ۹ را در ابتدای این دنباله قرار دهیم (یعنی روی ستون نامه‌ها بگذاریم، درنتیجه این نامه پیش از اینکه نامه‌های تایپی پس از ناهار تایپ شوند رسیده است)، یکی از ترتیبهای حالت (۱) را تکرار کرده‌ایم. بنابراین، اگر پس از بازگشتن از ناهار $k$ نامه مانده باشند، $k$ جا برای گذاشتن نامهٔ ۹ وجود دارد (و هیچ ترتیبی از حالت (۱) را تکرار نکرده‌ایم). بنابراین تعداد ترتیبهای جدید در حالت (۲) برابر است با

$$\sum_{k=۰}^{۷} k\binom{۷}{k} = ۷(۲^{۷-۱}) = ۴۴۸$$

بنابراین تعداد ترتیبهای تایپ کردن نامه‌ها برابر است با $۴۴۸ + ۲۵۶$ که برابر است با ۷۰۴.

**۱۵.** فرض کنید $n$ عددی طبیعی باشد. ثابت کنید

$$\sum_{k=۰}^{n} ۲^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{۲} \rfloor} = \binom{۲n+۱}{n}$$

(ووشانگ شو، چین، ۱۹۹۴)

**راه‌حل اول** (از چن‌چانگ ژو)

به‌ازای هر چندجمله‌ای مانند $p(x)$ فرض کنید $[x^n](p(x))$ ضریب جملهٔ $x^n$ در $p(x)$ باشد. فرض کنید $p(x) = (x+۱)^{۲n}$. به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$[x^{n-۱}](p(x)) + [x^n](p(x)) = \binom{۲n}{n-۱} + \binom{۲n}{n} = \binom{۲n+۱}{n}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم

$$[x^{n-۱}](p(x)) + [x^n](p(x)) = \sum_{k=۰}^{n} ۲^k \binom{n}{k} = \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{۲} \rfloor}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}p(x) &= (x+1)^{2n} = (x^2+2x+1)^n \\ &= \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!}(x^2)^i(2x)^j \\ &= \sum_{0\le i+j\le n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} 2^j x^{2i+j}\end{aligned}$$

که در اینجا $i$، $j$ و $k$ عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. بنابراین

$$\begin{aligned}&[x^{n-1}](p(x)) + [x^n](p(x)) \\ &= \sum_{\substack{0\le i+j\le n\\ 2i+j=n}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\, 2^j + \sum_{\substack{0\le i+j\le n\\ 2i+j=n-1}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\, 2^j \\ &= \sum_{\substack{0\le i+(n-2i)\le n\\ 0\le i,n-2i}} \frac{n!}{i!(n-2i)!i!}\, 2^{n-2i} \\ &\quad + \sum_{\substack{0\le i+(n-2i-1)\le n\\ 0\le i,n-2i-1}} \frac{n!}{i!(n-2i-1)!(i+1)!}\, 2^{n-2i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2i}\binom{2i}{i} 2^{n-2i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} \binom{n}{2i+1}\binom{2i+1}{i} 2^{n-2i-1} \\ &= \sum_{\substack{s=0\\ \text{زوج است } s}}^{n} \binom{n}{s}\binom{s}{\lfloor \frac{s}{2}\rfloor} 2^{n-s} + \sum_{\substack{s=1\\ \text{فرد است } s}}^{n} \binom{n}{s}\binom{s}{\lfloor \frac{s}{2}\rfloor} 2^{n-s} \\ &= \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{s}{\lfloor \frac{s}{2}\rfloor} 2^{n-s}\end{aligned}$$

اگر در عبارت آخر فرض کنیم $n-s=k$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}[x^{n-1}(p(x)) + [x^n](p(x)) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2}\rfloor} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2}\rfloor} 2^k\end{aligned}$$

**راه‌حل دوم** (از جیانگ گو)

مدلی ترکیبیاتی را در نظر می‌گیریم. $۲n$ دانش‌آموز، $n$ دانش‌آموزکلاس اول و $n$ دانش‌آموزکلاس دوم، و یک نفر مربی در نظر بگیرید. دانش‌آموزان کلاس اول را با $a_۱$، $a_۲$، . . . و $a_n$ و دانش‌آموزان کلاس دوم را با $b_۱$، $b_۲$، . . . و $b_n$ نشان می‌دهیم. به‌ازای $۱ \leq i \leq n$، فرض کنید $(a_i, b_j)$ جفت متشکل از $a_i$ و $b_i$ باشد. به این دانش‌آموزان $n$ بلیط برای دیدن یک بازی فوتبال پرهیجان اختصاص داده‌اند.

تعداد راههایی را که می‌توان $n$ دانش‌آموز برای دیدن این بازی انتخاب کرد حساب می‌کنیم. معلوم است که این تعداد برابر است با

$$\binom{۲n+۱}{n}$$

از طرف دیگر، می‌توانیم این تعداد را به‌روش زیر حساب کنیم. به‌ازای هر عدد صحیح و ثابت مانند $k$، $۱ \leq k \leq n$، $k$ جفت از $n$ جفت دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم و به هر جفت یک بلیط می‌دهیم. $۲^k\binom{n}{k}$ راه برای انتخاب $k$ جفت و برگزیدن یک دانش‌آموز از هر جفت برای رفتن به تماشای مسابقه وجود دارد. $n-k$ بلیط و $n-k$ جفت از دانش‌آموزان باقی مانده‌اند. $\lfloor\frac{n-k}{۲}\rfloor$ جفت انتخاب می‌کنیم و به هر یک از این جفتها دو بلیط می‌دهیم. تعداد راههای انجام این کار برابر است با

$$\binom{n-k}{\lfloor\frac{n-k}{۲}\rfloor}$$

تا اینجا $۲\lfloor\frac{n-k}{۲}\rfloor + k$ بلیط را پخش کرده‌ایم. این عدد را $S$ بنامید. اگر $n-k$ فرد باشد، آن‌وقت $S = n - ۱$ و آخرین بلیط را هم به مربی می‌دهیم؛ اگر $n-k$ زوج باشد، آن‌وقت $S = n$ و همهٔ بلیطها را پخش کرده‌ایم. به‌سادگی معلوم می‌شود که اگر $k$ همهٔ مقدارهای از ۱ تا $n$ را اختیار کند، همهٔ راههای پخش کردن $n$ بلیط را به‌دست آورده‌ایم. بنابراین تعداد راههای رفتن $n$ نفر به تماشای مسابقه برابر است با

$$\sum_{k=۰}^{n} ۲^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor\frac{n-k}{۲}\rfloor}$$

به این ترتیب

$$\sum_{k=۰}^{n} ۲^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{\lfloor\frac{n-k}{۲}\rfloor} = \binom{۲n+۱}{n}$$

**۱۶.** فرض کنید $m$ و $n$ عددهایی طبیعی باشند. فرض کنید می‌توان مستطیلی را با ترکیبی از نوارهای $m \times ۱$ افقی و نوارهای $۱ \times n$ عمودی فرش کرد. ثابت کنید می‌توان این مستطیل را تنها با استفاده از یکی از این دو نوع نوار فرش کرد.

(محفل ریاضی حوزهٔ خلیج، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

فرض کنید ابعاد مستطیل $a \times b$ باشد. معلوم است که $a$ و $b$ هر دو عددهایی طبیعی‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم $a$ بر $m$ بخش‌پذیر است یا $b$ بر $n$ بخش‌پذیر است. فرض کنید $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ و $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$، یعنی $\zeta$ و $\xi$ به ترتیب ریشه‌ای $m$ام و ریشه‌ای $n$ام از واحدند. مستطیل موردنظر را به $ab$ مربع واحد تقسیم کنید و در مربع واقع در ستون $x$ام و سطر $y$ام عدد $\zeta^x\xi^y$ را بنویسید. مجموع عددهای نوشته شده در هر نوار عمودی برابر است با

$$\zeta^x\xi^y(1+\xi+\xi^2+\cdots+\xi^{n-1}) = \zeta^x\xi^y\frac{\xi^n-1}{\xi-1} = 0$$

به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که مجموع عددهای هر نوار افقی برابر با صفر است. چون مستطیل با این نوارها فرش شده است، مجموع عددهای نوشته شده در مستطیل صفر است. اما این مجموع برابر است با

$$(\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^a)(\xi+\xi^2+\cdots+\xi^b) = \zeta\xi \times \frac{\zeta^a-1}{\zeta-1} \times \frac{\xi^b-1}{\xi-1}$$

بنابراین $\zeta^a = 1$ یا $\xi^b = 1$، که درنتیجه به ترتیب $m \mid a$ یا $n \mid b$.

**۱۷.** دنبالهٔ

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

از عددهای حقیقی مفروض است. در هر مرحله، اگر دنباله به

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

تبدیل شده باشد، آن را با دنبالهٔ

$$|x_1-a|, |x_2-a|, \ldots, |x_n-a|$$

که در آن $a$ عددی حقیقی است، عوض می‌کنیم. در هر مرحله ممکن است مقدار $a$ تغییر کند.

**الف)** ثابت کنید همواره می‌توان دنباله‌ای به‌دست آورد که همهٔ جمله‌هایش صفرند.

**ب)** کمترین تعداد مرحله‌هایی را تعیین کنید که، بدون توجه به اینکه دنبالهٔ اولیه چه دنباله‌ای است، بتوانیم پس از این مرحله‌ها دنباله‌ای به‌دست بیاوریم که همهٔ جمله‌هایش صفرند.

**راه‌حل**

ابتدا ثابت می‌کنیم برای اینکه دنباله‌ای به‌دست بیاوریم که همهٔ جمله‌هایش صفرند، $n$ مرحله کافی است. فرض کنید پس از $k$ مرحله دنباله را با

$$\left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}\right)$$

نشان بدهیم و $a^{(k)}$ مقدار $a$ در مرحلهٔ $k$ام باشد که باید از جمله‌ها کم کنیم. فرض می‌کنیم $a^{(1)} = \frac{a_1 + a_2}{2}$. در این صورت

$$a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = \frac{1}{2}|a_1 - a_2|$$

سپس فرض می‌کنیم $a^{(2)} = \frac{a_1^{(1)} + a_2^{(1)}}{2}$ و به‌دست می‌آوریم

$$a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = a_3^{(2)} = \frac{1}{2}|a_1^{(1)} - a_2^{(1)}|$$

و همین‌طور کار را ادامه می‌دهیم. در مرحلهٔ $k$ام فرض می‌کنیم

$$a^{(k)} = \frac{a_1^{(k-1)} + a_2^{(k-1)}}{2}$$

و به‌دست می‌آوریم

$$a_1^{(k)} = a_2^{(k)} = \cdots = a_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{2}|a_1^{(k-1)} - a_2^{(k-1)}|$$

به این ترتیب، پس از $n - 1$ مرحله دنباله‌ای مانند

$$\left(a_1^{(a-1)}, a_2^{(n-1)}, \ldots, a_n^{(n-1)}\right)$$

به‌دست می‌آوریم که در آن

$$a_1^{(a-1)} = a_2^{(n-1)} = \cdots = a_n^{(n-1)}$$

در مرحلهٔ $n$ام فرض می‌کنیم $a^{(n)} = a_1^{(n-1)}$ و دنباله‌ای به‌دست می‌آوریم که همهٔ جمله‌هایش صفرند.

به استقرا روی $n$ ثابت می‌کنیم که در مورد دنبالهٔ

$$1, 2!, 3!, \ldots, n!$$

طی کردن $n$ مرحله لازم است. درستی حکم در حالت $n = 1$ معلوم است.

فرض کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند $k$ حکم درست باشد، یعنی برای تبدیل کردن دنبالهٔ

$$1, 2!, 3!, \ldots, k!$$

به دنباله‌ای که همهٔ جمله‌هایش صفرند، طی کردن دست‌کم $k$ مرحله لازم باشد. ثابت می‌کنیم برای اینکه دنبالهٔ

$$1, 2!, 3!, \ldots, (k+1)!$$

را به دنباله‌ای تبدیل کنیم که همهٔ جمله‌هایش صفرند، دست‌کم باید $k + 1$ مرحله را طی کنیم.

نکته اصلی این است که اگر $m$ کمترین تعداد مرحله‌های لازم برای تبدیل کردن دنبالهٔ

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

به دنباله‌ای باشد که همهٔ جمله‌هایش صفرند، آن‌وقت، به‌ازای $1 \leq k \leq m$،

$$m^{(k-1)} \leq a^{(k)} \leq M^{(k-1)}$$

که در آن

$$m^{(k-1)} = \min\{a_1^{(k-1)}, a_2^{(k-1)}, \ldots, a_n^{(k-1)}\}$$

و

$$M^{(k-1)} = \max\{a_1^{(k-1)}, a_2^{(k-1)}, \ldots, a_n^{(k-1)}\}$$

درحقیقت، اگر $a^{(k)} < m^{(k-1)}$، آن‌وقت به‌ازای هر $i$،

$$\begin{aligned} a_i^{(k+1)} &= \left|a_i^{(k)} - a^{(k+1)}\right| \\ &= \left|\left|a_i^{(k-1)} - a^{(k)}\right| - a^{(k+1)}\right| \\ &= \left|a_i^{(k-1)} - a^{(k)} - a^{(k+1)}\right| \\ &= \left|a_i^{(k-1)} - \left(a^{(k)} + a^{(k+1)}\right)\right| \end{aligned}$$

در مرحلهٔ $k$ام می‌توانیم $a$ را برابر با $a^{(k)} + a^{(k+1)}$ انتخاب کنیم و یک مرحله را حذف کنیم، که این هم با این فرض که $m$ کمترین تعداد مرحله‌های مورد نیاز است تناقض دارد. از طرف دیگر، اگر $a^{(k)} > M^{(k-1)}$، آن‌وقت به‌ازای هر $i$،

$$\begin{aligned} a_i^{(k+1)} &= \left|a_i^{(k)} - a^{(k+1)}\right| \\ &= \left|\left|a_i^{(k-1)} - a^{(k)}\right| - a^{(k+1)}\right| \\ &= \left|-a_i^{(k-1)} + a^{(k)} - a^{(k+1)}\right| \\ &= \left|a_i^{(k-1)} - \left(a^{(k)} - a^{(k+1)}\right)\right| \end{aligned}$$

می‌توانیم در مرحلهٔ $k$ام $a$ را برابر با $a^{(k)} - a^{(k+1)}$ انتخاب کنیم و یک مرحله را حذف کنیم، که با این فرض که $m$ کمترین تعداد مرحله‌های مورد نیاز است تناقض دارد.

از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می‌شود

$$M^{(0)} \geq M^{(1)} \geq \cdots \geq M^{(m)}$$

و درنتیجه به‌ازای هر $k$، $a^{(k)} \leq M^{(0)}$. همچنین، توجه کنید که چون همواره $m^{(k)}$ نامنفی است، به‌ازای هر $k$، $a^{(k)} \geq 0$.

اکنون آماده‌ایم که گام استقرایی را ثابت کنیم. فرض کنید که بتوان در $k$ مرحله دنبالهٔ

$$۱, ۲!, ۳!, \ldots, (k+۱)!$$

را به دنباله‌ای تبدیل کرد که همهٔ جمله‌هایش صفرند. در این صورت زیردنبالهٔ

$$۱, ۲!, ۳!, \ldots, k!$$

از این دنباله را هم می‌توان به دنباله‌ای تبدیل کرد که همهٔ جمله‌هایش صفرند. بنابر فرض استقرا، کمترین تعداد مرحله‌هایی که لازم است تا دنبالهٔ

$$۱, ۲!, ۳!, \ldots, k!$$

را به دنباله‌ای تبدیل کرد که همهٔ جمله‌هایش صفرند $k$ مرحله است. بنابر آنچه در بالا گفتیم،

$$\circ \le a^{(i)} \le k!, \qquad ۱ \le i \le k$$

اما در این صورت

$$\begin{aligned} a^{(k)}_{k+۱} &= \left|\left|\cdots\left|(k+۱)! - a^{(۱)}\right| - a^{(۲)}\right| - \cdots - a^{(k)}\right| \\ &= (k+۱)! - \left(a^{(۱)} + a^{(۲)} + \cdots + a^{(k)}\right) \\ &\ge (k+۱)! - k \times k! > \circ \end{aligned}$$

که این هم با تساوی $a^{(k)}_{k+۱} = \circ$ تناقض دارد ($a^{(k)}_{k+۱}$ عضوی از دنباله‌ای است که همهٔ جمله‌هایش صفرند). بنابراین فرضمان غلط است و برای اینکه دنبالهٔ

$$۱, ۲!, ۳!, \cdots, (k+۱)!$$

را به دنباله‌ای تبدیل کنیم که همهٔ جمله‌هایش صفرند دست‌کم باید $k+۱$ مرحله را طی کنیم. به این ترتیب، استقرا کامل شده است.

۱۸. دربارهٔ دنبالهٔ $(a_n)_{n\ge۱}$ می‌دانیم $a_۱ = \circ$، $a_۲ = ۱$ و اگر $n \ge ۳$،

$$a_n = \frac{۱}{۲} n a_{n-۱} + \frac{۱}{۲} n(n-۱) a_{n-۲} + (-۱)^n \left(۱ - \frac{n}{۲}\right)$$

دستوری صریح برای

$$a_n + ۲\binom{n}{۱} a_{n-۱} + ۳\binom{n}{۲} a_{n-۲} + \cdots + (n-۱)\binom{n}{n-۲} a_۲ + n\binom{n}{n-۱} a_۱$$

پیدا کنید.

(یومینگ هوانگ، چین، ۲۰۰۰)

### راه‌حل اول

عبارت موردنظر را $f_n$ بنامید. از استقرایی سرراست معلوم می‌شود که

$$a_n = na_{n-۱} + (-۱)^n$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$a_n = n! - \frac{n!}{۱!} + \frac{n!}{۲!} - \frac{n!}{۳!} + \cdots + (-۱)^n \frac{n!}{n!}$$

یا

$$a_n = n!\left(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + (-۱)^n \frac{۱}{n!}\right)$$

بنابراین، بنابر دستور معروف برنولی-اویلر برای تعداد راههای رساندن نامه‌ها به نشانیهای نادرست، $a_n$ برابر است با تعداد پریشهای $(۱, ۲, \ldots, n)$، یعنی تعداد جایگشتهای این $n$تایی به‌طوری که هیچ نقطه‌ای ثابت نباشد.

بنابراین، $f_n$ را می‌توان به شکل زیر تعبیرکرد: به‌ازای هر جایگشت غیرهمانی از $(۱, ۲, \ldots, n)$ یک علامت بگذارید؛ سپس به‌ازای هر نقطهٔ ثابت این جایگشت یک علامت بگذارید. در این صورت $f_n$ برابر است با تعداد کل علامتها به‌ازای همهٔ جایگشتهای غیرهمانی.

از طرف دیگر، تعداد کل علامتها برابر است با مجموع علامتهایی که هر عضو درکل جایگشتهای غیرهمانی گرفته است. $n! - ۱$ جایگشت غیرهمانی وجود دارد و هر عضو در $(n-۱)! - ۱$ جایگشت غیرهمانی ثابت است؛ پس تعداد علامتها برابر است با

$$f_n = n! - ۱ + n\big((n-۱)! - ۱\big) = ۲n! - n - ۱$$

### راه‌حل دوم

روش دیگری برای اثبات اینکه $a_n$ برابر است با تعداد پریشهای $(۱, ۲, \ldots, n)$ می‌آوریم. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a_n &= na_{n-۱} + (-۱)^n = a_{n-۱} + (n-۱)a_{n-۱} + (-۱)^n \\ &= \big((n-۱)a_{n-۲} + (-۱)^{n-۱}\big) + (n-۱)a_{n-۱} + (-۱)^n \\ &= (n-۱)(a_{n-۱} + a_{n-۲}) \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید $b_n$ تعداد پریشهای $(۱, ۲, \ldots, n)$ باشد. در هر پریش، یا

**الف)** به‌ازای $k$ای غیر از ۱، $k$ به ۱ و ۱ به $k$ نگاشته می‌شود. در این صورت، $n-۱$ مقدار ممکن برای $k$ وجود دارد و به‌ازای هر $k$، $b_{n-۲}$ پریش برای $n-۲$ عضو دیگر وجود دارد. بنابراین $(n-۱)b_{n-۱}$ پریش از این نوع وجود دارد.

ب) به‌ازای $m$ای غیر از ۱، ۱ به $k$ و $k$ به $m$ نگاشته می‌شود. توجه کنید که $k \neq m$. بنابراین، این پریش، پریشی از

$$(۲, \ldots, k - ۱, ۱, k + ۱, \ldots, n)$$

است که ۱ را به $m$ می‌برد. باز هم $n - ۱$ مقدار ممکن برای $k$ وجود دارد و به‌ازای هر $k$، $b_{n-۱}$ پریش وجود دارد. بنابراین $(n - ۱)b_{n-۱}$ پریش از این نوع وجود دارد.

به این ترتیب، $b_n = (n - ۱)(b_{n-۱} + b_{n-۲})$. چون $a_۱ = b_۱ = ۰$ و $a_۲ = b_۲ = ۱$، پس $a_n = b_n$، همان چیزی که گفتیم.

۱۹. به‌ازای هر مجموعه مانند $A$ فرض کنید $|A|$ و $s(A)$ به ترتیب تعداد عضوهای $A$ و مجموع عضوهای $A$ باشند. (اگر $A = \varnothing$، آن‌وقت $|A| = s(A) = ۰$.) فرض کنید $S$ مجموعه‌ای از عددهای طبیعی باشد که

الف) دو عدد در $S$ مانند $x$ و $y$ وجود دارند که $(x, y) = ۱$ ب.م.م.؛

ب) به‌ازای هر دو عدد در $S$ مانند $x_۱$ و $y_۱$، $x_۱ + y_۱ \in S$.

فرض کنید $T$ مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی‌ای باشد که در $S$ نیستند. ثابت کنید

$$s(T) \leq |T|^۲ < \infty$$

(ریچارد استونگ، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۲۰۰۰)

**راه‌حل**

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n \geq xy$، آن‌وقت $n \in S$. کافی است ثابت کنیم که عددهایی صحیح و نامنفی مانند $a$ و $b$ وجود دارند که $ax + by = n$. چون $x$ و $y$ نسبت به هم اول‌اند، عددی مانند $b$ وجود دارد که $۰ \leq b < x$ و

$$by \equiv n \ \ (\text{به‌پیمانهٔ } x)$$

اکنون می‌توانیم فرض کنیم $a = \frac{n - by}{x}$، که چون $n \geq xy$، پس $a$ مثبت است. بنابراین $|T| < \infty$.

عضوهای $T$ را به ترتیب صعودی مرتب کنید و فرض کنید این عضوها $t_۱$، $t_۲$، … و $t_{|T|}$ باشند که

$$t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{|T|}$$

چون $t_i \notin S$، به‌ازای هر $m$ که $۱ \leq m \leq \lfloor \frac{t_i}{۲} \rfloor$، دست‌کم یکی از عددهای $m$ و $t_i - m$ در $S$ نیست. چون فقط $i - ۱$ عدد طبیعی کوچکتر از $t_i$ وجود دارند که در $S$ نیستند، پس

$$\left\lfloor \frac{t_i}{۲} \right\rfloor \leq i - ۱$$

یا $t_i \leq ۲i - ۱$. درنتیجه

$$t_۱ + t_۲ + \cdots + t_{|T|} \leq |T|^۲$$

همان‌چیزی که می‌خواهیم.

**۲۰.** در جنگلی ۹ حیوان در لانه‌هایشان زندگی می‌کنند و دقیقاً یک راه جداگانه بین هر دو تا از این لانه‌ها وجود دارد. پیش از مراسم انتخاب سلطان جنگل، برخی حیوانات در مبارزهٔ انتخاباتی شرکت می‌کنند. هر یک از نامزدها به هر یک از لانه‌های دیگر دقیقاً یک بار سر می‌زند، فقط از راههای میان لانه‌ها برای رفت‌وآمد استفاده می‌کند، هیچ‌گاه در مسیر بین دو لانه از هیچ راهی به راهی دیگر نمی‌پیچد و در پایان مبارزهٔ انتخاباتی به لانهٔ خودش برمی‌گردد. همچنین می‌دانیم که هیچ راهی بین دو لانه را بیش از یک نفر از نامزدها طی نکرده است. بیشترین تعداد ممکن نامزدها را پیدا کنید.

**راه‌حل**

مسأله را به زبان نظریهٔ گراف برمی‌گردانیم. فرض کنید هر لانه یک رأس باشد و هر راه میان دو لانه یالی باشد که این دو رأس را به هم وصل می‌کند. به این ترتیب گراف کامل $K_۹$ را به‌دست می‌آوریم. بیشترین تعداد دورهای هامیلتونی در این گراف کامل را می‌خواهیم که یال مشترک نداشته باشند. (به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که تعداد دورهای هامیلتونی در این گراف از تعداد رأسها کمتر است. بنابراین همواره می‌توانیم برای هر دور هامیلتونی یک نامزد انتخاب کنیم.)

نتیجهٔ کلی این است که درگراف کامل $K_n$، $\lfloor\frac{n-۱}{۲}\rfloor$ دور هامیلتونی جدا از هم وجود دارد: چون $\frac{n(n-۱)}{۲}$ یال در $K_n$ وجود دارد و هر دور هامیلتونی $n$ یال دارد، حداکثر $\lfloor\frac{n-۱}{۲}\rfloor$ دور هامیلتونی در $K_n$ وجود دارد. حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم.

**حالت ۱.** $n$ فرد است. فرض می‌کنیم که به‌ازای عددی طبیعی مانند $k$، $n = ۲k + ۱$ (چون حالت $n = ۱$ بی‌معنی است). رأسهای $P_۱$، $P_۲$، ... و $P_{۲k}$ را به ترتیب در جهت ساعتگرد روی دایره‌ای به فاصله‌های برابر می‌چینیم و رأس $P_۰$ را در مرکز دایره قرار می‌دهیم. اولین دور هامیلتونی

$$(P_۰, P_۱, P_۲, P_{۲k}, P_۳, P_{۲k-۱}, P_۴, P_{۲k-۲}, P_۵,$$
$$\ldots, P_{k-۱}, P_{k+۳}, P_k, P_{k+۲}, P_{k+۱}, P_۰)$$

است. می‌توانیم این دور را با زاویه‌های $\frac{\pi}{k}$، $\frac{۲\pi}{k}$، ... و $\frac{(k-۱)\pi}{k}$ در جهت ساعتگرد بچرخانیم و $k - ۱$ دور دیگر به‌دست بیاوریم که در مجموع تعداد دورها برابر می‌شود با $\lfloor\frac{n-۱}{۲}\rfloor = k$.

**حالت ۲.** $n$ زوج است. فرض می‌کنیم به‌ازای عددی طبیعی مانند $k$، $n = ۲k + ۲$. رأسهای $P_۱$، $P_۲$، ... و $P_{۲k}$ را به ترتیب در جهت ساعتگرد روی دایره‌ای به فاصله‌های برابر می‌چینیم و رأس $P_۰$ را در مرکز دایره قرار می‌دهیم. می‌توانیم رأس $P_{۲k+۱}$ را جایی درون دایره قرار دهیم.

در هر دور هامیلتونی که در حالت (۱) تعریف کردیم، $P_{۲k+۱}$ را سمت راست وسط این دور قرار می‌دهیم و به این ترتیب $\lfloor\frac{n-۱}{۲}\rfloor$ دور به‌دست می‌آوریم.

در مسألهٔ خودمان، $n = ۹$. بنابراین تعداد دورهای هامیلتونی برابر است با ۴ و درنتیجه بیشترین تعداد نامزدها ۴ نفر است.

۲۱. مجموعهٔ قطری دنباله‌ای مانند

$$A_۱, A_۲, \dots, A_n$$

از زیرمجموعه‌ای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, n\}$ و جایگشتی مانند $\pi$ از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \dots, n\}$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$D_\pi(A_۱, A_۲, \dots, A_n) = \{i \in S : \ \ i \notin A_{\pi(i)}\}$$

بیشترین تعداد ممکن مجموعه‌های متمایزی که ممکن است مجموعهٔ قطری دنباله‌ای مانند

$$A_۱, A_۲, \dots, A_n$$

باشند چقدر است؟

**راه‌حل**

جواب $۲^n - n$ است.

ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر $i$،

$$D_\pi(A_۱, A_۲, \dots, A_n) \neq A_i$$

معلوم است که

$$D_{\pi_۰}(A_۱, A_۲, \dots, A_n) \neq A_i$$

که در آن $\pi_۰(i) = i$. بنابراین

$$D_\pi(A_۱, A_۲, \dots, A_n) = D_{\pi_۰}(A_{\pi(۱)}, A_{\pi(۲)}, \dots, A_{\pi(n)}) \neq A_{\pi(i)}$$

چون

$$\{A_{\pi(۱)}, A_{\pi(۲)}, \dots, A_{\pi(n)}\} = \{A_۱, A_۲, \dots, A_n\}$$

آنچه ادعا کردیم نتیجه می‌شود.

مجموعهٔ موردنظر $۲^n$ زیرمجموعهٔ متمایز دارد. اگر $n$ مجموعهٔ اولیه را کنار بگذاریم، حداکثر $۲^n - n$ مجموعه باقی می‌مانند که ممکن است مجموعهٔ قطری باشند. درحقیقت، می‌توان این تعداد مجموعهٔ قطری پیدا کرد. فرض کنید

$$A_i = \{i\}, \qquad ۱ \leq i \leq n$$

در این صورت

$$D_{\pi_۰}(A_۱, A_۲, \dots, A_n) = \varnothing$$

و

$$D_\pi(A_۱, A_۲, \ldots, A_n) = \{i \in S: \ \ i \notin A_{\pi(i)}\} = \{i \in S: \ \ i \neq \pi(i)\}$$

می‌توان هر زیرمجموعهٔ $S$ را که دست‌کم دو عضو دارد با انتخاب مناسب جایگشت $\pi$ به مجموعه‌ای مانند $D_\pi$ تبدیل کرد. بنابراین، مجموعهٔ تهی و همهٔ زیرمجموعه‌های $S$ که دست‌کم دو عضو دارند تنها مجموعه‌های قطری ممکن‌اند، که درنتیجه $۲^n - n$ مجموعهٔ قطری ممکن است وجود داشته باشد.

**۲۲.** زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۵\}$ مانند $M$ این ویژگی را دارد که حاصل‌ضرب هیچ سه عضوی از آن مربع کامل نیست. بیشترین تعداد عضوهای $M$ را مشخص کنید.
(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۴)

**راه‌حل**

می‌گوییم مجموعه‌ای مانند $M$ خوب است، هرگاه زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۵\}$ باشد و حاصل‌ضرب هیچ سه عضوی از آن مربع کامل نباشد. می‌خواهیم بیشترین مقدار $|M|$ را پیدا کنیم، که در اینجا $M$ مجموعه‌ای خوب است. بیشترین مقدار موردنظر را $m$ بنامید. مجموعهٔ سه‌عضوی $\{i, j, k\}$ را که در آن $۱ \leq i < j < k \leq ۱۵$، بد می‌نامیم، هرگاه $ijk$ مربع کامل باشد.

ابتدا ثابت می‌کنیم $m \leq ۱۱$. چون مجموعه‌های سه‌عضوی بد

$$B_۱ = \{۱, ۴, ۹\}, B_۲ = \{۲, ۶, ۱۲\}, B_۳ = \{۳, ۵, ۱۵\}, B_۴ = \{۷, ۸, ۱۴\}$$

جدا از هم‌اند، اگر $|M| = ۱۲$، هر سه عضو دست‌کم یکی از این مجموعه‌های سه‌عضوی در $M$اند. بنابراین، اگر $|M| \geq ۱۲$، $M$ مجموعه‌ای خوب نیست و درنتیجه $m \leq ۱۱$.

فرض کنید $m = ۱۱$ و $M$ مجموعه‌ای خوب باشد که $|M| = ۱۱$. در این صورت

$$M = S - \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}$$

که در آن

$$a_i \in B_i, \qquad i = ۱, ۲, ۳, ۴$$

بنابراین $۱۰ \in M$. چون $۱۰ \in M$ و مجموعه‌های سه‌عضوی

$$B_۱ = \{۱, ۴, ۹\}, B_۴ = \{۷, ۸, ۱۴\}, B_۵ = \{۲, ۵, ۱۰\}, B_۶ = \{۶, ۱۵, ۱۰\}$$

بد هستند و ۱۰ تنها عضو تکراری است، پس

$$M = S - \{b_۱, b_۲, b_۵, b_۶\}$$

که در آن

$$b_۱ \in B_۱, \quad b_۴ \in B_۴, \quad b_۵ \in \{۲, ۵\}, \quad b_۶ \in \{۶, ۱۵\}$$

بنابراین $M \subset \{۳, ۱۲\}$. به این ترتیب ۱، ۴ و ۹ در $M$ نیستند. چون هنوز دو مجموعهٔ سه‌عضوی بد و جدا از هم $\{۲, ۳, ۶\}$ و $\{۷, ۸, ۱۴\}$ وجود دارند، دست‌کم باید دو عضو دیگر $M$ را حذف کنیم تا مجموعه‌ای خوب شود. بنابراین $|M| \leq ۱۰$، که با فرض $|M| = ۱۱$ تناقض دارد. بنابراین فرضمان غلط است و $m \leq ۱۰$.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که مجموعهٔ

$$\{۱, ۴, ۵, ۶, ۷, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴\}$$

ویژگیهای موردنظر را دارد. بنابراین بیشترین تعداد ممکن عضوهای $M$ برابر با ۱۰ است.

**۲۳.** همهٔ دنباله‌های متناهی مانند $(x_۰, x_۱, \ldots, x_n)$ را طوری پیدا کنید که به‌ازای هر $j$، $۰ \leq j \leq n$، $x_j$ برابر با تعداد دفعه‌هایی باشد که $j$ در این دنباله آمده است.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۱)

**راه‌حل**

فرض کنید دنبالهٔ $(x_۰, x_۱, \ldots, x_n)$ ویژگی موردنظر را داشته باشد، چون هر $x_j$ تعداد دفعه‌هایی است که $j$ در دنباله آمده است، جمله‌های دنبالهٔ موردنظر عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. توجه کنید که $x_۰ > ۰$، زیرا امکان ندارد $x_۰ = ۰$. فرض کنید تعداد جمله‌های مثبت در میان جمله‌های $x_۱$، $x_۲$، … و $x_n$ برابر با $m$ باشد. چون از $x_۰ = p \geq ۱$ نتیجه می‌شود $x_p \geq ۱$، پس $m \geq ۱$. توجه کنید که

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i = m + ۱$$

زیرا مجموع سمت چپ این تساوی تعداد جمله‌های مثبت دنبالهٔ موردنظر است و $x_۰ > ۰$. (توجه: اگر عدد مثبتی مانند $j$ به‌عنوان جمله‌ای مانند $x_i$ بیاید، دنباله آنقدر طولانی هست که شامل جمله‌ای مانند $x_j$ باشد که $j$ هم به‌حساب بیاید، زیرا دنباله شامل $j$ تا $i$ و دست‌کم یک مقدار دیگر است، که اگر $i \neq j$ خود $j$ است و اگر $j = i$ برابر با ۰ است.) چون در مجموع بالا دقیقاً $m$ جملهٔ مثبت وجود دارد، $(m - ۱)$تا از جمله‌ها باید برابر با ۱ باشند، یکی از جمله‌ها باید برابر با ۲ باشد و بقیه باید ۰ باشند. بنابراین فقط $x_۰$ ممکن است از ۲ بیشتر باشد و درنتیجه اگر $j > ۲$، فقط وقتی $x_j > ۰$ که $j = x_۰$. به‌ویژه، $m \leq ۳$. بنابراین سه حالت را باید بررسی کنیم. در هر حالت، به‌خاطر داشته باشید که $m - ۱$ جمله از جمله‌های $x_۱$، $x_۲$، … و $x_n$ برابر با ۱ هستند، یکی برابر با ۲ است و بقیه برابر با ۰ هستند.

۱.۱ $m = 1$. در این صورت $x_2 = 2$، زیرا ممکن نیست $x_1 = 2$. بنابراین $x_0 = 2$ و دنبالهٔ موردنظر $(2, 0, 2, 0)$ است.

۲.۲ $m = 2$. در این صورت یا $x_1 = 2$ یا $x_2 = 2$. در مورد اول دنباله $(1, 2, 1, 0)$ است و در مورد دوم دنباله $(2, 1, 2, 0, 0)$ است.

۳.۳ $m = 3$. در این حالت، به‌ازای $p$ای که در $p \geq 3$، $x_p > 0$. بنابراین $x_0 = p$ و $x_p = 1$، به این ترتیب $x_1 \neq 1$ و درنتیجه $x_1 = 2$ و $x_2 = 1$ و همهٔ جمله‌های مثبت دنباله را پیدا کرده‌ایم. دنبالهٔ موردنظر

$$(p, 2, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p-3}, 1, 0, 0, 0)$$

است.

به‌طور خلاصه، سه جواب خاص، یعنی

$$(2, 0, 2, 0), \quad (1, 2, 1, 0), \quad (2, 1, 2, 0, 0)$$

و خانواده‌ای نامتناهی از جوابها، یعنی

$$(p, 2, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p-3}, 1, 0, 0, 0)$$

که در آنها $p \geq 3$، وجود دارند.

### یادداشت

می‌توانیم دنباله‌هایی را که همهٔ جمله‌هایشان صفرند نیز جواب به‌حساب بیاوریم. صورت کلیتری از این مسأله را می‌توان در مورد دنباله‌های نامتناهی طرح کرد، و دنباله‌هایی نامتناهی که ویژگی موردنظر را داشته باشند وجود دارند. راه ساده‌ای برای ساختن چنین دنباله‌ای این است که ابتدا دنباله‌ای متناهی مانند $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ در نظر بگیریم که ویژگی موردنظر را داشته باشد و فرض کنیم $x_{n+1} = n + 1$ وکار را مانند آنچه در زیر نشان داده‌ایم ادامه می‌دهیم:

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n, \underbrace{n+1, n+1, \ldots, n+1}_{\text{جمله } x_{n+1}},$$

$$\underbrace{n+2, n+2, \ldots, n+2}_{\text{جمله } x_{n+2}}, \ldots)$$

مثلاً،

$$(1, 2, 1, 0, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, \ldots)$$

**۲۴.** آیا می‌توان مجموعهٔ عددهای طبیعی را به دو مجموعه مانند $A$ و $B$ طوری افراز کرد که $A$ شامل هیچ تصاعد حسابی سه‌جمله‌ای و $B$ شامل هیچ تصاعد حسابی نامتناهی نباشد؟

### راه‌حل

هر تصاعد حسابی نامتناهی با جملهٔ اول و قدرنسبتش مشخص می‌شود، به‌عبارت دیگر، می‌توانیم تصاعد حسابی نامتناهی

$$a, a+d, a+۲d, \ldots$$

را به شکل $(a, d)$ بنویسیم. بنابراین می‌توانیم تناظری یک‌به‌یک میان مجموعهٔ تصاعدهای حسابی نامتناهی از عددهای طبیعی و مجموعهٔ $S$، مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های مشبکه‌ای در ربع اول صفحهٔ مختصات (که محورهای مختصات را از آن حذف کرده‌ایم) برقرار کنیم. توجه کنید که مجموعهٔ $S$ شماراست، زیرا می‌توان آن را با مجموع مختصات نقطه‌هایش شمرد:

$$\{(۱,۱);(۱,۲),(۲,۱);(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱);\ldots\}$$

مجموعهٔ $A$ را استقرایی تشکیل می‌دهیم. درگام اول، فرض می‌کنیم $a_۱ = ۱$ و $a_۱$ در مجموعهٔ $A$ باشد (پس تصاعد حسابی نامتناهی $(۱, ۱)$ را شکسته‌ایم)؛ درگام دوم، عددی مانند $a_۲$ از تصاعد $(۱, ۲)$ انتخاب می‌کنیم که از $۲a_۱$ بزرگتر باشد و آن را در $A$ قرار می‌دهیم (پس تصاعد $(۱, ۲)$ را شکسته‌ایم)؛ درگام سوم، عددی مانند $a_۳$ از تصاعد $(۲, ۱)$ انتخاب می‌کنیم که از $۲a_۲$ بزرگتر باشد و آن را در $A$ قرار می‌دهیم؛ ...؛ درگام $i$ام، $i \geq ۳$، عددی از تصاعد $i$ام $S$ انتخاب می‌کنیم (توجه کنید که $S$ شماراست و چنین ترتیبی وجود دارد) که از $۲a_{i-۱}$ بزرگتر باشد و آن را در $A$ قرار می‌دهیم، و همین‌طور تا آخر. همهٔ عددهایی که در $A$ نیستند، مجموعهٔ $B$ را تشکیل می‌دهند.

با این روش تشکیل مجموعه‌های $A$ و $B$ معلوم است که هر تصاعد نامتناهی شکسته می‌شود و درنتیجه مجموعهٔ $B$ شامل هیچ تصاعد حسابی نامتناهی‌ای نیست. از طرف دیگر، عضوهای $A$ را می‌توان به ترتیب صعودی چید:

$$a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$$

که در اینجا $a_{i+۱} > ۲a_i$. درنتیجه اگر $a_i$، $a_j$ و $a_k$ جمله‌هایی باشند که $a_i < a_j < a_k$، آن‌وقت $a_i$، $a_j$ و $a_k$ تصاعدی حسابی تشکیل نمی‌دهند، زیرا

$$۲a_j < a_{j+۱} \leq a_k < a_k + a_i$$

بنابراین می‌توان مجموعهٔ عددهای طبیعی را به دو مجموعه مانند $A$ و $B$ طوری افرازکرد که $A$ شامل هیچ تصاعد حسابی سه‌جمله‌ای و $B$ شامل هیچ تصاعد حسابی نامتناهی نباشد.

**۲۵.** مجموعهٔ $T_۵$، مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی پنج‌رقمی را در نظر بگیرید که نمایش اعشاری آنها جایگشتی از رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ است. آیا می‌توان $T_۵$ را به دو مجموعه مانند $A$ و $B$ طوری افرازکرد که مجموع مربعهای عضوهای $A$ با مجموع مربعهای عضوهای $B$ برابر باشد؟

(اتحاد جماهیر شوروی، ۱۹۸۹)

### راه‌حل

ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

**لم.** فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_۵$ جایگشتی از رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ باشد. در این صورت مجموع مربعهای عدد پنج‌رقمی $(a_۱a_۲a_۳a_۴a_۵)$ و چهار جایگشت دوری آن برابر است با مجموع مربعهای عدد $(a_۵a_۴a_۳a_۲a_۱)$ و چهار جایگشت دوری آن. یعنی،

$$\sum_{i=۱}^{۵}(a_ia_{i+۱}a_{i+۲}a_{i+۳}a_{i+۴})^۲ = \sum_{i=۱}^{۵}(a_{i+۴}a_{i+۳}a_{i+۲}a_{i+۱}a_i)^۲$$

که در آن $a_{i+۵} = a_i$.

**برهان.** هر نمایش اعشاری مانند $(d_۱d_۲d_۳d_۴d_۵)$ را به شکل $\sum ۱۰^jd_j$ می‌نویسیم و مربعها را بسط می‌دهیم. به این ترتیب عددهایی مربع کامل به شکل $۱۰^{۲j}d_j^۲$ و حاصل‌ضربهایی به شکل $۲ \times ۱۰^{j+k}d_jd_k$ به‌وجود می‌آیند. اکنون در هر طرف تساوی‌ای که می‌خواهیم آن را ثابت کنیم، جمله‌های مربع کامل و جمله‌هایی را که به شکل حاصل‌ضرب‌اند در نظر می‌گیریم. به‌سادگی معلوم می‌شود که جمله‌های مربع کامل در دو طرف یکسان‌اند، زیرا هر رقم دقیقاً یک بار در یکان، دهگان، صدگان، هزارگان و ده‌هزارگان ظاهر می‌شود. ادعا می‌کنیم جمله‌های به شکل حاصل‌ضرب هم در دو طرف یکسان‌اند. درحقیقت، هر جملهٔ حاصل‌ضربی به شکل $۲ \times ۱۰^{j+k}a_ja_k$ که در سمت چپ از حاصل‌ضرب $۱۰^ja_j$ و $۱۰^ka_k$ به‌وجود می‌آید، در سمت راست از حاصل‌ضرب $۱۰^ka_j$ و $۱۰^ja_k$ به‌وجود می‌آید، زیرا در سمت راست، مقلوب همهٔ عددهای سمت چپ وجود دارند. ■

اکنون ۱۲۰ عدد در $T_۵$ را به ۲۴ گروه تقسیم می‌کنیم که هر کدام شامل پنج عددی است که جایگشت دوری یکدیگرند. همهٔ جایگشتهایی را که در آنها رقمهای ۱، ۲، ۳ به‌طور دوری به‌همین ترتیب آمده‌اند در مجموعهٔ $A$ و بقیهٔ جایگشتها را (که در آنها ترتیب ۱، ۳، ۲ است) در مجموعهٔ $B$ قرار می‌دهیم. به این ترتیب، هرگروه پنج‌تایی در $A$، گروه نظیری در $B$ دارد که می‌توان در مورد آنها از لم بالا استفاده کرد و نتیجه گرفت که مجموع مربعهای عضوهای $A$ با مجموع مربعهای عضوهای $B$ برابر است.

**۲۶.** فرض کنید $n$ عددی طبیعی باشد. تعداد چندجمله‌هایی مانند $P(x)$ را پیدا کنید که ضریبهایش عضو مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, ۳\}$ هستند و $P(۲) = n$.

(چین، ۱۹۹۶)

### راه‌حل اول

فرض کنید $S = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$ و

$$P(x) = a_mx^m + a_{m-۱}x^{m-۱} + \cdots + a_۱x + a_۰$$

که در آن $a_i \in S$، $۱ \le i \le m$. در این صورت

$$P(۲) = ۲^m a_m + ۲^{m-۱} a_{m-۱} + \cdots + ۲a_۱ + a_۰$$

می‌خواهیم تعداد دنباله‌هایی مانند $(a_۰, a_۱, \ldots)$ را پیدا کنیم که هر یک از $a_i$ها در $S$ است و

$$a_۰ + ۲a_۱ + ۴a_۲ + \cdots = \sum_{i=۰}^{\infty} ۲^i a_i = n$$

تابع مولد

$$f(x) = (۱ + x + x^۲ + x^۳)(۱ + x^۲ + x^۴ + x^۶)(۱ + x^۴ + x^۸ + x^{۱۲})\cdots$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $۱ + x + x^۲ + x^۳$ مربوط به انتخابهای مختلف $a_۰$ است، $۱ + x^۲ + x^۴ + x^۶$ مربوط به انتخابهای مختلف $a_۱$ است، $۱ + x^۴ + x^۸ + x^{۱۲}$ مربوط به انتخابهای مختلف $a_۲$ است، و همین‌طور تا آخر. کافی است ضریب جملهٔ $a^n$ در $f(x)$ را پیدا کنیم. توجه کنید که

$$f(x) = \frac{x^۴ - ۱}{x - ۱} \times \frac{x^۸ - ۱}{x^۲ - ۱} \times \frac{x^{۱۶} - ۱}{x^۴ - ۱} \times \cdots = \frac{۱}{(x - ۱)(x^۲ - ۱)}$$

زیرا هر جملهٔ در صورت، در مخرج کسر دوتا بعدتر ظاهر می‌شود. اگر $f(x)$ را به شکل کسرهای جزئی بنویسیم به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{۱}{۴(x + ۱)} - \frac{۱}{۴(x - ۱)} + \frac{۱}{۲(x - ۱)^۲} \\ &= \frac{-۲}{۴(x^۲ - ۱)} + \frac{۱}{۲(x - ۱)^۲} \\ &= \frac{۱}{۲}\left((x - ۱)^{-۲} + \frac{۱}{۱ - x^۲}\right) \end{aligned}$$

اگر دو تابعی را که در تساوی آخر مانده‌اند بسط بدهیم معلوم می‌شود که

$$f(x) = \frac{۱}{۲}\left(\left(۱ - \binom{-۲}{۱}x + \binom{-۲}{۲}x^۲ - \cdots\right) + (۱ + x^۲ + x^۴ + \cdots)\right)$$

چون

$$\binom{-۲}{n} = \frac{(-۲)(-۳)\cdots(-۲ - n + ۱)}{n!} = (-۱)^n(n + ۱)$$

پس

$$f(x) = \frac{۱}{۲}((۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots) + (۱ + x^۲ + x^۴ + \cdots))$$

$$= ۱ + x + ۲x^۲ + ۲x^۳ + ۳x^۴ + ۳x^۵ + \cdots$$
$$= \sum_{m=۰}^{\infty} \left(\lfloor \frac{m}{۲} \rfloor + ۱\right) x^m$$

بنابراین، ضریب $x^n$ برابر با $۱ + \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ است، یعنی $۱ + \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ چندجمله‌ای وجود دارند که ویژگیهای موردنظر را دارند.

**راه‌حل دوم**

مسأله‌ای کلیتر را حل می‌کنیم: فرض کنید $m$ و $n$ عددهایی طبیعی باشند و $m \geq ۲$. تعداد چندجمله‌ایهایی مانند $P(x)$ را پیدا کنید که ضریبهایش عضو مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots, m^۲ - ۱\}$ هستند و $P(m) = n$. هر چندجمله‌ای با این ویژگی را خوب می‌نامیم.

فرض کنید $P(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k$، که در آن

$$a_k \in \{۰, ۱, ۲, \ldots, m^۲ - ۱\}, \qquad k = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

در این صورت هر یک از $a_k$ها را می‌توان به شکل $b_k m + c_k$ نوشت، که

$$b_k, c_k \in \{۰, ۱, ۲, \ldots, m - ۱\}$$

بنابراین

$$n = P(m) = \sum_{k=۰}^{\infty} b_k m^{k+۱} + \sum_{k=۰}^{\infty} c_k m^k = mt + \sum_{k=۰}^{\infty} c_k m^k$$

که در آن $t = \sum_{k=۰}^{\infty} b_k m^k$. هر $t$ را که $۰ \leq t \leq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$، فقط به یک طریق می‌توان به شکل $t = \sum_{k=۰}^{\infty} b_k m^k$ نوشت، که در آن

$$b_k \in \{۰, ۱, ۲, \ldots, m - ۱\}$$

(یعنی $t$ را در مبنای $m$ بنویسیم) و فقط به یک طریق می‌توان $n - mt$ را به شکل $n - mt = \sum_{k=۰}^{\infty} c_k m^k$ نوشت، که در آن

$$c_k \in \{۰, ۱, ۲, \ldots, m - ۱\}$$

(یعنی $n - mt$ را در مبنای $m$ بنویسیم). بنابراین تناظری یک‌به‌یک میان مجموعهٔ $\{۰, ۱, \ldots, \lfloor \frac{n}{m} \rfloor\}$ و مجموعهٔ چندجمله‌های خوب وجود دارد. پس $۱ + \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ چندجمله‌ای خوب وجود دارد.

در مسألهٔ خودمان، $m = ۲$ و بنابراین $۱ + \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ چندجمله‌ای وجود دارند که ویژگیهای موردنظر را دارند.

**۲۷.** فرض کنید $n$ و $k$ عددهایی طبیعی باشند که $\frac{1}{2}n < k \leq \frac{2}{3}n$. کوچکترین عدد مانند $m$ را طوری پیدا کنید که بتوان $m$ سرباز را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ طوری قرار داد که در هیچ سطر و هیچ ستونی $k$ خانهٔ پشت سر هم خالی وجود نداشته باشد.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۰)

**راه‌حل**

چیدنی از سربازها را روی صفحه خوب می‌نامیم که هیچ قطعهٔ $1 \times k$ای (یا $k \times 1$ای) از خانه‌های خالی وجود نداشته باشد. سطرها و ستونها را با عددهای ۰ تا $n - 1$ شماره‌گذاری کنید.

راهی برای چیدن خوب سربازها این است که آنها را در خانه‌هایی مانند $(i, j)$ (خانهٔ واقع در سطر $i$ام و ستون $j$ام)، که در آن $i + j + 1$ بر $k$ بخش‌پذیر است بچینیم. چون $n < 2k$، مجموع $i + j$ باید برابر با $k - 1$، $2k - 1$ یا $3k - 1$ باشد و درنتیجه در این الگو حداکثر سه خط کج به چشم می‌خورد. چون $2n \leq 3k$، یکی از این سه خط از $k$ خانه تشکیل شده است، خط دیگر از $2k - 2n$ خانه و خط سوم هم از $3k - 2n$ خانه تشکیل شده است. پس روی این خطها در کل $4(n - k)$ خانهٔ خالی وجود دارد.

اکنون ثابت می‌کنیم که درحقیقت این مقدار کمترین تعداد سربازهایی است که ممکن است در چیدنی خوب وجود داشته باشند. فرض کنید چیدنی خوب با $m$ سرباز داریم. صفحهٔ شطرنج را به نه ناحیهٔ مستطیلی مانند

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{matrix}$$

طوری تقسیم کنید که ناحیه‌های $A$، $C$، $G$ و $I$ هرکدام $(n - k) \times (n - k)$ خانه داشته باشند، هر یک از ناحیه‌های $B$ و $H$، $n - k$ سطر و $2k - n$ ستون داشته باشد و هر یک از ناحیه‌های $D$ و $F$، $2k - n$ سطر و $n - k$ ستون داشته باشد. (چون $2k - n > 0$، می‌توان این کار را کرد.)

توجه کنید که می‌توانیم ناحیهٔ $A \cup B$ را به $n - k$ نوار مستطیلی $k \times 1$ تقسیم کنیم. به‌طور مشابه، می‌توانیم ناحیه‌های $B \cup C$، $G \cup H$ و $H \cup I$ را به $n - k$ نوار افقی ببریم. به‌همین روش می‌توانیم $4(n - k)$ نوار عمودی به‌دست آوریم، که در کل می‌شود $8(n - k)$ نوار. بنابر فرض مسأله، هر یک از این نوارها باید شامل دست‌کم یک سرباز باشد. از طرف دیگر، طوری نوارها را بریده‌ایم که هیچ سربازی روی بیش از دوتا از نوارها قرار ندارد. بنابراین دست‌کم $4(n - k)$ سرباز داریم.

**۲۸.** در یک دوره مسابقات فوتبال، هر تیم با هر یک از دیگر تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند و برای

هر برد ۳ امتیاز و برای هر تساوی ۱ امتیاز می‌گیرد و اگر ببازد هیچ امتیازی نمی‌گیرد. در پایان مسابقات، معلوم شد که تیمی بیشترین امتیاز را گرفته است و کمترین برد را داشته است. کمترین تعداد تیمها را پیدا کنید که چنین چیزی ممکن باشد.

(چین، ۱۹۹۶)

**راه‌حل**

تیم موردنظر را $W$ می‌نامیم. فرض کنید $n$ تیم در مسابقات شرکت کرده‌اند. تعداد بازیها $\binom{n}{۲}$ یا $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است و کل امتیازها دست‌کم $n(n-۱)$ است. بنابراین هر تیم به‌طور میانگین دست‌کم $n-۱$ امتیاز گرفته است. چون $W$، $n-۱$ بازی کرده است و امتیازش باید از میانگین بیشتر باشد، پس دست‌کم یک بازی را برده است. هر یک از دیگر تیمها باید دست‌کم دو بازی را برده باشد و دست‌کم ۶ امتیاز دارد؛ پس $W$ باید دست‌کم در ۴ بازی مساوی کرده باشد (پس دست‌کم ۷ امتیاز دارد). اما اگر تیمی مانند $A$ در مسابقه‌اش مقابل $W$ مساوی کرده باشد، $A$، ۷ امتیاز دارد. بنابراین تیم $W$ باید دست‌کم ۵ بار مساوی کرده باشد. به این ترتیب، $n \geq ۷$.

اگر $n = ۷$، تیم $W$ یک بازی را برده است و در ۵ بازی مساوی کرده است، پس در کل ۸ امتیاز دارد. بنابراین هر یک از دیگر تیمها دقیقاً دو بازی را برده است و در حداکثر یک بازی مساوی کرده است. پس هر یک از دیگر تیمها باید دست‌کم سه بازی را باخته باشد. به این ترتیب، دست‌کم $۳ \times ۶$ یا ۱۸ باخت و فقط $۲ \times ۶ + ۱$ یا ۱۳ برد وجود دارد، که ممکن نیست. بنابراین $n \geq ۸$.

اکنون مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد می‌توان مسابقاتی ۸ تیمی داشت که شرطهای مسأله در مورد آن درست باشد. فرض کنید $W$، $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_۷$ هشت تیم باشند. تیم $W$ بازی مقابل $A_۱$ و $A_۲$ را برده است و بقیهٔ بازیها را مساوی کرده است، پس در کل ۱۱ امتیاز دارد. به‌ازای $۱ \leq i \leq ۷$، تیم $A_i$ بازی مقابل تیمهای $A_{i+۱}$، $A_{i+۲}$ و $A_{i+۳}$ را برده است و بازی مقابل تیمهای $A_{i+۴}$، $A_{i+۵}$، $A_{i+۶}$ و $A_{i+۷}$ را باخته است، که در اینجا $A_{i+۷} = A_i$. بنابراین هر یک از تیمهای $A_۱$ و $A_۲$ سه برد و چهار باخت و در کل ۹ امتیاز دارد؛ هر یک از تیمهای $A_۳$، $A_۴$، ... و $A_۷$ سه برد، سه باخت و یک مساوی و در کل ۱۰ امتیاز دارد.

بنابراین کمترین تعداد تیمهای موردنظر برابر با ۸ است.

**۲۹.** فرض کنید

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_n$$

سطر اول آرایه‌ای مثلثی باشد، که $a_i \in \{۰, ۱\}$، $۱ \leq i \leq n$. سطر دوم را با

$$b_۱, b_۲, \ldots, b_{n-۱}$$

پر می‌کنیم، به‌طوری که اگر $a_k \neq a_{k+۱}$، آن‌وقت $b_k = ۱$ و اگر $a_k = a_{k+۱}$، آن‌وقت $b_k = ۰$.

بقیهٔ سطرها را هم به‌روش مشابه پر می‌کنیم. بیشترین تعداد ممکن ۱ها را در آرایهٔ به‌دست آمده تعیین کنید.

## راه‌حل

فرض کنید در آرایه‌ای $n$ سطری، $x_n$ برابر با بیشترین تعداد ممکن ۱ها باشد. می‌توان تحقیق کرد که $x_۱ = ۱$، $x_۲ = ۲$ و $x_۳ = ۴$.

اکنون $x_{n+۳}$ را به $x_n$ ربط می‌دهیم. سه سطر بالای مثلثی $n + ۳$ سطری را در نظر بگیرید:

$$a_۱, \ldots, a_{n+۳}; b_۱, \ldots, b_{n+۲}; c_۱, \ldots, c_{n+۱}$$

سنگریزه‌هایتان را آماده کنید.

اگر دست‌کم یکی از $a_k$، $b_k$ و $c_k$ صفر بود، یک سنگریزه نظیر این صفر روی ستون $k$ بگذارید. اگر $a_k b_k c_k = ۱$، آن‌وقت $a_{k+۱} = b_{k+۱} = ۰$؛ یک سنگریزه نظیر $a_{k+۱}$ روی ستون $k$ و یک سنگریزهٔ دیگر نظیر $b_{k+۱}$ روی ستون $k + ۱$ بگذارید. ابتدا فرض کنید $k = ۱$ و روند بالا را پی‌درپی تکرار کنید، هر بار $k$ را ستون بعدی که بدون سنگریزه است بگیرید. در پایان، روی همهٔ ستونهای ۱ تا $n + ۱$ سنگریزه است. اگر روی ستون $n + ۲$ سنگریزه نباشد، هیچ‌یک از سنگریزه‌هایی که گذاشته‌ایم نظیر $a_{k+۲}$، $b_{k+۲}$ یا $c_{k+۲}$ نیست، اما چون دست‌کم یکی از این سه عدد صفر است، باید یک سنگریزهٔ دیگر نظیر این ستون قرار دهیم.

چون هر یک از $n + ۲$ سنگریزه‌ای که گذاشته‌ایم نظیر یک صفر است، در سه سطر بالایی مثلث موردنظر دست‌کم $n + ۲$ صفر وجود دارد. درنتیجه، در این سه سطر حداکثر $(۲n + ۴)$تا ۱ وجود دارد، پس $x_{n+۳} \leq x_n + ۲n + ۴$. اکنون به استقرا می‌توان ثابت کرد که

$$x_n \leq \left\lfloor \frac{n^۲ + n + ۱}{۳} \right\rfloor$$

علاوه بر این، همان‌طور که در الگوی زیر نشان داده‌ایم، این کران دست‌یافتنی است:

$$\begin{array}{c}
۱\ ۱\ ۰\ ۱\ ۱\ ۰\ ۱\ ۱\ ۰ \\
۰\ ۱\ ۱\ ۰\ ۱\ ۱\ ۰\ ۱ \\
\underline{۱\ ۰\ ۱\ ۱\ ۰\ ۱\ ۱} \\
۱\ ۱\ ۰\ ۱\ ۱\ ۰ \\
۰\ ۱\ ۱\ ۰\ ۱ \\
\underline{۱\ ۰\ ۱\ ۱} \\
۱\ ۱\ ۰ \\
۰\ ۱ \\
۱
\end{array}$$

عددهای هر سطر در قطعه‌های سه‌تایی تکرار می‌شوند. از سطر پایین به بالا تعداد ۱ها برابر است با ۱، ۱، ۲، ۳، ۳، ۴، ۵، ۵، ۶، . . . .

**۳۰.** در تخت‌آباد ۱۰ شهر وجود دارد. پرواز میان شهرها در دست دو شرکت هواپیمایی است. میان هر دو شهر دقیقاً یک خط هوایی (در هر دو جهت) وجود دارد. ثابت کنید یکی از این شرکتها می‌تواند دو مسیر دوری برقرار کند که هر دور از تعداد فردی از شهرها می‌گذرد و این دو دور از شهری مشترک نمی‌گذرند.

**راه‌حل**

فرض کنید هر شهر یک رأس و هر راه هوایی میان دو شهر یالی میان رأسهای متناظر این شهرها باشد. یالهای مربوط به یکی از شرکتهای هواپیمایی را آبی و یالهای مربوط به شرکت دیگر را قرمز می‌کنیم. به این ترتیب گراف کامل ۲ـرنگ‌شدهٔ $K_{۱۰}$ را به‌دست می‌آوریم. به زبان نظریهٔ گراف، باید ثابت کنیم که در گراف کامل ۲ـرنگ‌شدهٔ $K_{۱۰}$ دو دور فرد غیرمتقاطع تکرنگ وجود دارد. ابتدا نتیجه‌ای معروف از نظریهٔ گراف را می‌آوریم.

**لم ۱.** اگر یالهای گراف کامل $K_{۶}$ را با دو رنگ رنگ کنیم، این گراف مثلثی تکرنگ دارد.

**برهان.** برای این حکم برهانی ساده وجود دارد که در آن از اصل لانه کبوتری استفاده می‌شود. با این حال، در اینجا برای این حکم برهانی قشنگ می‌آوریم. ثابت می‌کنیم که درحقیقت دو مثلث تکرنگ وجود دارد. فرض کنید $v_{۱}$، $v_{۲}$، . . . و $v_{۶}$ رأسهای $K_{۶}$ باشند. اگر رنگ دوتا از یالها مانند $v_iv_j$ و $v_iv_k$ یکسان باشد، زاویهٔ $v_jv_iv_k$ را تکرنگ می‌نامیم. فرض کنید $r_i$ و $b_i$ به ترتیب تعداد یالهای قرمز و آبی باشند که از $v_i$ خارج می‌شوند. در این صورت، به‌ازای هر $i$، $r_i + b_i = ۵$ و تعداد زاویه‌های تکرنگ برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{۶}\left(\binom{r_i}{۲}+\binom{b_i}{۲}\right)$$

اما

$$\sum_{i=۱}^{۶}\left(\binom{r_i}{۲}+\binom{b_i}{۲}\right) \geq \sum_{i=۱}^{۶}\left(\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}\right) = ۲۴$$

از طرف دیگر، در هر مثلث تکرنگ، سه زاویهٔ تکرنگ و در هر مثلث دیگر یک زاویهٔ تکرنگ وجود دارد. فرض کنید تعداد مثلثهای تکرنگ برابر با $m$ باشد. چون درکل $\binom{۶}{۳}$ یا ۲۰ مثلث وجود دارد، تعداد زاویه‌های تکرنگ برابر است با

$$۳m + (۲۰ - m) = ۲۰ + ۲m$$

بنابراین $۲۴ \geq ۲m + ۲۰$ و درنتیجه $۲ \geq m$، همان‌چیزی که می‌خواستیم. ■

**لم ۲.** اگر یالهای گراف کامل $K_۵$ را با دو رنگ رنگ کنیم و این گراف مثلث تکرنگ نداشته باشد، آن‌وقت این گراف از دو دور تکرنگ به طول ۵ تشکیل شده است.

**برهان.** فرض کنید $v_۱$، $v_۲$، … و $v_۵$ رأسهای $K_۵$ باشند. اگر رنگ سه‌تا از یالهای $v_۱v_۲$، $v_۱v_۳$، … و $v_۱v_۵$ یکسان باشد، مثلثی تکرنگ داریم. درحقیقت، می‌توانیم فرض کنیم $v_۱v_۲$، $v_۱v_۳$ و $v_۱v_۴$ قرمزند؛ در این صورت اگر یکی از یالهای $v_۲v_۳$، $v_۳v_۴$ و $v_۴v_۲$ قرمز باشد کار تمام است. در غیر این صورت، $v_۲v_۳v_۴$ مثلثی آبی است و باز هم مثلثی تکرنگ به‌دست آورده‌ایم. (به‌سادگی می‌توان این نحوهٔ استدلال را گسترش داد و ثابت کرد که در گراف ۲ـ رنگ‌شدهٔ $K_۶$ مثلثی تکرنگ وجود دارد.) چون در $K_۵$ مثلث تکرنگ وجود ندارد، از هر رأس دو یال قرمز و دو یال آبی خارج شده است. اگر فقط یالهای قرمز را در نظر بگیریم، زیرگرافی به‌دست می‌آوریم که پنج رأس دارد و درجهٔ هر رأسش ۲ است. بنابراین این زیرگراف یا دور است یا می‌توان آن را به چند دور غیرمتقاطع تجزیه کرد. اما چون فقط پنج رأس وجود دارد، نمی‌توانیم دو دور داشته باشیم. بنابراین دوری قرمز به طول ۵ داریم. دقیقاً به همین روش می‌توانیم ثابت کنیم که دوری آبی به طول ۵ داریم. ■

اکنون آماده‌ایم که حکم اصلی را ثابت کنیم. فرض کنید $v_۱$، $v_۲$، … و $v_{۱۰}$ رأسهای گراف کامل ۲ـ رنگ‌شدهٔ $K_{۱۰}$ (با رنگهای قرمز و آبی) باشند. بنابر لم ۱، مثلثی تکرنگ در $K_{۱۰}$ وجود دارد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم این مثلث $v_۱v_۲v_۳$ باشد. باز هم بنابر لم ۱، در زیرگراف $K_{۱۰} - \{v_۱, v_۲, v_۳\}$ مثلثی تکرنگ وجود دارد. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم این مثلث $v_۴v_۵v_۶$ باشد. اگر رنگ $v_۱v_۲v_۳$ و $v_۴v_۵v_۶$ یکسان باشد حکم را ثابت کرده‌ایم. اگر چنین نبود، فرض کنید $v_۱v_۲v_۳$ آبی و $v_۴v_۵v_۶$ قرمز باشد. یالهای $v_iv_j$، $۳ \geq i \geq ۱$ و $۶ \geq j \geq ۴$ را در نظر بگیرید. بنابر اصل لانه کبوتری، رنگ پنج‌تا از این یالها یکسان است؛ بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم رنگ این یالها آبی است. بنابراین $j_۰$ای وجود دارد که $۶ \geq j_۰ \geq ۴$ و دوتا از یالهای $v_{j_۰}v_۱$، $v_{j_۰}v_۲$ و $v_{j_۰}v_۳$ آبی‌اند. بنابراین مثلثی آبی و مثلثی قرمز داریم که فقط در رأس $v_{j_۰}$ مشترک‌اند.

برای راحتی کار، نقطه‌ها را طوری از نو شماره‌گذاری می‌کنیم که $v_۱v_۲v_۳$ آبی و $v_۳v_۴v_۵$ قرمز باشد. زیرگراف $K_{۱۰} - \{v_۱, v_۲, \ldots, v_۵\}$ را در نظر بگیرید. اگر این زیرگراف مثلثی تکرنگ داشته باشد کار تمام است، زیرا می‌توانیم یکی از مثلثهای $v_۱v_۲v_۳$ و $v_۳v_۴v_۵$ را طوری انتخاب کنیم که همرنگ این مثلث جدید باشد. بنابراین یکی از شرکتها می‌تواند دو مسیر دوری هر کدام بین سه‌تا از شهرها برقرار کند که هیچ شهر مشترکی نداشته باشند. در غیر این صورت، بنابر لم ۲،

دوری قرمز به طول ۵ و دوری آبی به طول ۵ داریم. بنابراین هر یک از شرکتها می‌تواند مسیری دوری بین سه‌تا از شهرها و مسیری دوری بین پنج شهر دیگر برقرار کند.

**۳۱.** فرض کنید هر یک از عددهای طبیعی را که از $\frac{n(n^۲-۲n+۳)}{۲}$، $n \geq ۲$، بزرگتر نیستند با یکی از دو رنگ (قرمز و آبی) رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید دنباله‌ای $n$جمله‌ای و تکرنگ مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_n$ وجود دارد که

$$a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$$

و

$$a_۲ - a_۱ \leq a_۳ - a_۲ \leq \cdots \leq a_n - a_{n-۱}$$

(دورهٔ تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۷)

**راه‌حل**

دنباله‌ای مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_m$ را که

$$a_۲ - a_۱ \leq a_۳ - a_۲ \leq \cdots \leq a_n - a_{n-۱} \leq m$$

$m$ـ دنباله‌ای $n$ـ جمله‌ای بنامید. توجه کنید که

$$s_n = \frac{n(n^۲-۲n+۳)}{۲} = ۳\binom{n}{۳} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۱}$$

ثابت می‌کنیم که اگر عددهای طبیعی را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم، در میان $s_n$ عدد اول، $۳\binom{n}{۲}$ـ دنباله‌ای $n$ـ جمله‌ای و تکرنگ وجود دارد. از استقرا روی $n$ استفاده می‌کنیم. اگر $n = ۲$، درستی حکم معلوم است.

بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که $۳\binom{n}{۲}$ـ دنباله‌ای $n$ـ جمله‌ای و قرمز مانند $a_۱$، $a_۲$، ... و $a_n$ داریم که $a_n \leq s_n$. توجه کنید که

$$\begin{aligned} s_{n+۱} - s_n &= \left(۳\binom{n+۱}{۳} + \binom{n+۱}{۲} + \binom{n+۱}{۱}\right) \\ &\quad - \left(۳\binom{n}{۳} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۱}\right) \\ &= ۳\binom{n}{۲} + \binom{n}{۱} + ۱ \end{aligned}$$

$n+۱$ عدد

$$a_n + ۳\binom{n}{۲}, a_n + ۳\binom{n}{۲} + ۱, \ldots, a_n + ۳\binom{n}{۲} + n$$

را در نظر بگیرید و توجه کنید که

$$a_n + ۳\binom{n}{۲} + n < s_n + ۳\binom{n}{۲} + \binom{n}{۱} + ۱ = s_{n+۱}$$

اگر این عددها همگی آبی باشند، ۱ـدنباله‌ای $(n + ۱)$ـجمله‌ای و آبی داریم و کار تمام است. در غیر این صورت، یکی از این عددها، مثلاً $a + ۳\binom{n}{۲} + k$، $۰ \leq k \leq n$، قرمز است. فرض کنید $a_{n+۱} = a + ۳\binom{n}{۲} + k$. در این صورت

$$a_{n+۱} - a_n = ۳\binom{n}{۲} + k = ۳\binom{n+۱}{۲} - ۳\binom{n}{۱} + k \leq ۳\binom{n+۱}{۲}$$

و باز هم $۳\binom{n+۱}{۲}$ـدنباله‌ای $(n + ۱)$ـجمله‌ای و قرمز داریم. اثبات استقرایی کامل شده است.

**۳۲.** مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۳n\}$ را به سه مجموعهٔ $A$، $B$ و $C$ که هرکدام $n$ عضو دارد افرازکرده‌ایم. آیا همواره می‌توان از هر یک از این مجموعه‌ها عددی انتخاب کرد که یکی از این عددها مجموع دو عدد دیگر باشد؟

(ک. ج. اسمیت)

**راه‌حل** (از و. الکسیف)

برای ساده‌نویسی، سه‌تایی $(a, b, c)$ را خوب می‌نامیم، هرگاه $a \in A$، $b \in B$ و $c \in C$ و یکی از عددهای $a$، $b$ و $c$ مجموع دو عدد دیگر باشد.

بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $۱ \in A$ و اگر $k$ کوچکترین عددی باشد که در $A$ نیست، $k \in B$. با فرض اینکه هیچ سه‌تایی خوبی وجود ندارد، ادعا می‌کنیم که اگر $x \in C$، آن‌وقت $x - ۱ \in A$. در این صورت به‌سادگی می‌توانیم به تناقض برسیم. درحقیقت، اگر

$$C = \{c_۱, c_۲, \ldots, c_n\}$$

آن‌وقت $A$ شامل عددهای $c_۱ - ۱$، $c_۲ - ۱$، ... و $c_n - ۱$ است که همگی از ۱ بزرگترند، زیرا $۲ \notin C$. اما $۱ \in A$ و درنتیجه $A$ دست‌کم $n + ۱$ عضو دارد.

اکنون ادعایمان را ثابت می‌کنیم. فرض کنید این ادعا درست نباشد. در این صورت عددی مانند $x$ در $C$ وجود دارد که $x - ۱ \notin A$. معلوم است که $x - ۱ \notin B$، زیرا در غیر این صورت سه‌تایی $(۱, x - ۱, x)$ خوب است. اکنون، با استفاده از اینکه $x \in C$ و $x - ۱ \in C$ ثابت می‌کنیم که

$$x - k \in C, \qquad x - k - ۱ \in C$$

(به‌یاد بیاورید که $k$ کوچکترین عددی است که در $A$ نیست.) درحقیقت، اگر $x - k \in A$، آن‌وقت

سه‌تایی $(x-k,k,x)$ خوب است و اگر $x-k\in B$، آن‌وقت سه‌تایی $(k-1,x-k,x-1)$ خوب است. به‌طور مشابه معلوم می‌شود که اگر $x-k-1\in A$ و $x-k-1\in B$، به ترتیب سه‌تاییهای $(x-k-1,k,x-1)$ و $(1,x-k-1,x-k)$ خوب‌اند. اگر این روش استدلال را تکرار کنیم، معلوم می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح غیرمنفی مانند $i$، عددهای $x-ik$ و $x-ik-1$، به‌شرط اینکه مثبت باشند، در $C$ قرار دارند. اما به‌ازای $i$ای عددی $x-ik$ باید یکی از عددهای ۱، ۲، ... و $k$ باشد. پس این عدد باید یکی از عضوهای $A$ یا $B$ باشد، که تناقض است. بنابراین $x-1\in A$ و اثباتمان کامل شده است.

**۳۳.** فرض کنید هر یک از ۳۰ نفر دانش‌آموز کلاسی فقط به یکی از واریانتهای شطرنج و فقط به یکی از نابرابریهای کلاسیک علاقه دارد. هر یک از این دانش‌آموزان این اطلاعات را روی یک برگهٔ نظرخواهی می‌نویسد. در میان پاسخهای روی برگهٔ نظرخواهی دقیقاً ۲۰ واریانت مختلف شطرنج و دقیقاً ۱۰ نابرابری کلاسیک متفاوت وجود دارد. فرض کنید $n$ برابر با تعداد دانش‌آموزانی مانند $M$ باشد که تعداد دانش‌آموزانی که نابرابری موردعلاقهٔ $M$ را نوشته‌اند از تعداد دانش‌آموزانی که واریانت موردعلاقهٔ $M$ را نوشته‌اند بیشتر است. ثابت کنید $n\geq 11$.

(دورهٔ تابستانی المپیاد ریاضی، ۲۰۰۲)

### راه‌حل

فرض کنید $c_1$، $c_2$، ... و $c_{20}$ واریانتهای مختلف شطرنج و $e_1$، $e_2$، ... و $e_{10}$ نابرابریهای کلاسیک مختلف باشند. فرض کنید $S_i$، $1\leq i\leq 20$، مجموعهٔ همهٔ دانش‌آموزانی باشد که واریانت موردعلاقه‌شان $c_i$ است و $T_j$، $1\leq j\leq 10$، مجموعهٔ همهٔ دانش‌آموزانی باشد که نابرابری موردعلاقه‌شان $e_j$ است.

به هر دانش‌آموز مانند $M$ زوجی از عددها مانند $(x_M,y_M)$ به شکل زیر نسبت می‌دهیم: اگر $M\in S_i$، آن‌وقت $x_M=\frac{1}{|S_i|}$ و اگر $M\in T_j$، آن‌وقت $y_M=\frac{1}{|T_j|}$. این عددها را مختصات $M$ می‌نامیم. به دنبال دانش‌آموزانی مانند $M$ می‌گردیم که $x_M>y_M$.

مجموع مختصات $x$ همهٔ دانش‌آموزان برابر با ۲۰ و مجموع مختصات $y$ همهٔ دانش‌آموزان برابر با ۱۰ است. بنابراین

$$\sum_M (x_M-y_M)=10$$

توجه کنید که به‌ازای هر $M$، $x_M-y_M<x_M\leq 1$. بنابراین، دست‌کم ۱۱ جملهٔ مثبت در مجموع سمت چپ تساوی بالا وجود دارد، یعنی دست‌کم ۱۱ دانش‌آموز مانند $M$ وجود دارند که $x_M>y_M$، و این همان چیزی است که می‌خواهیم ثابت کنیم.

**۳۴.** با شروع از سه‌تایی $(a, b, c)$ از عددهای صحیح نامنفی، هر حرکت یعنی انتخاب دوتا از این عددها، مانند $x$ و $y$ و جایگزین کردن یکی از آنها با $x+y$ یا $|x-y|$. مثلاً می‌توان با یک حرکت از $(۳,۵,۷)$ به $(۳,۵,۴)$ رفت. ثابت کنید عددی ثابت و مثبت مانند $r$ وجود دارد که اگر $a$، $b$، $c$ و $n$ عددهایی طبیعی باشند و $a, b, c < ۲^n$، دنباله‌ای از حداکثر $rn$ حرکت وجود دارد که $(a, b, c)$ را به $(a', b', c')$ تبدیل می‌کنند که در آن $a'b'c' = ۰$.

(بیورن پونن، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

با استفاده از استقرای قوی روی $n$ ثابت می‌کنیم که اگر $r = ۱۲$، حکم درست است. در گام اول، وقتی که $n = ۱$، درستی حکم معلوم است. در گام استقرایی، بدون اینکه از کلی بودن استدلال‌مان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $a \le b \le c$. در دو حرکت، اگر لازم بود، می‌توانیم $a$ را با $c-a$ و $b$ را با $c-b$ عوض کنیم و در عوض فرض کنیم $a \le b \le \frac{c}{۲}$. فرض کنید $m$ عددی طبیعی باشد که $۲^{m-۱} \le b < ۲^m$. چون

$$۱ \le b \le \frac{c}{۲} < ۲^{n-۱}$$

پس $۱ \le m \le n-۱$. فرض کنید $x_۰ = a$، $x_۱ = b$ و اگر $k \ge ۲$،

$$x_k = x_{k-۱} + x_{x-۲}$$

**لم.** هر عدد طبیعی مانند $y$ را که $y \ge b$ می‌توان به شکل

$$\varepsilon + x_{i_۱} + x_{i_۲} + \cdots + x_{i_l}$$

نوشت، که در آن $۰ \le \varepsilon < b$، $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_l$ و $x_{i_l} < y < x_{i_l+۱}$.

**برهان.** چون دنبالهٔ $(x_i)_{i\ge ۰}$ صعودی است، پس عددی طبیعی و یکتا مانند $i$ وجود دارد که $x_i < y < x_{i+۱}$. از استقرای قوی روی $i$ استفاده می‌کنیم. اگر $y - x_i < b$، فرض می‌کنیم $\varepsilon = y - x_i$ و کار تمام است. در غیر این صورت

$$x_۱ = b \le y - x_i < x_{j+۱} - x_i = x_{i-۱}$$

بنابراین عددی طبیعی و یکتا مانند $j$ وجود دارد که $x_j < y - x_i < x_{j+۱}$ و $j < i$، پس می‌توانیم از فرض استقرا در مورد $y - x_i$ استفاده کنیم تا کار تمام شود. ■

فرض کنید

$$c = \varepsilon + x_{i_۱} + x_{i_۲} + \cdots + x_{i_l}$$

که در آن $0 \leq \varepsilon < b$ و $i_1 < i_2 < \cdots < i_l$. چون به‌ازای $k \geq 1$،

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k = 2x_k + x_{k-1} > 2x_k$$

پس

$$x_{2n-2m+3} \geq 2^{n-m+1}x_1 \geq 2^{n-m+1} \times 2^{m-1} = 2^n > c$$

درنتیجه

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_l < 2n - 2m + 3$$

با $2n - 2m + 1$ حرکت دیگر می‌توانیم $(a, b, c)$ را، که برابر است با $(x_0, x_1, c)$، به $(x_2, x_1, c)$ تبدیل کنیم، سپس به $(x_2, x_3, c)$ تبدیل کنیم، و همین‌طور کار را ادامه دهیم تا به سه‌تایی $(x_{2n-2m+2}, x_{2n-2m+1}, c)$ برسیم. به این ترتیب، حداکثر پس از $2n - 2m + 2$ حرکت می‌توانیم $x_{i_j}$ را که در نمایش $c$ وجود دارد و آن را در مختصات اول و دوم تولید کرده‌ایم، از $c$ کم کنیم. بنابراین، در نهایت می‌توانیم $c$ را تبدیل به $\varepsilon$ کنیم. اکنون می‌توانیم $2n - 2m + 1$ حرکت تفریقی انجام دهیم و سه‌تایی $(x_{2n-2m+2}, x_{2n-2m+1}, \varepsilon)$ را به سه‌تایی $(x_{2n-2m}, x_{2n-2m+1}, \varepsilon)$ برگردانیم، و این کار را ادامه دهیم، عملیات قبلی را دربارهٔ مختصات اول و دوم انجام ندهیم، تا در آخر به سه‌تایی $(a, b, \varepsilon)$ برسیم.

برای رسیدن به $(a, b, \varepsilon)$ حداکثر به

$$2 + (2n - 2m + 1) + (2n - 2m + 2) + (2n - 2m + 1)$$

حرکت احتیاج داریم، که برابر است با $6n - 6m + 6$ حرکت. سپس، چون $a, b, \varepsilon < 2^m$، بنابر فرض استقرا، می‌توانیم $(a, b, \varepsilon)$ را در حداکثر $12m$ حرکت دیگر به سه‌تایی‌ای تبدیل کنیم که یکی از مختصاتش صفر است. بنابراین، تعداد حرکتهایی که لازم داریم حداکثر برابر است با $(6n - 6m + 6) + 12m$، که چون $m \leq n - 1$،

$$(6n - 6m + 6) + 12m = 6n + 6m + 6 < 12n$$

**۳۵.** آرایه‌ای مستطیلی از عددها مفروض است. مجموع عددهای هر سطر و مجموع عددهای هر ستون عددی صحیح است. ثابت کنید هر عدد غیرصحیح در این آرایه مانند $x$ را می‌توان با $\lceil x \rceil$ یا $\lfloor x \rfloor$ طوری عوض کرد که مجموع هیچ سطری و مجموع هیچ ستونی تغییر نکند.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۸)

### راه‌حل

ابتدا هر عدد در آرایهٔ مفروض را با جزء صحیح آن عوض می‌کنیم و اگر عددی تغییر کرد آن را با «−» علامت می‌گذاریم (درنتیجه، اگر عددی صحیح باشد، هیچ علامتی ندارد). سپس، ستون به ستون، مجموع ستونها را با رُند کردن به بالای برخی عددها، که به دلخواه انتخاب می‌شوند، به مقدار

قبلی برمی‌گردانیم و این عددهای به بالا رُند شده را با «$+$» علامت می‌گذاریم.

بعد مجموع سطرها را بدون دست زدن به مجموع ستونها به مقدار قبلی برمی‌گردانیم. مجموع قدرمطلقهای تغییرات مجموع ستونها را $s$ بنامید. این عدد لزوماً زوج است (زیرا مجموع همهٔ عددها ثابت مانده است) و می‌خواهیم صفر باشد. اگر $s > \circ$، هر بار آن را دوتا کم می‌کنیم.

سطر $S$ را از سطر $R$ دست‌یافتنی می‌نامیم، هرگاه ستونی مانند $C$ وجود داشته باشد که $R \cap C$ با «$+$» و $S \cap C$ با «$-$» علامت خورده باشد. می‌توانیم فرض کنیم مجموع سطر اول بزرگتر شده است. در این صورت، این سطر شامل «$+$» است. چون مجموع ستونها را به مقدار قبلی آنها برگردانده‌ایم، در ستونی که شامل این «$+$» هست «$-$» هم هست (در غیر این صورت همهٔ علامتها «$+$»اند و مجموع ستون بزرگتر می‌شود). می‌توانیم فرض کنیم که سطر دوم از سطر اول دست‌یافتنی است. اگر مجموع این سطر کوچکتر شده بود، در ستونی که راه دسترسی این دو سطر است نحوهٔ رُند کردن «$+$» و «$-$» را عوض می‌کنیم. با این کار مقدار $s$ دوتا کم می‌شود. اگر مجموع سطر دوم کوچکتر نشده بود، باید شامل «$+$» باشد و سطری وجود دارد که از این سطر دست‌یافتنی است. اگر درنهایت به ستونی رسیدیم که مجموعش کوچکتر شده بود، دنباله‌ای از تغییرها در ستونهایی که راههای دسترسی‌اند مقدار $s$ را دوتا کم می‌کند. ادعا می‌کنیم که چنین چیزی اتفاق می‌افتد.

اجتماع همهٔ ستونهایی که مستقیم و غیرمستقیم از سطر اول دست‌یافتنی هستند و خود این سطر را $A$ بنامید. اجتماع بقیهٔ سطرها را $B$ بنامید. فرض کنید $C$ یکی از ستونها باشد. اگر $A \cap C$ شامل هیچ «$+$»ای نباشد، مجموع عددهایش از مقدار اولیه‌اش بیشتر نشده است. اگر $A \cap C$ شامل دست‌کم یک «$+$» باشد، آن‌وقت $B \cap C$ شامل هیچ «$-$»ای نیست، زیرا در غیر این صورت سطری از $B$ از سطر اول دست‌یافتنی است و باید متعلق به $A$ باشد. بنابراین مجموع عددهای $B \cap C$ کمتر نمی‌شود و درنتیجه مجموع عددهای $A \cap C$ در این حالت هم بیشتر نمی‌شود. چون $C$ دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که مجموع عددهای $A$ بیشتر نمی‌شود. چون مجموع سطر اول بزرگتر شده است، مجموع عددهای سطری در $A$ باید کوچکتر باشد، که ادعایمان را ثابت می‌کند.

**۳۶.** مجموعه‌ای متناهی از عددهای طبیعی (متمایز) را باوفا می‌نامیم، هرگاه هر یک از عضوهایش مجموع همهٔ عضوهای مجموعه را بشمارد. ثابت کنید هر مجموعهٔ متناهی از عددهای طبیعی زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای باوفاست.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۷)

### راه‌حل اول

از استقرا روی تعداد عضوهای مجموعه‌مان که مجموع عضوهای این مجموعه را نمی‌شمارد استفاده

می‌کنیم. اگر هیچ عضوی این ویژگی را نداشته باشد، معلوم است که این مجموعه باوفاست.

فرض کنید $\Sigma_S$ مجموع عضوهای مجموعهٔ $S$ باشد و $s$ عضوی از $S$ باشد که $s \nmid \Sigma_S$. فرض کنید $s = ۲^k m$، که در آن $۲ \nmid m$.

۱. گام اول. عددهای

$$\Sigma_S, ۲\Sigma_S, ۴\Sigma_S, \ldots, ۲^{k-۱}\Sigma_S$$

را به $S$ اضافه کنید. مجموع عضوهای مجموعهٔ جدید، که آن را $T$ می‌نامیم، برابر است با $\Sigma_T = ۲^k\Sigma_S$. بنابراین هر یک از عضوهای جدید $\Sigma_T$ را می‌شمارد، همین‌طور همهٔ عضوهای قدیمی، زیرا $\Sigma_S$ را می‌شمارند. همچنین، توجه کنید که عضوهای $T$ متمایزند.

۲. گام دوم. اگر $m = ۱$، این گام را حذف می‌کنیم. در غیر این صورت، توجه کنید که بنابر تعمیم اویلر از قضیهٔ کوچک فرما،

$$۲^{\varphi(m)} \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } m)$$

فرض کنید $r = \varphi(m)$. اکنون عددهای

$$۲\Sigma_T, ۴\Sigma_T, \ldots, ۲^{r-۱}\Sigma_T$$

و نیز عددهای

$$(۲^r - ۱)\Sigma_T, ۲(۲^r - ۱)\Sigma_T, ۴(۲^r - ۱)\Sigma_T, \ldots, ۲^{r-۲}(۲^r - ۱)\Sigma_T$$

را به $T$ اضافه کنید. مجموع عضوهای مجموعهٔ جدید، که آن را $U$ می‌نامیم، برابر است با

$$\Sigma_U = ۲^{r-۱}(۲^r - ۱)\Sigma_T$$

بنابراین همهٔ عضوهایی که اضافه کرده‌ایم $\Sigma_U$ را می‌شمارند، همین‌طور همهٔ عضوهای $T$، زیرا $\Sigma_T$ را می‌شمارند. علاوه بر این، $M \mid \Sigma_U$. پس از برداشتن این دو گام، $s \mid \Sigma_U$. علاوه بر این، همهٔ عضوهایی که از ابتدا $\Sigma_S$ را می‌شمردند، اکنون هم $\Sigma_U$ را می‌شمارند و همهٔ عضوهایی که اضافه کردیم هم $\Sigma_U$ را می‌شمارند. بنابراین اگر $n$ عضو $S$ وجود داشته باشند که $\Sigma_S$ را نمی‌شمارند، اکنون حداکثر $n - ۱$ عضو $T$ هستند که $\Sigma_T$ را نمی‌شمارند.

بنابراین، اگر بتوانیم مجموعه‌ای باوفا تشکیل بدهیم که عضوهای زیرمجموعه‌ای $n$ عضوی از آن مجموع عضوها را نشمارند، می‌توانیم مجموعه‌ای باوفا تشکیل بدهیم که عضوهای زیرمجموعه‌ای $n + ۱$ عضوی از آن مجموع عضوها را نشمارند. بنابر استقرا، کار تمام شده است.

**راه‌حل دوم (از پو-رو لو)**

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $n$، $n \geq ۲$، مجموعه‌ای باوفا معرفی می‌کنیم که شامل عددهای ۱، ۲، ... و $n$ است. در این صورت، چون به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی از عددهای طبیعی مانند $S$

می‌توانیم عدد طبیعی $n$ را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که

$$S \subseteq \{۱, ۲, \dots, n\}$$

پس حکم را هم ثابت کرده‌ایم. ابتدا در مجموعه‌ای که به دنبالش هستیم عددهای ۱، ۲، ... و $\frac{n(n+۱)}{۲}$ را قرار می‌دهیم. پس تا اینجا مجموع عضوها برابر است با $n(n+۱)$. اکنون عددهای

$$(n-j)(n-j+۲)(n-j+۳)\cdots(n)(n+۱), \qquad j = ۲, ۳, \dots, n-۱$$

را اضافه می‌کنیم. بنابراین مجموع کل عددها برابر است با

$$\begin{aligned} n(n+۱) &+ \sum_{j=۲}^{n-۱}(n-j)(n-j+۲)\cdots(n+۱) \\ &= n(n+۱) + \sum_{j=۲}^{n-۱}\big((n-j+۱)(n-j+۲)\cdots(n+۱) \\ &\qquad - (n-j+۲)(n-j+۳)\cdots(n+۱)\big) \\ &= n(n+۱) + (n+۱)! - n(n+۱) \\ &= (n+۱)! \end{aligned}$$

معلوم است که عضوهای مجموعه‌ای که ساخته‌ایم متمایزند و $(n+۱)!$ را می‌شمارند، پس راه‌حل کامل شده است.

**۳۷.** دوازده نوازنده به‌نامهای $M_۱$، $M_۲$، ... و $M_{۱۲}$ در یک جشنوارهٔ یک هفته‌ای موسیقی گرد هم آمده‌اند. برای هر روز، یک کنسرت پیش‌بینی شده است که در آن برخی نوازندگان برنامه اجرا می‌کنند و بقیه در میان شنوندگان می‌نشینند. به‌ازای $i = ۱, ۲, \dots, ۱۲$، فرض کنید $t_i$ تعداد کنسرتهایی باشد که در آن نوازندهٔ $M_i$ برنامه اجرا می‌کند و فرض کنید $t = t_۱ + t_۲ + \cdots + t_{۱۲}$. کمترین مقدار $t$ را پیدا کنید که هر نوازنده بتواند، به‌عنوان شنونده، به برنامهٔ بقیهٔ نوازندگان گوش بدهد.
(چنگ‌ژانگ لی، چین، ۱۹۹۴)

**راه‌حل**

شرطهای مسأله را می‌توان چنین بیان کرد:

اگر نوازنده‌ای در یک روز برنامه نداشت، در میان شنوندگان به کنسرت گوش می‌دهد. اگر نوازنده‌ای در یک روز برنامه داشت، نمی‌تواند به برنامهٔ بقیهٔ نوازندگان در این روز گوش بدهد. هر نوازنده باید دست‌کم باید به یک برنامهٔ هر یک دیگر از نوازندگان گوش بدهد (*).

نکتهٔ اول. برای برقراری شرط (*)، هر سه نفر از نوازندگان باید در دست‌کم سه کنسرت برنامه اجرا

کنند. درحقیقت، اگر سه نفر از نوازندگان در دو کنسرت برنامه اجرا کنند، بنابر اصل لانه کبوتری، دوتا از آنها در یک کنسرت برنامه اجرا می‌کنند. پس نمی‌توانند در این روز به برنامهٔ هم گوش بدهند. یعنی اینکه این دو باید به برنامهٔ هم در کنسرت دیگر گوش بدهند، که ممکن نیست.
نکتهٔ دوم. برای برقراری شرط $(*)$، هر هفت نفر از نوازندگان یا هر تعداد بیشتری از آنها باید در دست‌کم چهار کنسرت برنامه اجرا کنند. درحقیقت، اگر هفت نفر از نوازندگان در سه کنسرت برنامه اجرا کنند، بنابر اصل لانه کبوتری، دست‌کم سه‌تا از آنها در یک کنسرت برنامه اجرا می‌کنند، درنتیجه نمی‌توانند برنامهٔ هم را در این کنسرت گوش کنند. بنابراین باید به برنامه‌های هم در دو کنسرت دیگر گوش بدهند که بنابر آنچه در نکتهٔ اول گفتیم ممکن نیست.
نکتهٔ سوم. برای برقراری شرط $(*)$، هر نه نفر از نوازندگان باید در دست‌کم پنج کنسرت برنامه اجرا کنند. درحقیقت، اگر نه نفر از نوازندگان فقط در چهار کنسرت برنامه اجرا کنند، هر یک از آنها در حداکثر سه کنسرت می‌تواند برنامه اجرا کند، زیرا در غیر این صورت نمی‌تواند به برنامهٔ هشت نوازندهٔ دیگر گوش بدهد. توجه کنید که اگر یکی از این نه نفر فقط در یک کنسرت برنامه اجرا کند، هشت نوازندهٔ دیگر باید به این کنسرت گوش بدهند. در این صورت این هشت نوازنده باید در سه کنسرت به برنامه‌های هم گوش بدهند، که بنابر آنچه در نکتهٔ دوم گفتیم ممکن نیست. همچنین، توجه کنید که اگر یکی از این نه نفر در سه کنسرت برنامه اجرا کند، فقط می‌تواند در کنسرت چهارم شنونده باشد؛ پس هشت نوازندهٔ دیگر همگی باید در این کنسرت برنامه اجرا کنند. باز هم به وضعیتی رسیده‌ایم که هشت نوازندهٔ دیگر باید در سه کنسرت به برنامه‌های هم گوش بدهند، که بنابر آنچه در نکتهٔ دوم گفتیم ممکن نیست. بنابراین هر یک از این نه نوازنده در دو کنسرت برنامه اجرا می‌کند. $\binom{4}{2}$ یا ۶ راه برای انتخاب دو کنسرت برای اجرای برنامه وجود دارد. بنابر اصل لانه کبوتری، دو نفر از نوازندگان وجود دارند که روز اجرای برنامه‌شان یکی است، درنتیجه نمی‌توانند به برنامه‌های هم گوش بدهند، که این هم با شرط $(*)$ تناقض دارد.

فرض می‌کنیم $k$ نوازنده وجود دارند که هر یک از آنها فقط در یک کنسرت برنامه اجرا می‌کند. این $k$ نوازنده باید در کنسرتهای مختلفی برنامه اجرا کنند، زیرا در غیر این صورت نمی‌توانند به برنامه‌های یکدیگر گوش بدهند. بنابراین $۰ \leq k \leq ۷$. توجه کنید که این $k$ کنسرت همگی به شکل تکنوازی‌اند. هر یک از $۱۲ - k$ نوازندهٔ باقی‌مانده در دست‌کم دو کنسرت برنامه اجرا می‌کند و باید در $۷ - k$ کنسرت دیگر به برنامه‌های یکدیگر گوش بدهند. به‌سادگی معلوم می‌شود که اگر $k = ۷$ یا $k = ۶$، چنین چیزی ممکن نیست؛ اگر $k = ۵$، هفت نوازنده باید به برنامه‌های یکدیگر در دو کنسرت گوش بدهند، که بنابر آنچه در نکتهٔ دوم گفتیم ممکن نیست؛ اگر $k = ۴$، هشت نوازنده باید به برنامه‌های یکدیگر در سه کنسرت گوش بدهند، که بنابر آنچه در نکتهٔ دوم گفتیم ممکن نیست؛ اگر $k = ۳$، نه نوازنده باید به برنامه‌های یکدیگر در چهار کنسرت گوش بدهند، که بنابر آنچه در

نکتهٔ سوم گفتیم ممکن نیست. بنابراین $k \leq ۲$ و درنتیجه

$$t \geq k + ۲(۱۲ - k) \geq ۲۲$$

سرانجام، مثالی می‌آوریم که نشان می‌دهد واقعاً ممکن است $t = ۲۲$. فرض کنید نوازندگان $M_۱$ و $M_۲$ در روزهای اول و دوم تکنوازی کنند. هر یک از دیگر نوازندگان دو برنامه اجرا می‌کنند. ۵ روز دیگر باقی مانده است و $\binom{۵}{۲}$ یا ۱۰ راه برای انتخاب دو روز برای اجرای برنامه وجود دارد. بنابراین می‌توانیم برنامهٔ هر یک از این نوازندگان را در زوجهای مختلفی قرار دهیم.

**۳۸.** آرایه‌ای $m \times n$ را با عددهای ۱، ۲، ... و $n$، که از هر کدام $m$ بار استفاده کرده‌ایم، پر کرده‌ایم. ثابت کنید همواره می‌توان جای عددهای ستونها را طوری عوض کرد که هر یک از عددهای ۱، ۲، ... و $n$ در هر سطر دقیقاً یک بار بیاید.

(ریچارد استونگ، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

کافی است ثابت کنیم می‌توانیم جای عددهای ستونها را طوری عوض کنیم که هر یک از عددهای ۱، ۲، ... و $n$ در سطر بالایی دقیقاً یک بار بیاید؛ در این صورت حکم به استقرا روی تعداد سطرها به‌دست می‌آید. برای اثبات مطلبی که در ابتدا گفتیم از لم ازدواج استفاده می‌کنیم. پسرها را ستونها و دخترها را عددهای ۱، ۲، ... و $n$ بگیرید. فرض کنید پسری (ستونی) دختری (عددی) را می‌خواهد، هرگاه این عدد در این ستون آمده باشد. در هر مجموعه از $k$ ستون، کلاً $km$ عدد وجود دارد. بنابراین دست‌کم $k$ عدد مختلف میان این عددها وجود دارد. بنابراین، راهی برای ازدواج ستونها و عددهایی که در این ستونها قرار دارند وجود دارد. اگر این عددها را به بالای ستون نظیرشان منتقل کنیم، آن‌وقت سطر اول شامل همهٔ این عددهاست.

**۳۹.** فرض کنید $U = \{۱, ۲, \ldots, n\}$، که در آن $n \geq ۳$. می‌گوییم زیرمجموعه‌ای از $U$ مانند $S$ با آرایشی از عضوهای $U$ شکافته می‌شود، هرگاه در این آرایش عضوی که در $S$ نیست جایی بین دو عضو $S$ آمده باشد. مثلاً، ۱۳۵۴۲، $\{۱, ۲, ۳\}$ می‌شکافد، اما $\{۳, ۴, ۵\}$ را نمی‌شکافد. ثابت کنید به‌ازای هر $n - ۲$ زیرمجموعهٔ $U$، که دست‌کم ۲ عضو و حداکثر $n - ۱$ عضو دارند، آرایشی از عضوهای $U$ وجود دارد که همهٔ اینها را می‌شکافد.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۸)

**راه‌حل**

از استقرا روی $n$ استفاده می‌کنیم. به‌ازای $n = ۳$، خانوادهٔ موردنظر از تک زیرمجموعهٔ ۲ عضوی $\{i, j\}$ تشکیل شده است، که جایگشت $(i, k, j)$، که در آن $k$ عضو سوم $U$ است، آن را می‌شکافد.

اکنون فرض کنید که حکم به‌ازای عددی طبیعی مانند $n$، $n \geq ۳$، درست باشد و

$$U = \{۱, ۲, \ldots, n + ۱\}$$

خانواده‌ای مانند $\mathcal{F}$ از $n - ۱$ زیرمجموعه داریم که هرکدام دست‌کم ۲ عضو و حداکثر $n$ عضو دارد.

**لم.** عضوی از $U$ وجود دارد که عضو همهٔ زیرمجموعه‌های $n$ عضوی در $\mathcal{F}$ است، اما عضو حداکثر یکی از زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن است.

**برهان.** فرض کنید خانوادهٔ $\mathcal{F}$ از $k$ زیرمجموعهٔ ۲ عضوی و $l$ زیرمجموعهٔ $n$ عضوی تشکیل شده باشد. در این صورت $k + l \leq n - ۱$. حداکثر $k$ عضو $U$ ممکن است دو بار یا بیشتر در زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آمده باشند. بنابراین، تعداد عضوهایی که حداکثر یک بار در این زیرمجموعه‌ها آمده‌اند دست‌کم برابر است با $(n + ۱) - k$ و

$$(n + ۱) - k \geq (n + ۱) - (n - ۱ - l) = l + ۲$$

چون فقط $l$ عضو وجود دارند که عضو هیچ‌یک از $l$ زیرمجموعهٔ $n$ عضوی نیستند، یکی از این $l + ۲$ عضو ویژگی موردنظر را دارد. ∎

اکنون حکم اصلی را ثابت می‌کنیم. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم عدد $n + ۱$ عضوی از $U$ است که ویژگی گفته شده در لم را دارد. اگر این عضو را حذف کنیم، همهٔ زیرمجموعه‌های $n$ عضوی در $\mathcal{F}$، زیرمجموعه‌هایی $n - ۱$ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ می‌شوند، اما حداکثر یکی از زیرمجموعه‌های ۲ عضوی در $\mathcal{F}$ تک‌عضوی می‌شود.

اگر زیرمجموعه‌ای این‌چنینی مانند $\{i\}$ داشته باشیم، از فرض استقرا نتیجه می‌شود که جایگشتی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند $\pi$ وجود دارد که تمامی $n - ۲$ زیرمجموعهٔ دیگر را (که $n + ۱$ را از آنها حذف کرده‌ایم) می‌شکافد. اگر $n + ۱$ را جایی بعد از $i$ به $\pi$ اضافه کنیم، جایگشتی به‌دست می‌آوریم که تمامی $n - ۱$ زیرمجموعهٔ در $\mathcal{F}$ را می‌شکافد. (توجه کنید که تمامی زیرمجموعه‌های دیگری که شامل $n + ۱$ هستند و پیش از اضافه کردن $n + ۱$ شکافته شده‌اند، شکافته شده باقی می‌مانند.)

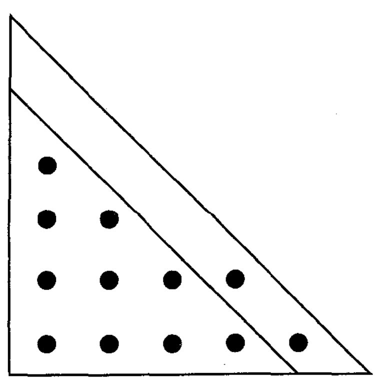
اگر چنین زیرمجموعهٔ تک‌عضوی‌ای نداشته باشیم، از میان $n - ۱$ زیرمجموعه زیرمجموعه‌ای مانند $S$ انتخاب کنید. بنابر اصل لانه کبوتری، جایگشتی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند $\pi$ وجود دارد که تمامی $n - ۲$ زیرمجموعهٔ دیگر را می‌شکافد. اگر $n + ۱ \notin S$، با اضافه کردن $n + ۱$ به $\pi$، جایی بین دو عضو $S$، جایگشتی به‌دست می‌آوریم که تمامی $n - ۱$ زیرمجموعهٔ در $\mathcal{F}$ را می‌شکافد. در غیر این صورت، اگر $n + ۱ \in S$، اگر $\pi$، $S$ را نمی‌شکافت، $n + ۱$ را به ابتدا یا انتهای $\pi$ اضافه می‌کنیم تا $S$ را بشکافد. استقرا کامل شده است.

## یادداشت

اگر $\mathcal{F}$ از $n - ۱$ زیرمجموعه تشکیل شده باشد که هر کدام دست‌کم ۳ عضو و حداکثر $n - ۲$ عضو دارد، می‌توانیم از روشی ساده‌تر استفاده کنیم. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ $k$ عضوی از $U$ مانند $S$، $k!(n-k+۱)!$ جایگشت از $U$ وجود دارد که $S$ را نمی‌شکافند؛ $k!$ جایگشت از عضوهای $S$ و $(n-k+۱)!$ جایگشت از $n-k$ عضوی که در $S$ نیستند و یک قطعهٔ بزرگ از عضوهای $S$ وجود دارد. بیشترین مقدار $k!(n-k+۱)!$، که در آن $۳ \leq k \leq n - ۲$، برابر است با $۳!(n-۲)!$. بنابراین تعداد جایگشتهایی که زیرمجموعه‌ای در $\mathcal{F}$ را نمی‌شکافند حداکثر برابر با $(n-۲)۳!(n-۲)!$ است، که از $n!$، تعداد کل جایگشتها، کمتر است. پس جایگشتی وجود دارد که همهٔ زیرمجموعه‌های در $\mathcal{F}$ را می‌شکافد.

۴۰. $n$ سنگریزه را در ستونی عمودی روی هم چیده‌ایم. این ترکیب را می‌توان با قاعده‌های زیر تغییر داد. اگر سنگریزه‌ای روی ستونی باشد که دست‌کم دو سنگریزه بیشتر از ستون سمت راستش داشته باشد، می‌توان آن را حرکت داد. (اگر سنگریزه‌ای در سمت راست نبود، این وضعیت را ستونی با ۰ سنگریزه در نظر بگیرید.) در هر مرحله، از میان سنگریزه‌هایی که می‌توان آنها را حرکت داد (اگر چنین سنگریزه‌هایی وجود داشتند)، سنگریزه‌ای را انتخاب کنید و آن را روی ستون سمت راستش قرار دهید. اگر هیچ سنگریزه‌ای را نتوان حرکت داد، این ترکیب را ترکیب نهایی می‌نامیم. ثابت کنید، به‌ازای هر $n$، صرفنظر از اینکه در هر مرحله کدام سنگریزه را انتخاب کنیم، ترکیب نهایی‌ای که به‌دست می‌آید یکتاست. این ترکیب را برحسب $n$ توصیف کنید.

(لیگ ریاضی ایالت نیویورک، ۲۰۰۱،
مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۲۰۰۱)



ترکیب نهایی به‌ازای $n = ۱۲$

## راه‌حل اول

در هر مرحله، فرض کنید $p_i$، $1 \leq i$، تعداد سنگریزه‌ها در ستون $i$ام باشد و ستون اول ستونی باشد که سمت چپ بقیهٔ ستونهاست. ثابت می‌کنیم که در ترکیب نهایی، به‌ازای هر $i$ که $p_i > 0$، $p_i = p_{i+1} + 1$، بجز حداکثر یک $i^*$ که $p_{i^*} = p_{i^*+1}$. بنابراین، ترکیب نهایی مانند شکل صفحهٔ قبل است، که در آن $c$ ستون غیرخالی وجود دارد و از ۱ تا $c$ سنگریزه در آخرین سطر قطری در آرایش مثلثی وجود دارد. فرض کنید $t_k$، $k$امین عدد مثلثی باشد، یعنی

$$t_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

در این صورت، $c$ عدد صحیح یکتایی است که $t_{c-1} < n \leq t_c$. فرض کنید $s = n - t_c - 1$. در این صورت در آخرین ستون سمت راست $s$ سنگریزه وجود دارد و درنتیجه دو ستونی که ارتفاعشان برابر است، ستونهای $c - s$ و $c - s + 1$ هستند (مگر وقتی که $s = c$، که در این حالت هیچ دو ستون غیرخالی‌ای ارتفاعشان برابر نیست).

به‌بیان دیگر،

$$p_i = \begin{cases} c - i & i \leq c - s \\ c - i + 1 & i > c - s \end{cases}$$

برای اثبات این مطلب، ثابت می‌کنیم که

**الف)** در هر مرحله،

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots$$

**ب)** در هیچ مرحله‌ای، $i$ و $j$ای وجود ندارند که $i > j$ و

$$p_i = p_{i+1}, \qquad p_j = p_{j+1} > 0, \qquad p_{i+1} - p_j \leq j - i + 1$$

(یعنی میانگین کاهش ارتفاع هر ستون از ستون $i + 1$ تا ستون $j$ برابر با ۱ یا کمتر است).

**ج)** در ترکیب نهایی، یا $p_i - p_{i+1} = 0$ یا $p_i - p_{i+1} = 1$ و حداکثر یک $i$ وجود دارد که $p_i > 0$ و $p_i - p_{i+1} = 0$.

در اثبات حکمهای (الف) تا (ج) از اصطلاحات زیر استفاده می‌کنیم.

$k$ـ سوئیچ، حرکت یک سنگریزه از ستون $k$ به ستون $k + 1$ است و اُفت ستون $i$، $p_i - p_{i+1}$ است.

برای اثبات (الف)، فرض کنید که دنباله‌ای از حرکتهای درست برای اولین بار مثلاً در مرحلهٔ $j$ام منجر به این شود که $p_i < p_{i+1}$. در این صورت حرکتی که به این مرحله ختم شده است باید

$j$ـسوئیچ باشد، و این هم با این شرط که برای سوئیچ کردن، ستون $i$ باید دست‌کم دوتا سنگریزه بیشتر از ستون $i+۱$ داشته باشد تناقض دارد.

برای اثبات (ب)، اگر چنین ترکیبی دست‌یافتنی باشد، در میان همهٔ چنین ترکیبهایی، یکی باید کمترین مقدار $j-i$ را داشته باشد، و اکنون ثابت می‌کنیم که این کمترین مقدار وجود ندارد. فرض کنید

$$p_۱, p_۲, \ldots$$

ترکیبی باشد که در آن $j-i$ کمترین مقدار ممکن است. در این صورت، $j \neq i+۱$؛ ستونهای $i$، $i+۱$ و $i+۲$ درست پیش از حرکتی که ارتفاعها را برابر می‌کند چه وضعیتی دارند؟ حرکت موردنظر باید $k$ـسوئیچ باشد که $i-۱ \leq k \leq i+۲$، اما در این صورت ترکیب پیش از سوئیچ کردن ممکن نیست (نزولی نیست).

اکنون فرض کنید $j > i+۱$. در این دنباله، اولین ترکیب مانند $C$ را در نظر بگیرید که در آن ستونهای $i$، $i+۱$، $j$ و $j+۱$ به ارتفاع نهایی خود می‌رسند. توجه کنید که از $p_{i+۱}$ به $p_j$ ستونها در $C$ هر بار یکی کوتاهتر می‌شوند، زیرا اگر در جایی افتی برابر با ۲ یا بیشتر وجود داشته باشد، برای اینکه به میانگین ۱ یا کمتر برسیم باید در این فاصله افتی برابر با ۰ داشته باشیم و درنتیجه $j-i$ کمترین مقدار ممکن نیست. حرکتی که به $C$ ختم می‌شود یا $i$ـسوئیچ است یا $j$ـسوئیچ. اگر این حرکت $i$ـسوئیچ باشد، در مرحلهٔ قبل ارتفاع ستونهای $i+۱$ و $i+۲$ برابر است، که با اینکه $j-i$ کمترین مقدار ممکن است تناقض دارد. اگر این حرکت $j$ـسوئیچ باشد باز هم به روش مشابه به تناقض می‌رسیم.

سرانجام، برای اثبات (ج) اگر افتی برابر با ۲ یا بیشتر باشد، ترکیب موردنظر نهایی نیست. با این همه، اگر همهٔ افتها ۰ یا ۱ باشند و دو افت برابر با ۰ بین ستونهای غیرخالی (مثلاً بین $i$ و $i+۱$ و بین $j$ و $j+۱$) داشته باشیم، آن‌وقت (ب) نقض می‌شود. بنابراین ترکیب نهایی‌ای که در (ب) صدق می‌کند در (ج) نیز صدق می‌کند. اکنون به‌سادگی معلوم می‌شود که تنها ترکیب نهایی ممکن همان است که قبلاً گفتیم.

**راه‌حل دوم**

در هر مرحله، فرض کنید $c$ آخرین ستون غیرخالی سمت راست باشد. در حکمهای (الف) تا (ج) در راه‌حل قبل، (ب) را با (ب*) عوض کنید، که

**ب*)** در همهٔ ترکیبهایی که از ترکیب اولیه دست‌یافتنی هستند،

$$p_i - p_j \geq j - i - ۱, \qquad i < j \leq c + ۱ \qquad (*)$$

(شرط $j \leq c+۱$، که پیچیدگیهایی را ایجاد می‌کند، برای اینکه (*) درست باشد لازم است.)

حکم (ج)، و درنتیجه راه‌حل مسأله، به‌همان سادگی از (ب*) نتیجه می‌شود که از (ب). (ب*) را به‌روش زیر به استقرا ثابت می‌کنیم.

معلوم است که در ترکیب اولیه نابرابری $(*)$ درست است: چون $c = ۱$، فقط یک حالت وجود دارد، یعنی

$$p_۱ - p_۲ = n > ۲ - ۱ - ۱$$

اکنون فرض کنید ترکیبی مانند

$$p_۱, p_۲, \ldots$$

که آخرین ستون غیرخالی سمت راست $c_p$ است در نابرابری $(*)$ صدق کند و ترکیبی جدید مانند

$$q_۱, q_۲, \ldots$$

با یک $k$ـسوئیچ از این ترکیب به‌دست بیاید. در این صورت $q_k = p_k - ۱$، $q_{k+۱} = p_{k+۱} + ۱$ و به‌ازای هر $i$ دیگر، $q_i = p_i$. اکنون فرض کنید ترکیب جدید $c_q$ ستون غیرخالی داشته باشد. توجه کنید که مگر وقتی که $k = c_p$، $c_q = c_p$.

اکنون ثابت می‌کنیم

$$q_i - q_j \geq j - i - ۱, \qquad i < j \leq c_q + ۱$$

فقط باید حالتهایی را بررسی کنیم که $q_i - q_j < p_i - p_j$، یعنی آنهایی که $i = k$ یا $j = k + ۱$؛ و حالتهایی که $p_i - p_j$ قیدی ندارد، زیرا $j$ از $c_p + ۱$ بزرگتر است (حالت ۴ در زیر). چهارتا از چنین حالتهایی وجود دارند.

**حالت ۱.** اگر $(i, j) = (k, k + ۱)$، آن‌وقت

$$q_i - q_j \geq ۰ = j - i - ۱$$

**حالت ۲.** اگر $i = k$ و $j > k + ۱$، از نابرابری $(*)$ دربارهٔ $(i + ۱, j)$ استفاده کنید و نتیجه بگیرید

$$q_i - q_j \geq q_{i+۱} - q_j = p_{i+۱} - p_j + ۱ \geq j - (i + ۱) - ۱ + ۱ = j - i - ۱$$

**حالت ۳.** اگر $j = k + ۱$ و $i < k$، از نابرابری $(*)$ دربارهٔ $(i, j - ۱)$ استفاده کنید و نتیجه بگیرید

$$q_i - q_j \geq q_i - q_{j-۱} = p_i - p_{j-۱} + ۱ \geq (j - ۱) - i - ۱ + ۱ = j - i - ۱$$

**حالت ۴.** $j = c_p + ۲ = k + ۲$، $p_{k+۱} = ۰$ و $p_k \geq ۲$. اگر $i = k$ یا $i = k + ۱$، آن‌وقت

$$q_i - q_j = q_i \geq ۱ \geq j - i - ۱$$

اگر $i < k$، آن‌وقت

$$q_i - q_j = p_i - ۰ \geq p_i - p_k + ۲ \geq (i - k - ۱) + ۲ = i - j - ۱$$

پس گام استقرایی کامل و (ب*) ثابت شده است.

**۴۱.** فرض کنید $B_n$ مجموعهٔ همهٔ رشته‌های دودویی به طول $n$ باشد. فاصلهٔ دو دنباله از رشته‌ها مانند $(a_i)_{i=1}^{n}$ و $(b_i)_{i=1}^{n}$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$d((a_i),(b_i)) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

فرض کنید $C_n$ زیرمجموعه‌ای از $B_n$ باشد. مجموعهٔ $C_n$ را کد تصحیح خطای کامل (ک‌ت‌خ‌ک) به طول $n$ و خطای مجاز $m$ می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر رشته در $B_n$ مانند $(b_i)$، رشته‌ای یکتا در $C_n$ مانند $(c_i)$ وجود داشته باشد که $d((b_i),(c_i)) \leq m$. ثابت کنید ک‌ت‌خ‌ک‌ای به طول ۹۰ و خطای مجاز ۲ وجود ندارد.

## راه‌حل

فرض کنید $C$ ک‌ت‌خ‌ک‌ای به‌طول ۹۰ و خطای مجاز ۲ باشد. بدون اینکه ازکلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $(0,0,\cdots,0) \in C$. وزن رشتهٔ $(a_i)$ را $\sum a_i$ می‌گیریم. رشته‌ای مانند $(c_i)$ در $C$ وجود ندارد که وزنش ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، زیرا در غیر این صورت رشته‌ای مانند $(b_i)$ وجود دارد که فاصله‌اش از هر دو $(0,0,\cdots,0)$ و $(c_i)$ حداکثر برابر با ۲ است. فرض کنید تعداد رشته‌های به وزن $k$ در $C$ برابر با $n_k$ باشد.

$\binom{90}{3}$ رشته به وزن ۳ وجود دارد و هر یک از آنها باید به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از دقیقاً یک رشته در $C$ به وزن ۵ قرار داشته باشد. هر رشته‌ای به وزن ۵ به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از $\binom{5}{3}$ رشته به وزن ۳ قرار دارد. بنابراین

$$\binom{90}{3} = \binom{5}{3} n_5$$

و درنتیجه $n_5 = 11748$.

$\binom{90}{4}$ رشته به وزن ۴ وجود دارد و هر یک از آنها باید به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از دقیقاً یک رشته در $C$ به وزن ۵ یا ۶ قرار داشته باشد. هر رشته به وزن ۵ از دقیقاً $\binom{5}{4}$ رشته به وزن ۴ به فاصلهٔ ۱ قرار دارد و از هیچ رشته‌ای به وزن ۴ به فاصلهٔ ۲ قرار ندارد. هر رشته به وزن ۶ از دقیقاً $\binom{6}{4}$ رشته به وزن ۴ به فاصلهٔ ۲ قرار دارد. بنابراین

$$\binom{90}{4} = \binom{5}{4} n_5 + \binom{6}{4} n_6$$

و درنتیجه $n_6 = 116430$.

هر یک از $\binom{90}{5}$ رشتهٔ به طول ۵ به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از دقیقاً یک رشته در $C$ به وزن ۵، ۶ یا ۷ قرار دارد. هر رشته‌ای به وزن ۵ در $C$ به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از خودش و

$\binom{۵}{۴}$۸۵ رشتهٔ به وزن ۵ دیگر قرار دارد. هر رشته به وزن ۶ از دقیقاً $\binom{۶}{۵}$ رشته به وزن ۵ به فاصلهٔ ۱ قرار دارد و از هیچ رشته‌ای به وزن ۵ به فاصلهٔ ۲ قرار ندارد. هر رشته به وزن ۷ به فاصله‌ای حداکثر برابر با ۲ از $\binom{۷}{۵}$ رشته به وزن ۵ قرار دارد. بنابراین

$$\binom{۹۰}{۵} = \left(۱ + ۸۵\binom{۵}{۴}\right) n_۵ + \binom{۶}{۵} n_۶ + \binom{۷}{۵} n_۷$$

و درنتیجه $n_۷ = ۱۸۰۶۹۵۴\frac{۲}{۷}$، که ممکن نیست. بنابراین ک‌ت‌خ‌ک‌ای به طول ۹۰ و خطای مجاز ۲ وجود ندارد.

**۴۲.** اگر $n = ۲۰۰۰$، $n = ۲۰۰۱$ یا $n = ۲۰۰۲$، آیا می‌توان عددهای

$$۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, n, n$$

را طوری مرتب کرد که بین هر دو عدد مانند $j$، $j$ عدد قرار داشته باشد؟ (مثلاً، اگر $n = ۴$، ۴۱۳۱۲۴۳۲ چنین آرایشی است.)

**راه‌حل**

می‌گوییم جایگشتی خوب است، هرگاه ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. در حالت کلی، وقتی و فقط وقتی جایگشتی خوب از عددهای

$$۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, n, n$$

وجود دارد که به‌ازای عددی طبیعی مانند $k$، $n = ۴k$ یا $n = ۴k - ۱$.

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $n \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ ۴) یا $n \equiv ۲$ (به‌پیمانهٔ ۴)، جایگشتی خوب از عددهای

$$۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, n, n$$

وجود ندارد. فرض کنید این ادعا درست نباشد و

$$a_۱, a_۲, \ldots, a_{۲n}$$

جایگشتی خوب باشد. به‌ازای هر عدد مانند $k$ فرض کنید $(i_k, j_k)$، $i_k < j_k$، جاهایی باشند که دو عدد $k$ آمده‌اند. در این صورت

$$\sum_{k=۱}^{n} i_k + \sum_{k=۱}^{n} j_k = ۱ + ۲ + \cdots + ۲n$$
$$= n(۲n + ۱) = S_۱$$

که اگر $n \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ ۴)، $S_۱$ فرد است و اگر $n \equiv ۲$ (به‌پیمانهٔ ۴)، $S_۱$ زوج است. از طرف

دیگر، $j_k - i_k = k + ۱$ و درنتیجه

$$\sum_{k=۱}^{n} j_k - \sum_{k=۱}^{n} i_k = ۲ + ۳ + \cdots + (n+۱) = \frac{n(n+۳)}{۲} = S_۲$$

که اگر (به‌پیمانهٔ ۴) ۱ $n \equiv$، $S_۲$ زوج است و اگر (به‌پیمانهٔ ۴) ۲ $n \equiv$، $S_۲$ فرد است. بنابراین

$$۲\sum_{k=۱}^{n} j_k = S_۱ + S_۲$$

یعنی عددی زوج برابر با عددی فرد است، که ممکن نیست. (می‌توانیم از روش زیر هم استفاده کنیم: هر جفت از عددهای زوج مانند $۲k$ و $۲k$ $\quad(۲ \leq ۲k \leq n)$ یک جای فرد و یک جای زوج را می‌گیرند و هر جفت از عددهای فرد مانند $۲k - ۱$ و $۲k - ۱$ $\quad(۱ \leq ۲k - ۱ \leq n)$ یا دو جای فرد را می‌گیرند یا دو جای زوج. بنابراین، عددهای فرد تعداد زوجی از جاهای زوج را می‌گیرند. فرض کنید این تعداد $۲m$ باشد. چون $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ جفت از عددهای زوج مانند $۲k$ و $۲k$ وجود دارد، عددهای زوج $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ جای زوج را می‌گیرند. بنابراین $n = ۲m + \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$، و درنتیجه

$$\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor \equiv n \quad (\text{به‌پیمانهٔ ۲})$$

که اگر (به‌پیمانهٔ ۴) ۱ $n \equiv$ یا (به‌پیمانهٔ ۴) ۲ $n \equiv$، درست نیست.)

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر (به‌پیمانهٔ ۴) ۰ $n \equiv$ یا (به‌پیمانهٔ ۴) ۳ $n \equiv$، جایگشتی خوب وجود دارد. اگر $n = ۳$، جایگشت $(۳, ۱, ۲, ۱, ۳, ۲)$ خوب است. اگر $n = ۴$، جایگشت $(۴, ۱, ۳, ۱, ۲, ۴, ۳, ۲)$ خوب است. اگر $n = ۴m - ۱$، $m \geq ۲$، جایگشت

$$((۴m-۴, ۴m-۶, \ldots, ۲m); ۴m-۲; (۲m-۳, ۲m-۵, \ldots, ۱);$$
$$۴m-۱; (۱, ۳, \ldots, ۲m-۳); (۲m, ۲m+۲, \ldots, ۴m-۴);$$
$$۲m-۱; (۴m-۳, ۴m-۵, \ldots, ۲m+۱); ۴m-۲;$$
$$(۲m-۲, ۲m-۴, \ldots, ۲); ۲m-۱; ۴m-۱;$$
$$(۲, ۴, \ldots, ۲m-۲); (۲m+۱, ۲m+۳, \ldots, ۴m-۳))$$

خوب است. اگر $n = ۴m$، $m \geq ۲$، جایگشت

$$((۴m-۲, ۴m-۴, \ldots, ۲m); ۴m-۱; (۲m-۳, ۲m-۵, \ldots, ۱);$$
$$۴m; (۱, ۳, \ldots, ۲m-۳); (۲m, ۲m+۲, \ldots, ۴m-۲);$$
$$۲m-۱; (۴m-۳, ۴m-۵, \ldots, ۲m+۱); ۴m-۱;$$

$$(۲m-۲, ۲m-۴, \ldots, ۲); ۲m-۱; ۴m;$$
$$(۲, ۴, \ldots, ۲m-۴); (۲m+۱, ۲m+۳, \ldots, ۴m-۳))$$

خوب است.

**یادداشت**

این مسأله را مسألهٔ لنگفورد می‌نامند. این مسأله ارتباط زیادی با مسأله‌های زیر دارد:

لنگفورد. آیا می‌توان مجموعهٔ

$$\{۱, ۲, \ldots, ۲k\}$$

را به $k$ جفت از عددها مانند $(a_۱, b_۱)$، $(a_۲, b_۲)$، ... و $(a_k, b_k)$ طوری افراز کرد که

$$b_i - a_i = i+۱, \qquad ۱ \leq i \leq k$$

اسکولم. آیا می‌توان مجموعهٔ

$$\{۱, ۲, \ldots, ۲k\}$$

را به $k$ جفت از عددها مانند $(a_۱, b_۱)$، $(a_۲, b_۲)$، ... و $(a_k, b_k)$ طوری افراز کرد که

$$b_i - a_i = i, \qquad ۱ \leq i \leq k$$

اسکولم. آیا می‌توان مجموعهٔ

$$\{۲, ۳, \ldots, ۲k\}$$

را به یک مجموعهٔ تک‌عضوی و $k-۱$ جفت از عددها مانند $(a_۱, b_۱)$، $(a_۲, b_۲)$، ... و $(a_{k-۱}, b_{k-۱})$ طوری افراز کرد که

$$b_i - a_i = i, \qquad ۱ \leq i \leq k-۱$$

**۴۳.** فرض کنید $k$، $m$ و $n$ عددهایی صحیح باشند و $۱ < n \leq m-۱ \leq k$. بیشترین اندازهٔ زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots k\}$ مانند $S$ را طوری پیدا کنید که مجموع هیچ $n$ عضو متمایزی از $S$ برابر با $m$ نباشد.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۶)

**راه‌حل**

اگر $m < \frac{n(n+۱)}{۲}$، جواب مسأله معلوم است: مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ خودش ویژگی موردنظر را دارد و بیشترین اندازهٔ موردنظر برابر با $k$ است. از این پس فرض می‌کنیم $m \geq \frac{n(n+۱)}{۲}$.

به‌سادگی می‌توان کران پایینی برای بیشترین اندازهٔ موردنظر پیدا کرد. فرض کنید $r$ بزرگترین

عدد صحیحی باشد که
$$r + (r + ۱) + \cdots + (r + n - ۱) \leq m$$
یا
$$nr + \frac{n(n-۱)}{۲} \leq m \qquad (*)$$
معلوم است که مجموع هیچ $n$ عددی از مجموعهٔ $\{r + ۱, r + ۲, \ldots, k\}$ برابر با $m$ نیست. از نابرابری $(*)$ معلوم می‌شود
$$r = \left\lfloor \frac{m}{n} - \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor$$
و درنتیجه کران پایینی برای بیشترین اندازهٔ موردنظر برابر است با
$$k - \left\lfloor \frac{m}{n} - \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor$$
اکنون ثابت می‌کنیم که این کران پایین درحقیقت همان عددی است که می‌خواهیم. برای این کار، کافی است ثابت کنیم که اگر $S$ زیرمجموعه‌ای از $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ باشد و مجموع هیچ $n$ عضوی از $S$ برابر با $m$ نباشد، آن‌وقت
$$|S| \leq k - \left\lfloor \frac{m}{n} - \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor \qquad (**)$$
از استقرا روی $n$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که $۲ \leq n \leq m - ۱$. در حالتی که $n = ۲$، مجموع هیچ دو عضوی از $S$ برابر با $m$ نیست و درنتیجه به‌ازای هر $i$ که $۱ \leq ۲i \leq m - ۱$، حداکثر یکی از عددهای جفت $(i, m - i)$ ممکن است در $S$ باشد. بنابراین
$$|S| \leq k - \left\lfloor \frac{m-۱}{۲} \right\rfloor$$
که همان نابرابری $(**)$ است.

فرض کنید $n > ۲$. فرض می‌کنیم حکم به‌ازای $n - ۱$ درست است و آن را به‌ازای $n$ ثابت می‌کنیم. فرض کنید $S$ زیرمجموعه‌ای از $\{۱, ۲, \ldots, k\}$ باشد که ویژگی موردنظر را دارد و فرض کنید $x$ کوچکترین عضو $S$ باشد. اگر
$$nx + \frac{n(n-۱)}{۲} > m$$
آن‌وقت
$$S \subseteq \{r + ۱, r + ۲, \ldots, k\}$$
که در آن $r$ همان عددی است که در بالا تعریف کردیم و چیزی برای ثابت کردن نمانده است.

بنابراین فرض می‌کنیم

$$nx + \frac{n(n-۱)}{۲} \leq m$$

از ویژگی $S$ نتیجه می‌شود که اگر $S_۲ = S - \{x\}$، $S_۲$ زیرمجموعه‌ای از $\{x+۱, x+۲, \ldots, k\}$ است که مجموع هیچ $n-۱$ عضو متمایزی از $S_۲$ برابر با $m-x$ نیست. فرض کنید

$$S_۲ = \{s - x : \ \ s \in S_۱\}$$

در این صورت $S_۲$ زیرمجموعه‌ای از $\{۱, ۲, \ldots, k-x\}$ است که مجموع هیچ $n-۱$ عضو متمایزی از $S_۲$ برابر با $m-nx$ نیست. برای اینکه بتوانیم از فرض استقرا استفاده کنیم باید ثابت کنیم

$$n - ۱ \leq m - nx - ۱ \leq k - x$$

نابرابری اول با نابرابری $m - nx \geq n$ هم‌ارز است و این نابرابری هم درست است، زیرا قبلاً فرض کرده‌ایم که $m - nx \geq \frac{n(n-۱)}{۲}$. درستی نابرابری دوم هم واضح است، زیرا $m - ۱ \leq k$. بنابر فرض استقرا، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
|S| &\leq ۱ + k - x - \left\lfloor \frac{m-nx}{n-۱} - \frac{n-۲}{۲} \right\rfloor \\
&= k - \left\lfloor \frac{m-x}{n-۱} - \frac{n}{۲} \right\rfloor \\
&= k - \left\lfloor \frac{mn-nx}{n(n-۱)} - \frac{۱}{۲} - \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor
\end{aligned}$$

از نابرابری

$$nx + \frac{n(n-۱)}{۲} \leq m$$

نتیجه می‌شود

$$mn - nx \geq (n-۱)m + \frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
|S| &\leq k - \left\lfloor \frac{(n-۱)m}{n(n-۱)} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} - \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor \\
&= k - \left\lfloor \frac{m}{n} - \frac{n-۱}{۲} \right\rfloor
\end{aligned}$$

که همان نابرابری (**) است. استقرا کامل شده است.

**۴۴.** دنباله‌ای صعودی از عددهای صحیح نامنفی مانند

$$s_0, s_1, \ldots$$

را خیلی‌جمعی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای همهٔ عددهای صحیح نامنفی مانند $i$ و $j$، $s_{i+j} \geq s_i + s_j$. فرض کنید $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ دو دنبالهٔ خیلی‌جمعی باشند و $\{u_n\}$ دنباله‌ای صعودی از عددهای صحیح باشد و هر عدد صحیح همان‌قدر در $\{u_n\}$ آمده باشد که روی هم در $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ آمده است. ثابت کنید $\{u_n\}$ هم خیلی‌جمعی است.

(کیران کدلایا، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۸)

**راه‌حل**

دنبالهٔ دوگان دنبالهٔ $\{a_n\}$ را، که آن را با $\{A_n\}$ نشان می‌دهیم، این‌طور تعریف می‌کنیم: $A_n$ برابر با کوچکترین عدد صحیح مانند $k$ است که $a_k \geq n$. نکتهٔ کلیدی این است که دنبالهٔ $\{a_n\}$ وقتی و فقط وقتی خیلی‌جمعی است که $\{A_n\}$ خیلی‌جمعی باشد. درحقیقت، فرض کنید $\{a_n\}$ خیلی‌جمعی باشد. در این صورت

$$a_{A_i+A_j} \geq a_{A_i} + a_{A_j} \geq i + j$$

و درنتیجه، بنابر تعریف $\{A_n\}$، $A_{i+j} \leq A_i + A_j$؛ نتیجهٔ عکس هم به‌روش مشابه ثابت می‌شود.

اکنون توجه کنید که اگر $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ به ترتیب دنباله‌های دوگان $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ باشند، دنبالهٔ دوگان $\{u_n\}$، $\{S_n + T_n\}$ است. چون $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ خیلی‌جمعی هستند، $\{S_n + T_n\}$ هم خیلی‌جمعی است. درنتیجه $\{u_n\}$ خیلی‌جمعی است، همان‌چیزی که می‌خواهیم.

**۴۵.** عددهای طبیعی از ۱ تا $n^2$ را به‌طور تصادفی در خانه‌های جدولی $n \times n$ می‌نویسیم. به‌ازای هر جفت از عددهایی که روی یک سطر یا روی یک ستون قرار دارند، نسبت عدد بزرگتر به عدد کوچکتر را حساب می‌کنیم. مشخصهٔ این آرایش کوچکترین کسر در میان این $n^2(n-1)$ کسر است. بیشترین مقدار ممکن مشخصه را پیدا کنید.

(مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

ابتدا ثابت می‌کنیم که مشخصهٔ هر آرایشی مانند $A$، که آن را با $C(A)$ نشان می‌دهیم، از $\frac{n+1}{n}$ کوچکتر یا با آن برابر است. اگر دو عدد در مجموعهٔ

$$G = \{n^2 - n + 1, n^2 - n + 2, \ldots, n^2\}$$

روی یک سطر یا یک ستون قرار داشته باشند، آن‌وقت

$$C(A) \leq \frac{n^۲}{n^۲ - n + ۱} < \frac{n+۱}{n}$$

اگر عددهای عضو $G$ روی سطرها و ستونهای متمایز قرار داشته باشند، آن‌وقت دوتا از آنها روی همان سطر یا همان ستونی قرار دارند که $n^۲ - n$ قرار دارد و درنتیجه

$$C(A) \leq \frac{n^۲ - ۱}{n^۲ - n} = \frac{n+۱}{n}$$

ثابت می‌کنیم مشخصهٔ آرایش

$$a_{ij} = \begin{cases} i + n(j - i + ۱) & i < j \\ i + n(n - i + j - ۱) & i \geq j \end{cases}$$

یعنی

| | | | |
|---|---|---|---|
| $۱ + (n-۱)n$ | $۱$ | $\cdots$ | $۱ + (n-۲)n$ |
| $۲ + (n-۲)n$ | $۲ + (n-۱)n$ | $\cdots$ | $۲ + (n-۳)n$ |
| $۳ + (n-۳)n$ | $۳ + (n-۲)n$ | $\cdots$ | $۳ + (n-۴)n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $(n-۲) + ۲n$ | $(n-۲) + ۳n$ | $\cdots$ | $(n-۲) + n$ |
| $(n-۱) + n$ | $(n-۱) + ۲n$ | $\cdots$ | $n - ۱$ |
| $n$ | $n + n$ | $\cdots$ | $n + (n-۱)n$ |

برابر با $\frac{n+۱}{n}$ است. درحقیقت،

- تفاضل هر دو عددی که روی یک سطر قرار دارند مضربی از $n$ است؛ بنابراین

$$\frac{a_{ik}}{a_{ij}} = \frac{a_{ik}}{a_{ik} - hn} \geq \frac{a_{ik}}{a_{ik} - n} \geq \frac{n^۲}{n^۲ - n} > \frac{n+۱}{n}$$

- عددهای روی ستون اول تصاعدی حسابی‌اند و

$$n \leq (n-۱) + n \leq (n-۲) + ۲n \leq \cdots \leq ۲ + (n-۲)n \leq ۱ + (n-۱)n$$

و درنتیجه

$$\frac{a_{i۱}}{a_{k۱}} \geq \frac{۱ + (n-۱)n}{۲ + (n-۲)n} = \frac{n^۲ - n + ۱}{n^۲ - ۲n + ۲} \geq \frac{n+۱}{n}$$

و تساوی وقتی پیش می‌آید که $n = ۲$.

- ستون $j$ام، $۲ \leq j \leq n$، شامل دو تصاعد حسابی است:

$$j - ۱, (j - ۲) + n, (j - ۳) + ۲n, \ldots, ۱ + (j - ۲)n$$

$$n(j - ۱)n, (n - ۱) + jn, \ldots, j + (n - ۱)n$$

درنتیجه

$$\frac{a_{ij}}{a_{kj}} \geq \frac{j + (n - ۱)n}{(j + ۱) + (n - ۲)n} \geq \frac{n + ۱}{n}$$

**۴۶.** فرض کنید $A$ مجموعه‌ای باشد که $|A| = n$ و $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_n$ زیرمجموعه‌هایی از $A$ باشند که $|A_i| \geq ۲$، $۱ \leq i \leq n$. فرض کنید به‌ازای هر زیرمجموعهٔ دوعضوی $A$ مانند $A'$ عددی یکتا مانند $i$ وجود داشته باشد که $A' \subseteq A_i$. ثابت کنید

$$A_i \cap A_j \neq \varnothing, \qquad ۱ \leq i < j \leq n$$

(هونگ‌بین یو، چین، ۱۹۹۹)

## راه‌حل

بنابر فرض،

$$\sum_{i=۱}^{n} \binom{|A_i|}{۲} = \binom{n}{۲} \qquad (*)$$

فرض کنید $A = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ و $d_i$ تعداد زیرمجموعه‌هایی مانند $A_j$ باشد که

$$x_i \in A_j, \qquad ۱ \leq j \leq n$$

در این صورت

$$\sum_{i=۱}^{n} d_i = \sum_{i=۱}^{n} |A_i| \qquad (**)$$

از طرف دیگر

$$\sum_{i=۱}^{n} \binom{d_i}{۲} = \sum_{i \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

بنابر فرض مسأله، $|A_i \cap A_j| \leq ۱$. کافی است ثابت کنیم $|A_i \cap A_j| = ۱$ یا

$$\sum_{i=۱}^{n} \binom{d_i}{۲} = \binom{n}{۲}$$

بنابر تساویهای $(*)$ و $(**)$ و تعریف ضریب دوجمله‌ای، $\binom{x}{2} = \frac{x^2 - x}{2}$، کافی است ثابت کنیم

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|^2 \qquad (***)$$

به‌ازای هر $i$، مجموعه‌هایی مانند $A_j$ را در نظر می‌گیریم که $x_i \notin A_j$. فرض کنید $A_j$ یکی از این مجموعه‌ها باشد و

$$A_j = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$$

چون هر یک از زیرمجموعه‌های دوعضوی $\{x_i, y_1\}$، $\{x_i, y_2\}$، ... و $\{x_i, y_s\}$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ دیگری مانند $A_k$ هستند (چون ممکن نیست $y_i$ و $y_j$ عضو مجموعهٔ دیگری هم باشند)، پس $d_i \geq |A_j|$. درنتیجه

$$\frac{d_i}{n - d_i} \geq \frac{|A_j|}{n - |A_j|}$$

اگر همهٔ این‌گونه نابرابریها را جمع کنیم به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{d_i}{n - d_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n - |A_j|} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i|x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n - |A_j|} \\ &= \sum_{j=1}^{n} |A_j|\end{aligned}$$

پس، بنابر تساوی $(**)$، در تمام نابرابریهای بالا تساوی برقرار است. بنابراین $d_i = |A_j|$. درنتیجه

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (n - d_i) d_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|x_i \notin A_j} d_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j|x_i \notin A_j} |A_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i|x_i \notin A_j} |A_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} (n - |A_j|)|A_j|\end{aligned}$$

که از آن تساوی $(***)$ نتیجه می‌شود، همان‌چیزی که می‌خواهیم.

**۴۷.** فرض کنید $r_1$، $r_2$، ... و $r_n$ عددهایی حقیقی باشند. ثابت کنید مجموعه‌ای مانند $S$ وجود دارد

که $S \subseteq \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و اگر $۱ \leq i \leq n - ۲$،

$$۱ \leq |S \cap \{i, i + ۱, i + ۲\}| \leq ۲$$

و

$$\left|\sum_{i \in S} r_i\right| \geq \frac{۱}{۶} \sum_{i=۱}^{n} |r_i|$$

(ایران، ۱۹۹۹)

## راه‌حل

فرض کنید $s = \sum_{i=۱}^{n} |r_i|$ و به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳$،

$$s_i = \sum_{r_j \geq ۰, j \equiv i \text{ (به‌پیمانهٔ ۳)}} r_j, \qquad t_i = \sum_{r_j < ۰, j \equiv i \text{ (به‌پیمانهٔ ۳)}} r_j$$

در این صورت $s = s_۱ + s_۲ + s_۳ - t_۱ - t_۲ - t_۳$، یا

$$\begin{aligned} ۲s &= (s_۱ + s_۲) + (s_۲ + s_۳) + (s_۳ + s_۱) \\ &\quad - (t_۱ + t_۲) - (t_۲ + t_۳) - (t_۳ + t_۱) \end{aligned}$$

بنابراین $i_۱$ و $i_۲$ای وجود دارند که $i_۱ \neq i_۲$ و یا $s_{i_۱} + s_{i_۲} \geq \frac{s}{۳}$ یا $t_{i_۱} + t_{i_۲} \leq -\frac{s}{۳}$ یا هر دو. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم $s_{i_۱} + s_{i_۲} \geq \frac{s}{۳}$ و $|s_{i_۱} + s_{i_۲}| \geq |t_{i_۱} + t_{i_۲}|$. بنابراین

$$s_{i_۱} + s_{i_۲} + t_{i_۱} + t_{i_۲} \geq ۰$$

پس

$$(s_{i_۱} + s_{i_۲} + t_{i_۱}) + (s_{i_۱} + s_{i_۲} + t_{i_۲}) \geq s_{i_۱} + s_{i_۲} \geq \frac{s}{۳}$$

بنابراین دست‌کم یکی از عددهای $s_{i_۱} + s_{i_۲} + t_{i_۱}$ و $s_{i_۱} + s_{i_۲} + t_{i_۲}$ از $\frac{s}{۶}$ بزرگتر است و حکم را ثابت کرده‌ایم.

## یادداشت

اگر فرض کنیم $r_۱ = r_۲ = r_۳ = ۱$ و $r_۴ = r_۵ = r_۶ = -۱$، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که $\frac{۱}{۶}$ را نمی‌توان کوچکتر کرد.

**۴۸.** فرض کنید $n$، $k$ و $m$ عددهایی طبیعی باشند و $n > ۲k$. فرض کنید $S$ مجموعه‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های $k$ عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد، به‌طوری که هر زیرمجموعهٔ $k + ۱$ عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ شامل دقیقاً $m$ عضو $S$ باشد. ثابت کنید $S$ باید شامل تمامی

زیرمجموعه‌های $k$ عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد.

(کیران کدلایا، مسألهٔ پیشنهادی به المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۹۹)

## راه‌حل

ابتدا تعداد جفتهایی مانند $(U, V)$ را که در آن $U \in S$ و $V$ زیرمجموعه‌ای $k + ۱$ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است، به دو طریق مختلف حساب می‌کنیم. بنابر فرض، اگر این جفتها را برحسب $V$ مرتب کنیم، $m\binom{n}{k+۱}$ جفت به‌دست می‌آوریم. از طرف دیگر، اگر این جفتها را برحسب $U$ مرتب کنیم، $(n-k)|S|$ جفت به‌دست می‌آوریم. درنتیجه

$$|S| = \frac{m}{n-k}\binom{n}{k+۱} = \frac{m}{k+۱}\binom{n}{k}$$

اکنون تعداد سه‌تاییهایی مانند $(U, V, W)$ را حساب می‌کنیم، که در آن $U$ زیرمجموعه‌ای $k + ۱$ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است و $V$ و $W$ عضوهای متمایزی از $S$ و زیرمجموعهٔ $U$ هستند. اگر این سه‌تاییها را برحسب $U$ مرتب کنیم، از فرض نتیجه می‌گیریم که تعداد این سه‌تاییها برابر است با

$$m(m-۱)\binom{n}{k+۱} = \frac{m(m-۱)(n-k)(n-k+۱)}{k(k+۱)}\binom{n}{k-۱}$$

از طرف دیگر، می‌توانیم این سه‌تاییها را برحسب $V \cap W$، که همواره مجموعه‌ای $k - ۱$ عضوی است، مرتب کنیم. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ $k - ۱$ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند $J$، فرض کنید $S_J$ تعداد عضوهایی از $S$ باشد که عضو $J$اند. هر $J$ در دقیقاً $s_J(s_J - ۱)$ سه‌تایی $V \cap W$ است و درنتیجه

$$\frac{m(m-۱)(n-k)(n-k+۱)}{k(k+۱)}\binom{n}{k-۱} = \sum_J s_J(s_J - ۱)$$

تابع $f(x) = x^۲$ محدب است و

$$\sum_J s_J = k|S| = \frac{mk}{k+۱}\binom{n}{k} = \frac{m(n-k+۱)}{k+۱}\binom{n}{k-۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&\frac{m(m-۱)(n-k)(n-k+۱)}{k(k+۱)}\binom{n}{k-۱}\\ &\quad\geq \frac{m^۲(n-k+۱)^۲}{(k+۱)^۲}\binom{n}{k-۱} - \frac{m(n-k+۱)}{k+۱}\binom{n}{k-۱}\end{aligned}$$

یا

$$\frac{(m-۱)(n-k)}{k} \geq \frac{m(n-k+۱)}{k+۱} + ۱$$

بنابراین

$$m(n-۲k) \geq (k+۱)(n-۲k)$$

چون فرض کرده‌ایم $n > ۲k$، پس $m \geq k+۱$ و درنتیجه $S$ باید شامل تمامی زیرمجموعه‌های $k$عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد.

**۴۹.** مجموعه‌ای مانند $T$ را زوج می‌نامیم، هرگاه تعداد عضوهایش عددی زوج باشد. فرض کنید $n$ عددی زوج و مثبت باشد و $S_۱$، $S_۲$، ... و $S_n$ زیرمجموعه‌هایی زوج از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشند. ثابت کنید $i$ و $j$ای وجود دارند که $۱ \leq i < j \leq n$ و $S_i \cap S_j$ زوج است.

**راه‌حل اول**

تفاضل متقارن دو مجموعه مانند $A$ و $B$ را با $A\Delta B$ نشان می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$$

یعنی $A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B)$. تابع شاخص هر زیرمجموعه از مجموعهٔ $T$ مانند $A$ را با $\psi_A$ نشان می‌دهیم و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_A : T \to \{۰, ۱\}$$

$$\psi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

برخی ویژگیهای تفاضل متقارن را در زیر آورده‌ایم:

**الف)** $A\Delta\varnothing = A$ و $A\Delta A = \varnothing$؛

**ب)** $A\Delta B = B\Delta A$؛

**ج)** $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$؛

**د)** اگر $A$ و $B$ هر دو زوج باشند، $A\Delta B$ هم زوج است.

**ه)** $x \in A_۱\Delta A_۲\Delta\cdots\Delta A_r$ ($r$ عددی طبیعی است) وقتی و فقط وقتی که $x$ عضو تعداد فردی از مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_r$ باشد.

اثبات ویژگیهای (الف)، (ب)، (ج) و (د) تقریباً سرراست است. ویژگی (ه) را به استقرا روی $r$ ثابت می‌کنیم. اگر $r = ۱$ و $r = ۲$، درستی حکم معلوم است. فرض کنید که این ویژگی به‌ازای

$r$ مجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_r$ درست باشد ($r \geq ۲$). فرض کنید

$$X = A_۱ \Delta A_۲ \Delta \cdots \Delta A_r \Delta A_{r+۱} = X_۱ \Delta A_{r+۱}$$

که در آن

$$X_۱ = A_۱ \Delta A_۲ \Delta \cdots \Delta A_r$$

در این صورت وقتی و فقط وقتی $x \in X$ که $x$ یا عضو $X_۱ - A_{r+۱}$ باشد یا عضو $A_{r+۱} - X_۱$. اگر $x \in X_۱ - A_{r+۱}$، آن‌وقت $x \notin A_{r+۱}$ و $x \in X$، یعنی، بنابر فرض استقرا، $x$ عضو تعداد فردی از مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_r$ و $A_{r+۱}$ است. اگر $x \in A_{r+۱} - X$، آن‌وقت $x \in A_{r+۱}$ و $x$ عضو تعداد زوجی از مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_r$ است و درنتیجه $x$ عضو تعداد فردی از مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_r$ و $A_{r+۱}$ است. استقرا کامل شده است.

اکنون آماده‌ایم که حکم اصلی را ثابت کنیم. فرض کنید $n = ۲m$ و

$$S = \{S_۱, S_۲, \ldots, S_{۲m}\}$$

**لم.** تعداد زوجی از مجموعه‌های $S_i$، $۱ \leq i \leq ۲m$، وجود دارند که تفاضل متقارن آنها یا $\varnothing$ است یا $S$.

**برهان.** همهٔ تفاضل متقارنهای ممکن مانند

$$S_{i_۱} \Delta S_{i_۲} \Delta \cdots \Delta S_{i_{۲j}}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $j \geq ۱$. اگر یکی از اینها $\varnothing$ یا $S$ باشد، کار تمام است؛ در غیر این صورت، توجه کنید که تعداد این تفاضلها برابر با $۲^{۲m-۱} - ۱$ است و (بنابر ویژگی (د)) هر یک از آنها زیرمجموعه‌ای زوج از $S$ است. همچنین، توجه کنید که بجز $\varnothing$ و $S$، $۲^{۲m-۱} - ۱$ زیرمجموعهٔ زوج از $S$ وجود دارد. بنابر اصل لانه کبوتری، دوتا از این تفاضلها برابرند. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود (با توجه به ویژگیهای (ب) و (ج)) می‌توانیم فرض کنیم

$$\begin{aligned} T_۱ &= S_۱ \Delta S_۲ \Delta \cdots \Delta S_k \Delta S_{k+۱} \Delta \cdots \Delta S_{۲i} \\ &= S_{k+۱} \Delta \cdots \Delta S_{۲i} \Delta S_{۲i+۱} \Delta S_{۲j-k} = T_۲ \end{aligned}$$

با استفاده از ویژگیهای (الف) و (ب) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \varnothing &= T_۱ \Delta T_۲ \\ &= S_۱ \Delta S_۲ \Delta \cdots \Delta S_k \Delta S_{۲j+۱} \Delta \cdots \Delta S_{۲j-k} \end{aligned}$$

بنابراین $\varnothing$ تفاضل متقارن $k + (۲j - k - ۲i)$ یا $۲(j-i)$ مجموعه است. ■

بنابر لم، می‌توانیم فرض کنیم که عددی زوج مانند $۲i$ وجود دارد که

$$S_۱ \Delta S_۲ \Delta \cdots \Delta S_{۲i} = \varnothing \quad \text{یا} \quad S$$

این دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

**حالت ۱.** فرض می‌کنیم

$$S_۱ \Delta S_۲ \Delta \cdots \Delta S_{۲i} = \varnothing$$

بنابر ویژگی (ه)، هر عضو $S$ عضو تعداد زوجی از مجموعه‌های $S_۱$، $S_۲$، ... و $S_{۲i}$ است. توجه کنید که

$$r_۱ = \sum_{k=۲}^{۲i} |S_۱ \cap S_k| = \sum_{k=۲}^{۲i} \left( \sum_{s_۱ \in S_۱} \psi_{S_k}(s_۱) \right)$$

اگر $s_۱ \in S_۱$، $s_۱$ عضو تعداد فردی از مجموعه‌های $S_۲$، ... و $S_{۲i}$ است، یعنی

$$\sum_{k=۲}^{۲i} \psi_{S_k}(s_۱) \equiv ۱ \quad (\text{به‌پیمانهٔ } ۲)$$

بنابراین

$$r_۱ = \sum_{k=۲}^{۲i} \left( \sum_{s_۱ \in S_۱} \psi_{S_k}(s_۱) \right) = \sum_{s_۱ \in S_۱} \left( \sum_{k=۲}^{۲i} \psi_{S_k}(s_۱) \right)$$

چون $S_۱$ مجموعه‌ای زوج است، $r_۱$ عددی زوج است. بنابراین، دست‌کم یکی از $۲i - ۱$ عدد $|S_۱ \cap S_k|$، $۲ \leq k \leq ۲i$، باید زوج باشد، همان چیزی که می‌خواهیم.

**حالت ۲.** فرض می‌کنیم

$$S_۱ \Delta S_۲ \Delta \cdots \Delta S_{۲i} = S$$

بنابر ویژگی (ه)، هر عضو $S$ عضو تعداد فردی از مجموعه‌های $S_۱$، $S_۲$، ... و $S_{۲i}$ است. توجه کنید که

$$r_۱ = \sum_{k=۲}^{۲i} |S_۱ \cap S_k| = \sum_{k=۲}^{۲i} \left( \sum_{s_۱ \in S_۱} \psi_{S_k}(s_۱) \right)$$

اگر $s_۱ \in S_۱$، $s_۱$ عضو تعداد فردی از مجموعه‌های $S_۲$، ... و $S_{۲i}$ است، یعنی

$$\sum_{k=۲}^{۲i} \psi_{S_k}(s_۱) \equiv ۰ \quad (\text{به‌پیمانهٔ } ۲)$$

بنابراین

$$r_۱ = \sum_{k=۲}^{۲i} \left( \sum_{s_۱ \in S_۱} \psi_{S_k}(s_۱) \right) = \sum_{s_۱ \in S_۱} \left( \sum_{k=۲}^{۲i} \psi_{S_k}(s_۱) \right)$$

چون $r_۱$ مجموعه عددهایی زوج است، پس عددی زوج است. بنابراین، دست‌کم یکی از $۲i - ۱$ عدد $|S_۱ \cap S_k|$، $۲ \leq k \leq ۲i$، باید زوج باشد، همان چیزی که می‌خواهیم.

**راه‌حل دوم** (از تیانکای لیو)

به هر $S_i$ برداری $n$ بعدی مانند $a_i$ نسبت دهید، به‌طوری درایهٔ $j$ام $a_i$ برابر با ۱ است، هرگاه $j$ عضو $S_i$ باشد و در غیر این صورت برابر با ۰ است. در این صورت، زوج بودن $S_i$ را می‌توان این‌طور تعبیر کرد که

$$a_i \cdot a_i \equiv ۰ \pmod{۲}$$

فرض کنید اگر $i \neq j$،

$$a_i \cdot a_j \equiv ۱ \pmod{۲}$$

یعنی، اگر $i \neq j$، تعداد عضوهای اشتراک $S_i$ و $S_j$ عددی فرد باشد. فرض کنید زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند $X$ وجود داشته باشد که

$$\sum_{x\in X} a_x \equiv (۰, ۰, \ldots, ۰) \pmod{۲}$$

در این صورت، به‌ازای هر $i \in X$،

$$a_i \cdot \sum_{x\in X} a_x \equiv ۰ \pmod{۲}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} a_i \cdot \sum_{x\in X} a_x &= a_i \cdot a_i + a_i \cdot \sum_{x\in (X-i)} a_x \\ &\equiv a_i \cdot \sum_{x\in(X-i)} a_x \\ &\equiv |X| - ۱ \pmod{۲} \end{aligned}$$

درنتیجه $|X|$ عددی فرد است. بنابراین $X$ زیرمجموعه‌ای سره از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است، زیرا $n$ عددی زوج است. اما در این صورت، اگر $j \in X$، از

$$a_j \cdot \sum_{x\in X} a_x \equiv ۰ \pmod{۲}$$

نتیجه می‌شود که $|X|$ عددی زوج است، که تناقض است. بنابراین زیرمجموعه‌ای مانند $X$ وجود ندارد.

بنابراین، به‌ازای هر یک از $۲^n$ زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ مانند $Y$، $\sum_{y\in Y} a_y$ به‌پیمانهٔ ۲ با بقیه فرق دارد. از طرف دیگر، در هر مجموع از این نوع، مجموع مختصات بردار باید

عددی زوج باشد، زیرا مجموع بردارهای نظیر مجموعه‌های زوج است. بنابراین، زوجیت مختص آخر هر بردار با $n - ۱$ مختص اول آن مشخص می‌شود. درنتیجه، به‌پیمانهٔ ۲، فقط $۲^{n-۱}$ امکان برای $\sum_{y \in Y} a_y$ وجود دارد، که تناقض است.

بنابراین، $i$ و $j$ای وجود دارند که $a_i \cdot a_j$ زوج است؛ درنتیجه، اشتراک $S_i$ و $S_j$ زوج است.

**۵۰.** فرض کنید $A_۱$، $A_۲$، ...، $B_۱$، $B_۲$، ... مجموعه‌هایی باشند که $A_۱ = \varnothing$، $B_۱ = \{۰\}$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $n$،

$$A_{n+۱} = \{x + ۱ : \ x \in B_n\}, \qquad B_{n+۱} = (A_n \cap B_n) - (A_n \cap B_n)$$

همهٔ عددهای طبیعی مانند $n$ را پیدا کنید که $B_n = \{۰\}$.

### راه‌حل اول

ثابت می‌کنیم وقتی و فقط وقتی $B_n = \{۰\}$ که $n$ توانی از ۲ باشد.

به‌ازای هر مجموعه مانند $S$ از عددهای صحیح فرض کنید $۲S$ مجموعهٔ $\{۲x : \ x \in S\}$ باشد و به‌ازای هر عدد صحیح مانند $k$ فرض کنید $S + k$ مجموعهٔ $\{x + k : \ x \in S\}$ باشد.

ابتدا توجه کنید که اگر $n \geq ۱$، $۰ \notin A_n$. بنابر تعریف $A_۱$، این حکم برای $A_۱$ درست است، و در مورد بقیه به این دلیل درست است که $A_{n+۱}$ از جمع کردن ۱ با عضوهای $B_n$، که همگی نامنفی‌اند، به‌دست می‌آید. از استقرایی ساده نتیجه می‌شود که اگر $n \geq ۱$، $۰ \in B_n$.

اکنون به استقرا روی $n$ ثابت می‌کنیم که اگر $n \geq ۲$،

**الف)** $A_{۲n-۱} = ۲A_n - ۱$؛

**ب)** $B_{۲n-۱} = A_{۲n-۱} \cup B_{۲n}$؛

**ج)** $B_{۲n} = ۲B_n$؛

**د)** $۱ \in B_{۲n-۱}$.

اگر $n = ۲$، درستی این حکمها از تساویهای زیر نتیجه می‌شوند:

$$A_۲ = \{۱\}, B_۲ = \{۰\}, A_۳ = \{۱\}, B_۳ = \{۰, ۱\}, A_۴ = \{۱, ۲\}, B_۴ = \{۰\}$$

برای گام استقرایی، فرض کنید این حکمها به‌ازای $n - ۱$ درست باشند، یعنی فرض کنید

$$A_{۲n-۳} = ۲A_{n-۱} - ۱$$

$$B_{۲n-۳} = A_{۲n-۳} \cup B_{۲n-۲}$$

$$B_{۲n-۲} = ۲B_{n-۱}$$

$$۱ \in B_{۲n-۳}$$

در این صورت حکم (الف) به‌راحتی به‌دست می‌آید، زیرا

$$\begin{aligned} A_{۲n-۱} &= B_{۲n-۲} + ۱ = ۲B_{n-۱} + ۱ \\ &= ۲(A_n - ۱) + ۱ = ۲A_n - ۱ \end{aligned}$$

که در آن در تساویهای اول و سوم از تعریف و در تساوی دوم از فرض استقرا استفاده کرده‌ایم.
در مورد (ب) و (ج) ابتدا باید اطلاعاتی دربارهٔ $A_{۲n-۲}$ به‌دست بیاوریم:

$$\begin{aligned} A_{۲n-۲} &= B_{۲n-۳} + ۱ = (A_{۲n-۳} \cup B_{۲n-۲}) + ۱ \\ &= \big((۲A_{n-۱} - ۱) \cup ۲B_{n-۱}\big) + ۱ \\ &= ۲A_{n-۱} \cup (۲B_{n-۱} + ۱) \end{aligned}$$

با استفاده از این اطلاعات، می‌توانیم $B_{۲n-۱}$ را حساب کنیم. بنابر فرض می‌دانیم که

$$B_{۲n-۲} = ۲B_{n-۱}$$

و بنابر تعریف

$$\begin{aligned} B_{۲n-۱} &= (A_{۲n-۲} \cup B_{۲n-۲}) - (A_{۲n-۲} \cap B_{۲n-۲}) \\ B_n &= (A_{n-۱} \cup B_{n-۱}) - (A_{n-۱} \cap B_{n-۱}) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} B_{۲n-۱} = {} & ۲A_{n-۱} \cup (۲B_{n-۱} + ۱) \cup ۲B_{n-۱} \\ & - \big(۲A_{n-۱} \cup (۲B_{n-۱} + ۱)\big) \cap ۲B_{n-۱} \\ = {} & (۲B_{n-۱} + ۱) \cup ۲A_{n-۱} \cup ۲B_{n-۱} - (۲A_{n-۱} \cap ۲B_{n-۱}) \\ = {} & (۲B_{n-۱} + ۱) \cup \big((۲A_{n-۱} \cup ۲B_{n-۱}) - (۲A_{n-۱} \cap ۲B_{n-۱})\big) \\ = {} & (۲B_{n-۱} + ۱) \cup ۲B_n \end{aligned}$$

در تساوی دوم برای این می‌توانیم مجموعهٔ $۲B_{n-۱} + ۱$ را بیرون بیاوریم که فقط از عددهای فرد تشکیل شده است و $۲B_{n-۱}$ فقط از عددهای زوج تشکیل شده است. در بالا دیدیم که $A_{۲n-۱} = ۲B_{n-۱} + ۱$، پس

$$B_{۲n-۱} = A_{۲n-۱} \cup ۲B_n$$

اکنون آماده‌ایم که (ج) و از روی آن (ب) را ثابت کنیم. از تعریف می‌دانیم که $B_{۲n}$ از عددهایی تشکیل شده است که یا در $A_{۲n-۱}$ قرار دارند یا در $B_{۲n-۱}$ و در هر دو قرار ندارند. ثابت کرده‌ایم که

$$B_{۲n-۱} = A_{۲n-۱} \cup ۲B_n$$

بنابراین $B_n$ شامل هیچ عضوی از $A_{۲n-۱}$ نیست. از طرف دیگر، ثابت کردیم که

$$A_{۲n-۱} = ۲A_n - ۱$$

درنتیجه عضوهای $A_{۲n-۱}$ همگی فردند و ممکن نیست عضوی از $۲B_n$ باشند. بنابراین، $B_{۲n}$ همان $۲B_n$ است، یعنی (ج) را ثابت کرده‌ایم. اکنون حکم (ب) به‌سادگی با قرار دادن $B_{۲n}$ به‌جای $۲B_n$ در تساوی $B_{۲n-۱} = A_{۲n-۱} \cup ۲B_n$ به‌دست می‌آید.

اکنون (د) را ثابت می‌کنیم. در بالا ثابت کردیم که

$$B_{۲n-۱} = (۲B_{n-۱} + ۱) \cup ۲B_n$$

در ابتدای راه‌حل دیدیم که ۰ عضو همهٔ $B_n$هاست. درنتیجه ۱ عضو $۲B_{n-۱} + ۱$ و درنتیجه $B_{۲n-۱}$ است.

در این وضعیت به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که عددهای طبیعی مانند $n$ که $B_n = \{۰\}$، توانهای ۲اند. برای اثبات اینکه توانهای ۲ این ویژگی را دارند، فقط کافی است از استقرایی ساده و تساوی $B_{۲n} = ۲B_n$ استفاده کنیم. برای اینکه ثابت کنیم هیچ عدد دیگری این ویژگی را ندارد، توجه کنید که بنابر (د)، همهٔ $B_n$ها شامل ۱ هستند و اکنون کافی است از استقرایی ساده و تساوی $B_{۲n} = ۲B_n$ استفاده کنیم.

## راه‌حل دوم

فرض کنید تابعهای مولد $g_۱$، $g_۲$، ... این‌طور تعریف شده‌اند: $g_۱(x) = g_۲(x) = ۱$ و

$$g_{n+۱}(x) = g_n(x) + xg_{n-۱}(x)$$

ادعا می‌کنیم که به‌ازای هر $i$، وقتی و فقط وقتی $i \in B_n$ که ضریب $x^i$ در $g_n(x)$ عددی فرد باشد. برای اثبات این مطلب، ابتدا دنبالهٔ $\{f_n\}$ از تابعهای مولد نظیر $A_n$ها را این‌طور تعریف می‌کنیم: $f_۱(x) = ۰$ و $f_{n+۱}(x) = xg_n(x)$. ثابت می‌کنیم که $f_n$ها $A_n$ها را با همان ترکیب نمایش می‌دهند. از استقرا استفاده می‌کنیم. اگر $n = ۱$، معلوم است که این حکم درست است. اکنون فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای $n$ای، $n \geq ۱$، درست باشد و آن را به‌ازای $n + ۱$ ثابت می‌کنیم. تعریف $f_{n+۱}$، $f_{n+۱}(x) = xg_n(x)$، دقیقاً برگردان تعریف $A_{n+۱}$، $A_{n+۱} = \{x + ۱ : x \in B_n\}$، است. در مورد $B_{n+۱}$، برای لحاظ کردن

$$B_{n+۱} = (A_n \cup B_n) - (A_n \cap B_n)$$

می‌توانیم $g_{n+۱}$ را این‌طور انتخاب کنیم: $g_{n+۱}(x) = g_n(x) + f_n(x)$. اگر $n \geq ۲$، می‌توانیم $f_n$ را از تساوی $f_n(x) = xg_{n-۱}(x)$ جایگزین کنیم و همان‌طور که می‌خواهیم، به‌دست بیاوریم

$$g_{n+۱}(x) = g_n(x) + xg_{n-۱}(x)$$

ثابت می‌کنیم که اگر

$$g_n(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \binom{n-۱-k}{k} x^k$$

آن‌وقت $g_n$ در رابطهٔ بازگشتی موردنظر صدق می‌کند. درحقیقت، با این تعریف،

$$\begin{aligned} g_n(x) + x g_{n-۱}(x) &= \sum_{k=\circ}^{\infty} \binom{n-۱-k}{k} x^k + x \sum_{k=\circ}^{\infty} \binom{n-۲-k}{k} x^k \\ &= \sum_{k=\circ}^{\infty} \binom{n-۱-k}{k} x^k + \sum_{k=\circ}^{\infty} \binom{n-۱-k}{k-۱} x^k \\ &= \sum_{k=\circ}^{\infty} \binom{n-k}{k} x^k = g_{n+۱}(x) \end{aligned}$$

می‌ماند که ثابت کنیم همهٔ ضریبهای $g_n(x)$ بجز آنهایی که مقدار ثابت‌اند وقتی و فقط وقتی زوج‌اند که $n$ توانی از ۲ باشد. ابتدا فرض کنید $n$ توانی از ۲ باشد و مثلاً $n = ۲^m$. باید ثابت کنیم که اگر $\circ < k < ۲^{m-۱}$، $\binom{۲^m-۱-k}{k}$ زوج است. توجه کنید که

$$\binom{۲^m-۱-k}{k} = \frac{(۲^m-۱-k)(۲^m-۲-k)\cdots(۲^m-۲k)}{k(k-۱)\cdots ۱}$$

هم صورت و هم مخرج کسر سمت راست تساوی بالا حاصل‌ضرب $k$ عدد صحیح متوالی است. توجه کنید که چون حاصل‌ضرب در مخرج از ۱ شروع شده است، به‌ازای هر عدد صحیح مانند $a$، تعداد مضربهای $a$ در صورت دست‌کم به تعداد مضربهای $a$ در مخرج هست. به‌ویژه، این مطلب در مورد توانهای ۲ درست است. درحقیقت، می‌توانیم چیز بیشتری را ثابت کنیم: اگر $۲^l$ بزرگترین توان ۲ باشد که $k$ را می‌شمارد، آن‌وقت تعداد مضربهای $۲^{l+۱}$ در صورت از تعداد مضربهای $۲^{l+۱}$ در مخرج بیشتر است. معلوم است که تعداد این مضربها در مخرج برابر است با $\lfloor \frac{k}{۲^{l+۱}} \rfloor$. با این حال، تعداد این مضربها در صورت برابر است با $\lceil \frac{k}{۲^{l+۱}} \rceil$، و $۲^m - ۲k$ کوچکترین آنهاست. چون بنابر فرض، $۲^{l+۱}$، $k$ را نمی‌شمارد، تعداد مضربهای $۲^{l+۱}$ در صورت از تعداد مضربهای $۲^{l+۱}$ در مخرج یکی بیشتر است. اکنون، توجه کنید که بزرگترین توان ۲ که حاصل‌ضربی را می‌شمارد برابر است با مجموع تعداد مضربهای $۲^j$، $j \geq ۱$، در این حاصل‌ضرب. بنابراین، از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می‌شود که ضریبهای دوجمله‌ای موردنظر زوج‌اند.

اکنون فرض کنید ضریبهای موردنظر همگی زوج‌اند. اگر $n$ توانی از ۲ نباشد، ثابت می‌کنیم دست‌کم یکی از این ضریبهای دوجمله‌ای بجز اولی فرد است. فرض کنید $n = ۲^m p$، که در آن

$p$ عددی فرد است و $p > ۱$. $\binom{n-۱-۲m}{۲m}$ را در نظر بگیرید:

$$\binom{n-۱-۲^m}{۲m} = \frac{(n-۱-۲^m)(n-۲-۲^m)\cdots(n-۲^{m+۱})}{۱\cdot ۲\cdots ۲m}$$

چون $n \mid ۲^m$، به‌ازای هر $i$،

$$n-i-۲^m \equiv -i \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲^m)$$

بنابراین، به‌ازای هر $i$ که $i < ۲^m$، عامل $n-i-۲^m$ در صورت، همان تعداد از مضربهای ۲ را دارد که عامل $i$ در مخرج. همین مطلب در مورد عاملهای آخر، $n-۲^{m+۱}$ و $۲^m$، هم درست است. هیچ‌یک از آنها بر $۲^{m+۱}$ بخش‌پذیر نیست اما هر دو بر $۲^m$ بخش‌پذیرند، پس درحقیقت ضریب دوجمله‌ای $\binom{n-۱-۲^m}{۲m}$ فرد است.

**۵۱.** فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_k$ زیرمجموعه‌هایی از $S$ باشند که اگر $۱ \le i_۱, i_۲, i_۳, i_۴ \le k$، آن‌وقت

$$|A_{i_۱} \cup A_{i_۲} \cup A_{i_۳} \cup A_{i_۴}| \le n-۲$$

ثابت کنید $k \le ۲^{n-۲}$.

(ایران، ۱۹۹۹)

**راه‌حل**

زیرمجموعه‌ای از $S$ مانند $T$ را ۲ـپوشاندنی می‌نامیم، هرگاه به‌ازای $i$ و $j$ای (که لزومی ندارد متمایز باشند) $T \subseteq A_i \cup A_j$. بنابر فرض، به‌ازای هر زیرمجموعه از $S$ مانند $T$، دست‌کم یکی از مجموعه‌های $T$ و $S-T$، ۲ـپوشاندنی نیست. فرض کنید در میان زیرمجموعه‌های $S$ که ۲ـپوشاندنی نیستند، $A$ مجموعه‌ای باشد که $|A|$ کمترین مقدار ممکن است.

فرض کنید

$$S_۱ = \{A \cap A_۱, A \cap A_۲, \ldots, A \cap A_k\}$$

(ممکن است به‌ازای $i$ و $j$ای متمایز، $A \cap A_i$ و $A \cap A_j$ برابر باشند، دراین صورت یکی از آنها را حذف می‌کنیم.) چون $A$، ۲ـپوشاندنی نیست، اگر $X \in S_۱$، آن‌وقت $A - X \notin S_۱$. بنابراین حداکثر نصف زیرمجموعه‌های $A$ در $S_۱$ قرار دارند و

$$|S_۱| \le ۲^{|A|-۱}$$

از طرف دیگر، فرض کنید $B = S - A$ و

$$S_۲ = \{B \cap A_۱, B \cap A_۲, \ldots, B \cap A_k\}$$

ادعا می‌کنیم که اگر $X \in S_۲$، آن‌وقت $B - X \notin S_۲$. فرض کنید این ادعا درست نباشد و $X$ و $B - X$ هر دو در $S_۲$ باشند و مثلاً،

$$X = B \cap A_l, \qquad B - X = B \cap A_{l'}$$

بنابر ویژگی $A$، مجموعه‌هایی مانند $A_i$ و $A_j$ وجود دارند که به‌ازای $m$ای، $A_i \cup A_j = A - \{m\}$. در این صورت

$$|A_l \cup A_{l'} \cup A_i \cup A_j| = n - ۱$$

که تناقض است. بنابراین فرضمان غلط است و

$$|S_۲| \leq ۲^{|B|-۱} = ۲^{n-|A|-۱}$$

چون هر یک از $A_i$ها به‌طور یکتا براساس اشتراکش با $A$ و $B$ مشخص می‌شود، پس

$$k \leq |S_۱||S_۲| \leq ۲^{n-۲}$$

## فهرست برخی نمادها

| | |
|---|---|
| $\varnothing$ | مجموعهٔ تهی |
| $\mathbb{N}$ | مجموعهٔ عددهای طبیعی |
| $\mathbb{Z}$ | مجموعهٔ عددهای صحیح |
| $a \mid b$ | عدد صحیح $b$ بر عدد صحیح $a$ بخش‌پذیر است. |
| $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ $n$) | $a - b$ بر $n$ بخش‌پذیر است. |
| $\varphi(x)$ | تعداد عددهای طبیعی کوچکتر از یا مساوی با $n$ که نسبت به $n$ اول‌اند. |
| $\lfloor x \rfloor$ | بزرگترین عدد صحیحی که از عدد حقیقی $x$ کوچکتر یا با آن برابر است. |
| $\lceil x \rceil$ | کوچکترین عدد صحیحی که از عدد حقیقی $x$ بزرگتر یا با آن برابر است. |
| $P(m,n)$ | $\frac{m!}{(m-n)!}$ |
| $\binom{m}{n}$ | $\frac{n!}{n!(m-n)!}$ |
| $\lvert A \rvert$ | تعداد عضوهای مجموعهٔ $A$ |