

کنکوری دات بلاگ تقدیم میکند

- تست های فصل به فصل دروس اختصاصی
- پاسخ پرسش های ارائه شده در کتاب درسی
- ارائه مختصر، مفید و کاربردی نکات کنکوری

از مطالعه لذت ببرید



 www.konkoori.blog.ir

« کنکور چیزی جز کتاب نیست و کتاب خواندن، کار دانش آموزان حرفه ای

آموزش حسابان

برد:

برد تابع عبارت است از مجموعه ی مقادیری که تحت تاثیر قانون تابع بر روی عناصر دامنه به وجود می آید.

نکته:

برای محاسبه ی مقادیر تابع عدد انتخابی (X) را در ضابطه ی داده شده قرار داده حاصل عبارت را محاسبه کرده و مقدار تابع مشخص می شود.

الف) $f = \{(1,2), (2,4), (5,3), (0,-1)\}$ اگر تابع به صورت زوج مرتب باشد مقدار تابع مولفه های دوم زوجهای مرتب است.

مثال:

در صورتی که تابع f به صورت

$$F(1)=2 \quad F(2)=4 \quad F(0)=-1 \quad F(5)=3 \quad F(6)=\text{تعریف نشده}$$

ب) اگر ضابطه ی تابع به صورت یک عبارت جبری باشد عدد انتخابی را جانشین X نموده و حاصل عبارت را محاسبه می کنیم .

مثال:

در صورتی که $F(X) = \frac{1-X^2}{X+2}$ باشد مقادیر زیر را حساب کنید. $F(1) = 0$ $F(2) = -\frac{3}{4}$

$$F(0) = \frac{1}{2} \quad F(-2) = \text{تعریف نشده}$$

نکته:

در صورتی که ضابطه ی تابع به صورت چند ضابطه ای بیان شود برای محاسبه ی مقادیر تابع ابتدا مشخص می کنیم عدد داده شده مربوط به کدام یک از نواحی مشخص شده است سپس با استفاده از ضابطه ای آن قسمت مقدار تابع را محاسبه می کنیم.

مثال: در صورتی که $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشند مقادیر خواسته شده را بیابید.

$$F(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \leq -2 \\ x-2 & -2 < x \leq 1 \\ 2-4x & x > 1 \end{cases}$$

$$F(-3) = 3(-3) + 1 = -9 + 1 = -8$$

$$F(-3) = -1 - 2 = -3$$

$$F(2) = 2 - 4(2) = 2 - 8 = -6$$

نکته:

اگر تابع به صورت زوج مرتب داده شده باشد برد تابع مجموعه‌ی مولفه‌های دوم زوجهای مرتب است

مثال:

برد تابع f که به صورت زیر تعریف شده است را مشخص کنید.

$$F\{(-1,4), (0,1), (3,4), (2,5), (-2,4)\}$$

$$= \{4, 1, 5, 3\} \subset \mathbb{R}$$

نکته:

برای محاسبه‌ی برد توابع که ضابطه‌ی آنها مشخص شده است روش مشخص شده است روش مشخص نداریم ولی با توجه به خواص و ویژگیهای توابع برخی از آنها را به صورت زیر معرفی می‌نماییم.

(۱) توابع چند جمله‌ای که به صورت

$$F(X) = ax^n + a_1 m^{n-1+\dots+xn}$$

(الف) اگر n درجه‌ی چند جمله‌ای فرد باشد برد آن $\mathbb{R}$ است.

$$n=2k+1 \Rightarrow R_f = \mathbb{R}$$

(ب) اگر درجه‌ی چند جمله‌ای زوج باشد برد آن از $(-\infty, \max)$ و یا از $(\min, +\infty)$ است.

$$n=2k \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, \max) \\ (\min, +\infty) \end{cases}$$

نکته:

اگر در توابع چند جمله ای $n=2$ باشد این توابع را توابع درجه ی دوم نامیده و به صورت $+ b \ c$ $F(X)= ax^2 + x +$ نمایش می دهیم.

نکته:

در توابع درجه دوم فوق ذکر در صورتی که a ضریب x^2 مثبت باشد تابع دارای $\min$ بوده و برد آن از $(\min, +\infty)$ خواهد بود و $\min$ این توابع از رابطه ای $(+\infty)$ و $(-\frac{\Delta}{4a})$ بدست می آید .

$$a>0 \Rightarrow {}^R f[\min, +\infty) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty \right)$$

نکته:

در توابع درجه ی دوم اگر a منفی باشد تابع دارای $\max$ بوده و $\max$ آن از رابطه ی $-\frac{\Delta}{4a}$ محاسبه شده و برد تابع از $-\infty$ تا $-\frac{\Delta}{4a}$ خواهد بود.

$$a<0 \Rightarrow R_f = (-\infty, \max) = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a})$$

مثال:

برد توابع زیر را محاسبه کنید.

$$1) f(x)= x^2 + 3x - 4 \quad a>0 \Rightarrow \min$$

$$\min = -\frac{\Delta}{4a} = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) = -\left(\frac{25}{4} \right) = -\frac{25}{4}$$

$$R_f = \left[-\frac{25}{4}, +\infty \right)$$

$$2) f(x) = -x^2 + x - 4 \quad a<0 \Rightarrow \max$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(-4) = 1 - 16 = -15$$

$$R_f = (-\infty, \frac{-(-15)}{-4}) = \left(\infty, -\frac{15}{4}\right]$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$$

$$R = \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right]$$

$$x^2 + x - 6$$

$$a > 0 \Rightarrow \min$$

نکته:

$$R_f = \{\min, +\infty\}, \min < 0$$

$$R_{\sqrt{f}} = \{0, +\infty\}$$

$$R_f = \{\min, +\infty\}, \min > 0$$

$$R_{\sqrt{f}} = \{\sqrt{\min}, +\infty\}$$

$$\max > 0 \Rightarrow$$

$$R_{\sqrt{f}} = \{0, \sqrt{\max}\}$$

$$\max < 0 \Rightarrow$$

$$R_{\sqrt{f}} = \Phi$$

$$F(x) = \sqrt{-x^2} + x + 5 \Rightarrow$$

$$a < 0 \Rightarrow \max$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 20 = 21$$

$$\Rightarrow \max = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{-21}{-4} = \frac{21}{4}$$

$$R_f = \{-\infty, \frac{21}{4}\} \quad R_{\sqrt{f}} = \{0, \frac{\sqrt{21}}{4}\}$$

(۲) اگر درضابطه ای تابع بتوان X را بر حسب Y محاسبه نمود دامنه ی عبارت به وجود آمده

برد تابع است.

مثال:

برد تابع زیر را بیابید:

$$\frac{Y}{1} = \frac{X+1}{2X-3}$$

$$2XY - 3Y = X+1 \Rightarrow 2XY - X = 3Y+1$$

$$X(2Y-1) = 3Y+1 \Rightarrow X = \frac{3Y+1}{2Y-1}$$

$$2Y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2Y = 1 \Rightarrow Y = \frac{1}{2} R_F \quad 2Y = 1$$

$$Y =$$

$$R = 1R - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

نکته :

اگر تابع به صورت کلی $Y = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد برد تابع همواره همه ی اعداد حقیقی به جزء نسبت

ضرایب X صورت و X مخرج می باشد.

$$R_f = \setminus R - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

و به طور کلی در توابع گویا که درجه ی صورت و مخرج برابر باشند ضریب بزرگترین جمله ی صورت به بزرگترین جمله ی مخرج به وجود می آید.

۳) در توابع همواره صعودی و همواره نزولی در صورتی که فاصله ی معینی تعریف شده باشند برد به صورت زیر است.

$$D_f = [a, b] \Rightarrow R_f = [f(a), f(b)] \quad \text{همواره صعودی}$$

$$D_f = [a, b] \Rightarrow R_f = [f(b), f(a)] \quad \text{همواره نزولی}$$

مثال:

$$1) f(x) = x^3 \quad [2, 5]$$

$$\Rightarrow R_f = [f(2), f(5)] = [8, 125] \quad \text{صعودی همواره}$$

$$2) f(x) = -x^3 \quad [-1, 3]$$

$$\Rightarrow R_f = [f(b), f(a)] = [-27, +1] \quad \text{همواره نزولی}$$

۴ - در توابعی که ضابطه ی آنها از دو جزء تشکیل شده و مجموع این دو جزء مقدار ثابتی

باشد بیشترین مقدار آن زمانی به وجود می آید که هر کدام از آن قسمتها برابر نصف

مقدار ثابت باشد.

$$F(x) = \sqrt{x(5-x)} \Rightarrow x + (5-x) = 5$$

$$\text{Max} = \frac{5}{2} * \frac{5}{2} = \frac{25}{4} \Rightarrow R_f = \left[0, \sqrt{\frac{25}{4}} \right]$$

$$\Rightarrow R_f \left[0, \frac{5}{2} \right]$$

برد بعضی از توابع خاص:

$$R_{\sin x} = [-1, 1]$$

$$R_{\cos x} = [-1, 1]$$

$$R_{x-[x]} = [0, 1)$$

$$R_{[x]-x} = (-1, 0]$$

$$R_{[x]+[-x]} = \{0, -1\}$$

$$R_{\text{sgn} x} = \{-1, 0, 1\}$$

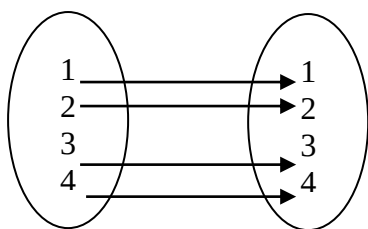
توابع خاص : ۱- تابع صماني: هر تابعی که هر عضو دامنه را به خود همان عضو نسبت دهد را تابع

صماني و ضابطه ی آن را به صورت $I(X)=X$ نشان می دهیم.

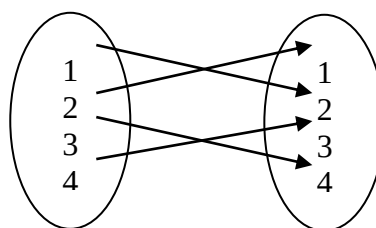
نکته:

در توابع صماني دامنه و برد برابر است ولی هر تابعی که دامنه و برد یکسانی داشته باشد صماني

نیست.



$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}$$



$$F(1)=2$$

$$R_f = \{1, 2, 3, 4\}$$

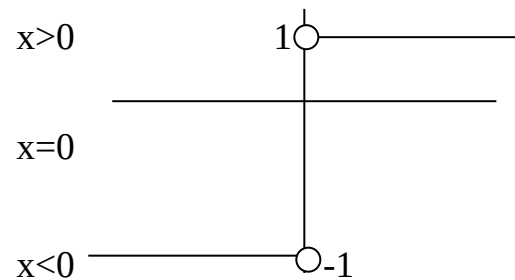
نکته:

نمودار تابع صماني که به صورت $Y=X$ می باشد نیمساز ربع اول و سوم در دستگاه مختصات است.

(۲) تابع ثابت: هر تابع که برد آن فقط یک مقدار تنها باشد را تابع ثابت نامیده و به صورت $F(X)=C$ نشان می دهیم. نمودار تابع ثابت پاره خط یا خطی است موازی محور X ها در دامنه ی تعریفش .

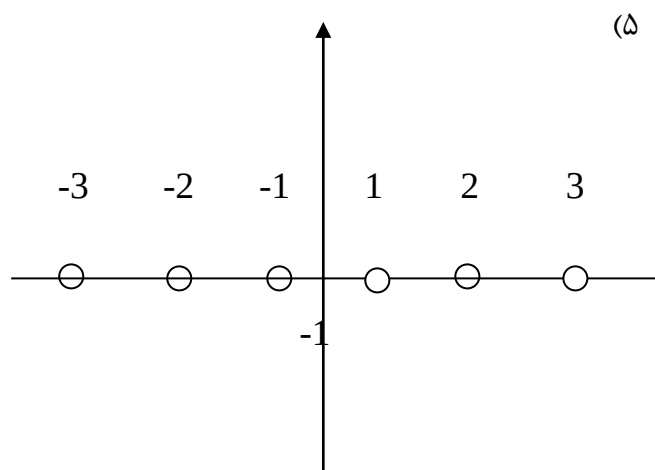
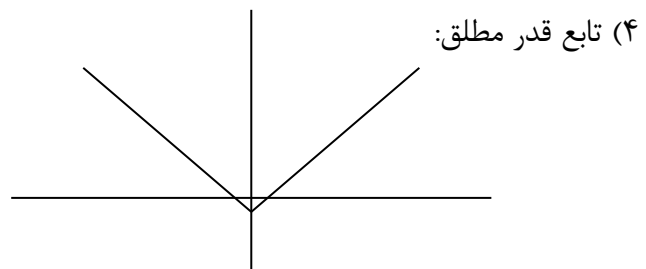
(۳) تابع $s g n$ یا علامت: تابع علامت به صورت زیر تعریف می شود و نمودار آن هم به شکل زیر است.

$$S g n (x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$



دامنه ی تابع $R S g n$ بوده و برد آن مجموعه ی سه عضوی

$$f (x) = \begin{cases} |x| & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} [x] + [-x] = 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

تساوی دو تابع:

دو تابع f و g را مساوی گوییم اگر در شرایط زیر صدق کنند.

$$D_f = D_g \quad \text{(الف)}$$

(۲) برای هر عضو مشترک دامنه مقدار یکسانی ایجاد نماید.

$$(\forall x_0 \in D_f = D_g \Rightarrow F(x_0) = G(x_0))$$

تذکر:

تعریف تساوی دو تابع هیچگاه به این معنی نخواهد بود که اگر دو تابع دامنه های مساوی و بردهای

مساوی داشته باشند برابرند به عنوان نمونه:

$$F(x) = \sin x$$

$$g(x) = \cos x$$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$R_f = R_g = [-1, 1]$$

$$F(0) = \sin 0 = 0$$

$$G(0) = \cos 0 = 1$$

تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

$$F(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$$

$$D_f = (3, +\infty)$$

$$D_g = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$

$$2) F(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x-3}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x-3}}$$

$$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$D_f = [2, 3)$$

$$x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$\Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$D_g = \Phi$$

$$3) F(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$$

$$D_f = [-1, 1)$$

$$D_g = [-1, 1)$$

$$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$D_f = D_g$$

$$1-x > 0 \Rightarrow x < 1$$

$$\forall x_0 \in D_f \Rightarrow_{1-x>0}^{x+1 \geq 0} F(X) = \sqrt{\frac{X+1}{1-X}} = G(x)$$

مساویند.

$$4) F(x) = \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right]$$

$$G(x) = 0$$

$$0 \leq X^2 < X^2 + 1$$

$$D^F = R$$

$$0 \leq \frac{X^2}{X^2+1} < 1$$

$$F(x) = \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right] = 0 = (x)$$

$$5) F(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} + 1$$

$$g(x) = \cos x + 1$$

$$D_f = R$$

$$D_g = R$$

$$F(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} + 1 = \sqrt{\cos^2 x_0 + 1} = |\cos x_0| + 1 \neq g(x)$$

$$6) F(X) = [X] + [-X]$$

$$g(x) = [\cos^2 x]$$

$$D_f = R$$

$$D_g = R$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow -[\cos^2 x] = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$$

$$F(0) = 0$$

,

$$g(0) = -1$$

$$F(0) \neq g(0)$$

$$7) F(X) = IOG_4(X+1)^2$$

$$g(x) = 2iog_4x+1$$

$$D_f = 1R - \{-1\}$$

$$D_g = (-1, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$

$$8) F(x) = I \circ g(x^2+4)^2)$$

$$g(x) = 2 I \circ g(x^2+4)$$

$$D_f = R$$

$$D_g = R$$

$$\forall X_0 \in Dg \Rightarrow x^2+4>0 \quad g(x_0) = iog(x^2+4)^2 = f(x_0)$$

$$9) F(X) = |X-3|$$

$$g(x) = \left| \frac{x^2-x-2}{x+1} \right|$$

$$D_f = R$$

$$D_g = R - \{-1\}$$

$$D_f \neq D_g$$

$$10) F(x) = \frac{x}{x}$$

$$g(x) = 1$$

$$D_f = R - \{0\}$$

$$D_g = 1R$$

$$\Rightarrow D_f \neq D_g$$

تاثیر اعمال جمع و تفریق ضرب و تقسیم بر متغیر مستقل و وابسته در تابع: (ا) اگر تابع $f(x+1)$

تبدیل شود: $\leftarrow f(x)$

الف) اگر $a > 0$ باشد و دامنه ی تابع فاصله ی $D_F = [c, d]$ باشد به مقدار a از دامنه ی تابع کاسته شده برد تابع تغییر نکرده نمودار تابع به اندازه ی a در جهت منفی محور x ها جابه جا می شود.

$$R_f = R_{f(x+a)}, \quad D_{F(x+a)} = [c-a, d-a]$$

ب) اگر a منفی باشد و دامنه فاصل ی $[c, d]$ دامنه ی تابع به اندازه ی a اضافه می شود برد تابع تغییر نکرده و نمودار تابع به اندازه ی قدر مطلق a در جهت مثبت محور x ها جابه جا می شود.

$$A < 0 \quad D_F = [C, d]$$

$$D_F(X+a) =$$

$$[c+a, d+a]$$

$$R_F = R_{F(x+a)}$$

(۲) اگر $f(x)+a$ به $f(x)$ تغییر کند.

الف) اگر $a > 0$ و برد تابع فاصله ی $[c, d]$ باشد دامنه ی تابع تغییر نکرده به برد تابع به اندازه ی a اضافه شده و نمودار تابع a واحد در جهت مثبت محور y ها بالا می رود.

$$a > 0, R_f[c, d], D_f = D_{f(x)+a} \Rightarrow R_{f(x)+a} = [c+a, d+a]$$

ب) اگر a منفی باشد و برد تابع فاصله ی $\{c, d\}$ دامنه ی تابع تغییر نکرده از برد تابع به اندازه ی قدر مطلق a کاسته می شود و نمودار تابع به اندازه ی قدر مطلق a واحد در جهت منفی محور y ها پایین می رود.

$$a < 0, R_f[c, d], D_f = D_{f(x)+a} \Rightarrow R_{f(x)+a} = [c-|a|, d-|a|]$$

(۳) اگر $F(X) \rightarrow F(ax)$ تغییر کند.

الف) اگر $a > 1$ باشد دامنه ی تابع بر a تقسیم شده برد تابع تغییر نکرده و نمودار تابع فشرده تر شده در راستای محور x ها

$$a > 1, D_{f(ax)} = \left[\frac{c}{a}, \frac{d}{a} \right]$$

$$R_{f(ax)} = R_f$$

ب) اگر $a=1$ باشد دامنه برد و نمودار تابع تغییر نمی کند

ج) اگر $0 < a < 1$ باشد در این صورت دامنه ی تابع در معکوس a ضرب می شود برد تغییر نکرده و

نمودار تابع در راستای محور X ها گسترده می شود.

$$D_{f(ax)} = \left[\frac{1}{a} * c, \frac{1}{a} * d \right]$$

د) اگر $a=0$ دامنه ی تابع تغییر نکرده برد تابع $f(0)$ خواهد شد و نمودار تابع پاره خطی به معادله

ی $y=f(0)$ در دامنه ی تعریف تابع خواهد بود.

$$R_{f(ax)} = f(0)$$

ه) اگر $-1 < a < 0$ باشد دامنه ی تعریف تابع ضمن قرینه شدن در $\frac{1}{a}$ نیز ضرب می شود

برد تابع تغییر نکرده و نمودار تابع نسبت به محور y ها قرینه شود

$$D_{f(ax)} = \left[\frac{1}{a} d, \frac{1}{a} c \right]$$

و) اگر $a=-1$ باشد دامنه ی تابع نسبت به محور y ها قرینه شده برد تابع تغییر نمی کند و نمودار

تابع نیز بدون تغییر نسبت به محور y ها قرینه می شود.

$$A=-1 \quad \begin{aligned} D_{F(ax)} &= [-d, -c] \\ R_{F(ax)} &= R_F \end{aligned}$$

ز) اگر $a < -1$ باشد دامنه ی تعریف تابع ضمن قرینه شدن بر قدر مطلق a تقسیم می شود برد تابع

تغییر نکرده و نمودار تابع ضمن قرینه شدن نسبت به محور X ها فشرده می شود.

$$R_{F(ax)} = R_F$$

$$a < -1 \quad D_f(ax) = \left[\frac{-d}{|a|}, \frac{-c}{|a|} \right]$$

۴) اگر $f(x) \rightarrow af(x)$ تغییر کند.

الف) $a > 1$ دامنه ی تابع نکرده برد تابع a برابر شده و نمودار تابع در راستای قائم کشیده می

شود.

$$a > 1 \Rightarrow D_{af(x)} = D_f$$

$$\Rightarrow R_{af(x)} = [ac, ad]$$

ب) اگر $a=1$ دامنه، برد و نمودار هیچ تغییری نمی کند.

ج) اگر $0 < a < 1$ باشد دامنه ی تابع تغییر نکرده برد تابع به نسبت a فشرده شده و نمودار تابع در راستای قائم فشرده می شود.

$$0 < a < 1 \Rightarrow D_{af(x)} = D_f, R_{af(x)} = [ac, ad]$$

$$a = 0 \Rightarrow D_{af(x)} = D_f, R_{af(x)} = \{0\}$$

د) اگر $a=0$ دامنه ی تابع تغییر نکرده برد تابع فقط عدد صفر خواهد بود و نمودار تابع پاره خط $y=0$ در دامنه ی تعریف تابع بوده

پ) اگر $-1 < a < 0$ باشد دامنه ی تابع تغییر نکرده برد تابع نسبت به محور X ها قرینه شده و به نسبت a فشرده می شود.

$$-1 < a < 0 \Rightarrow D_{af(x)} = D_F$$

$$R_{af(x)} = [-|a|d, -|a|c]$$

$$R_F [1, 4]$$

$$R_{-\frac{1}{2}F(X)} = \left[-2, \frac{-1}{2}\right]$$

$$F(X) \rightarrow -\frac{1}{2}(F(X))$$

و) اگر $a = -1$ باشد دامنه تغییر نکرده برد و نمودار فقط نسبت به محور X ها قرینه می شود.

$$D_{af(x)} = D_F$$

$$R_{af(x)} = [-d, -c]$$

ز) اگر $a < -1$ باشد، دامنه تغییر نکرده برد تابع ضمن قرینه شدن a برابر می شود و نمودار تابع ضمن قرینه شدن نسبت به محور X ها گسترده می شود.

$$D_{af(x)} = D_F, R_{af(x)} = [-|a|b, -|a|c]$$

نکته:

اگر چنانچه هر کدام از تغییرات با یکدیگر بر روی ظابطه ی تابع انجام شود بر روی دامنه و برد و نمودار تغییرات را به طور مقوایی انجام می دهیم.

نکته:

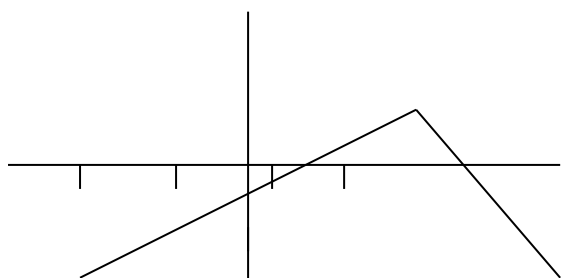
برای انجام تغییرات بر روی تابع از درون به بیرون عمل می کنیم یعنی ابتدا ضرب در دامنه و سپس جمع و تفریق بر دامنه و سپس ضرب در برد و آنگاه جمع و تفریق برد.

$$Y = a f(bx + c) + d$$

مثال:

نمودار تابع معین F با دامنه $[-2, 4]$ و برد $[0, 3]$ در شکل زیر داده شده است اولاً نمودار

$F(2X) + 1$ را رسم کنید ثانیاً دامنه و برد آن را تعیین کنید؟



$$Y = F(2X) + 1$$

$$D_{F(2X)+1} = [-1, 2]$$

$$R = [1, 4]$$

نکته:

تغییراتی که بر روی متغیر مستقل یا آزاد انجام می شود به طور معکوس در دامنه ی تابع تاثیر می گذارد و تغییراتی که بر روی متغیر وابسته یا تابع ایجاد می شود به طور مستقیم در برد تابع اثر می گذارد.

نکته:

اگر چندین تغییر در یک تابع بر روی متغیر مستقل و وابسته اتفاق بافتد همه ی تغییرات به طور متوالی بر روی تابع با توجه به شرایط گفته شده انجام می شود.

نکته:

اولویتهای انجام تغییرات بر تابع از درون به برون بوده و اولویت با ضرب و جمع و تفریق می باشد.

$$Y = F(X) \rightarrow Y = F(bX) \rightarrow y = F(bx + c) \rightarrow y = xf(bx + c) \rightarrow Y = af(bx + c) + b$$

یاد آوری: برای نوشتن معادله ی خطی که بر دو نقطه ی مشخص می گذرد ابتدا با استفاده از

فرمول شیب $M = \frac{Y_1 - Y_2}{X_2 - X_1}$ شیب خط را محاسبه کرده سپس با استفاده از فرمول معادله ی

خط $Y - Y_0 = M(X - X_0)$ که در آن m شیب و x_0 و y_0 طول و عرض یکی از دو نقطه ی دلخواه می باشد معادله ی خط را می نویسیم.

مجانِب قائم:

برای نمودار یک تابع در صورتی که خطی مانند $x=x_0$ وجود داشته و این خط در بی نهایت بر منحنی مماس شود گوییم خط $x=x_0$ مجانب قائم منحنی است و یا به عبارت دیگر اگر x به سمت x_0 میل کند و حد تابع مثبت و منفی بی نهایت شود گوییم خط $x=x_0$ مجانب قائم منحنی است.

$$\begin{cases} X \rightarrow X_0 \\ F(X) \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

نکته:

شرط وجود مجانب قائم آن است که اولاً ضابطه ی تابع کسری بوده و ثانیاً مخرج کسر دارای ریشه باشد.

$$1) f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$$

مجانِب دارد.

$$X^2 - 9 = 0 \Rightarrow X^2 = 9 \Rightarrow X = \pm 3$$

$$2) F(X) = \frac{1}{2\sin X - 1}$$

$$[0, 2\mu]$$

$$2 \sin X - 1 = 0 \Rightarrow \sin X = \frac{1}{2} = \sin \frac{\mu}{6} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{\mu}{6} \\ X = \frac{5\mu}{6} \end{cases}$$

نکته:

با توجه به مطالب فوق برای تعیین مجانب قائم یک منحنی کافایت مخرج را مساوی صفر قرار داده ریشه های آن را مشخص نماییم در صورتی که حد تابع در آن ریشه ها بی نهایت شود آنها را به عنوان مجانب قائم می پذیریم.

$$3) F(X) = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 3X - 4}$$

$$X^2 + 3X - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{مجا} \\ \text{نبا} \\ \text{نبا} \\ \text{نبا} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{X^2 - 1}{X^2 + 3X - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+4} = \frac{2}{5} \dots \dots \dots x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4} = \frac{15}{0 \pm} = \pm \infty \quad x \rightarrow -4$$

نکته:

در تعیین مجانبهای قائم در صورتی که ریشه ی ساده ی مخرج ریشه ی ساده ی صورت نیز باشد آن مقدار به عنوان مجانب قائم نمی تواند باشد و در صورتی که ریشه ی مضاعف مخرج (توانهای زوج) ریشه ی ساده ی صورت (توانهای فرد) آن مقدار مجانب قائم خواهد بود.

$$4) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{0 \pm} = \pm \infty$$

نکته:

برای آنکه ریشه های مخرج به عنوان مجانب قائم پذیرفته شوند باید تابع در همسایگی آن تعریف شده باشد.

مثال:

مجانبهای زیر را بیابید.

$$5) f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-2}} + \frac{x-4}{\sqrt{x+2}}$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$\Rightarrow D_f = (2, +\infty)$$

$$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$6) Y = \frac{1}{\sqrt{X}} + \frac{1}{\sqrt{X-1}}$$

$$X=0$$

$$X-1=0 \Rightarrow X=1$$

$$\Rightarrow D_f = (1, +\infty)$$

$$X > 0$$

$$X-1 > 0 \Rightarrow X > 1$$

نکته:

با توجه به مطالب بالا برای مشخص نمودن مجانب قائم منحنی به صورت زیر عمل می کنیم:

الف) در صورتی که تابع کسری بوده و ریشه ی مخرج وجود داشته باشد امکان وجود مجانب قائم می باشد.

ب) ریشه های مخرج را مشخص می کنیم.

ج) در صورتی که ریشه ی مخرج ریشه ی صورت باشد (هر دو ریشه ساده) آن ریشه مجانب قائم نیست و در صورتی که ریشه ی مضاعف مخرج بود و ریشه ی ساده ی صورت آن ریشه مجانب قائم است.

د) در صورتی که تابع در همسایگی ریشه ی مخرج تعریف نشده باشد ای مقدار مجانب قائم نیست.

تذکر:

برای مجانب قائم بودن ریشه ی مخرج از یم طرف بتوانیم به آن نزدیک شویم کفایت می کند یعنی حد چپ یا حد راست تابع در آن نقطه بی نهایت شود آن مقدار مجانب قائم خواهد بود.

تذکر:

همواره در تعیین مجانب قائم ملاک تعریف مجانب است.

حد دذر بی نهایت: منظور از مفهوم حد در بی نهایت محاسبه ی حد توابع در صورتی که X از هر عدد بزرگی بزرگتر (X برود به سمت $+$) یا X از هر عدد کوچکی کوچکتر شود (X برود به سمت $-$) می باشد.

نکته: برای محاسبه ی حد توابع در بی نهایت سه مطلب زیر را همواره مد نظر قرار می دهیم :

(۱) حد $\frac{1}{x}$ در $\pm\infty$ صفر است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

x	10	100	1000...	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0/1	0/01	0/001...	0

x	-10	-100	-1000 ...	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	-0/1	-0/01	-0/001 ...	0

نکته: در محاسبه ی حد توابع در بی نهایت هرگاه حاصل یک حد تقسیم عدد بر بی نهایت باشد مقدار حد صفر است.

$$\lim_{\pm\infty} \frac{\text{---}}{\text{---}} = 0$$

(۲) حد یک جمله ای am^n طبق جدول زیر محاسبه می شود.

$$LIMAX^n = \begin{cases} n = 2k \Rightarrow \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases} \\ n = 2k+1 \Rightarrow \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ \mp\infty & a < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$X \rightarrow \pm\infty$$

۳) حد یک جمله ای در بی نهایت با حد بزرگترین توان یک جمله ای های آن برابر است.

$$LIM(ax^n + a_1x_1^{n-1} + \dots + a_n) = LIMax^n \quad X \rightarrow \pm\infty$$

$$X \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim(ax^n + a_1x_1^{n-1} + \dots + a_0x) = x \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim ax^n \left(1 + \frac{a_1}{ax} + \frac{a_2}{ax^2} + \dots + \frac{a_n}{ax^n}\right) = x \rightarrow \pm\infty$$

$$= \lim ax^n * 1 = \lim ax^n$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$\frac{a_1}{ax} = \left(\frac{a_1}{a}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^0 =$$

$$\frac{a_2}{ax^2} = \left(\frac{a_2}{a}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

مثال:

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim(x^2 + 3\sqrt{x-4}) = \lim x^2 = +\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$2) \lim(1 - x^2) = \lim(-x^2) = -\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$3) \lim x^2 - 4x^5 + 7x^3 - 100 = \lim(-4x^5) = \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$4) \lim \sqrt{x^2 + 3x} = \lim \sqrt{x^2} = \lim |x| = +\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$5) \lim \sqrt{1-x} = \text{تعریف نشده}$$

$$D_f = (-\infty, 1]$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = \infty + \infty = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

اعمال بر روی بی نهایت:

(۱) جمع دو بی نهایت هم علامت خود آن بی نهایت است.

$$\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

(۲) جمع دو بی نهایت مختلف علامه و یا تفاضل آنه مبهم است.

$$\begin{cases} \infty - \infty \\ -\infty + \infty \\ -\infty - (-\infty) = -\infty + \infty \end{cases} \quad \text{مبهم}$$

(۳) حاصل ضرب به بی نهایتها و یا توان توان رساندن بی نهایتها حاصل بی نهایت بوده و

علامت بی نهایت با توجه به ضرب علامتها و یا توان رساندن علامتها مشخص می شود.

(۴) ضرب عدد در بی نهایت به صورت زیر است:

$$a \times \pm\infty = \begin{cases} \pm\infty & a > 0 \\ \text{مبهم} & a = 0 \\ \pm\infty & a < 0 \end{cases} \quad \text{حدی}$$

(۵) تقسیم بی نهایتها بر یکدیگر مبهم است:

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{مبهم}$$

رفع ابهام حالت $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{bx^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} \pm\infty, n > m \\ \frac{a}{b}, n = m \\ 0, n < m \end{cases}$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

نکته:

در رفع ابهام حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ زمانی که درجه ی صورت از درجه ی مخرج بیشتر باشد حاصل حد بی نهایت شده و علامت بی نهایت با توجه به علامتهای ضرایب بزرگترین جملات صورت و مخرج و اختلاف درجه ی صورت و مخرج مشخص می شود.

مثال:

حدود زیر را بیابید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 5x}{4x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3}{4x} = +\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 5}{4x + 7} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x}{5x^2 - 7} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{5x^2} = 0$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x + 5}}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + |x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 1}}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 5x}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + |x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

رفع ابهام بی نهایت یا - بی نهایت یا: $\infty - \infty$: برای رفع ابهام این حد با استفاده از روشهای

جبری آنرا به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل نموده و با روش رفع ابهام آن حد را محاسبه می کنیم.

نکته:

از جمله عبارتهایی که حد آن به صورت $\infty - \infty$ می باشد عبارتهای اصم با فرجه ی زوج است برای

تبدیل این حدود به بی نهایت، بی نهایت ($\frac{\infty}{\infty}$) عبارت را در مزدوج خود ضرب و تقسیم نموده حد

مورد نظر به $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل شده و حاصل آن را محاسبه می کنیم.

$$1) \lim(\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim(|x| - x) = \infty - \infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim(\sqrt{x^2 + 2x} - x) \times \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim) \frac{2x}{|x| + x} = \lim \frac{2}{2} = 1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$2) \lim(\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \infty + \infty = \pm\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$3) \lim(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2}) = \lim(|x| - |x|) = \infty - \infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2}) \times \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{|x| + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-2x} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}) = \infty - \infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2})$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x+1| - |x-1|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1) - (x-1)) = 2$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

رفع ابهام حالت $0 \times \infty$: برای رفع ابهام این حالت حد داده شده را به صورت $\div$ تبدیل نموده و با روش رفع ابهام $\div$ ادامه می دهیم و برای تبدیل این حدود به $\div$ عامل صفر شونده را در صورت کسر و عکس عامل بی نهایت شونده را در مخرج کسر قرار داده حد به $\div$ تبدیل می شود سپس آن رفع ابهام می نماییم.

مثال:

حدود زیر را رفع ابهام کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\mu}{2}} (x - \frac{\mu}{2}) + a_{nx} = 0 \times \infty$$

$$x \rightarrow \frac{\mu}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\mu}{2}} (x - \frac{\mu}{2}) + a_{nx} = \lim_{x \rightarrow \frac{\mu}{2}} \frac{x - \frac{\mu}{2}}{\frac{1}{a_{nx}}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\mu}{2}} \frac{x - \frac{\mu}{2}}{co + x}$$

$$x \rightarrow \frac{\mu}{2}$$

$$x \rightarrow \frac{\mu}{2}$$

$$x \rightarrow \frac{\mu}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\mu}{2}} \frac{x - \frac{\mu}{2}}{+ ax(\frac{\mu}{2} - x)} = -1$$

$$X \rightarrow \frac{\mu}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + an \frac{3}{x} = \infty \times 0$$

$$\frac{1}{x} = +$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow + \Rightarrow 0$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x + an \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{+ an \frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{+ an^3 +}{+} = 3$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$+ \rightarrow 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right) = 0 \times \infty$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = 0 \times \infty$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

برخی از رابطه های هم ارزی

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} x^3$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (+anx - x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} x^3$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (+anx - \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^3$$

$$x \rightarrow 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 - \cos^m x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^2}{2}$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + a} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| x + \frac{a+b}{2} \right|$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + ax + b} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| x + \frac{a}{2} \right|$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

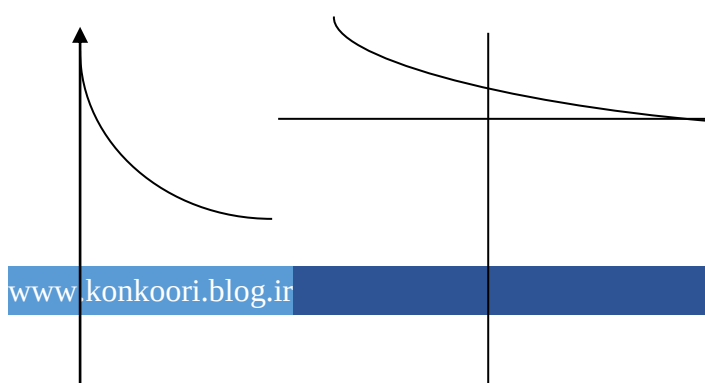
$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{px^n + ax^{n-1} + \dots + a_n} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{p} \left| x + \frac{a}{np} \right|$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

مجاانب افق: هرگاه برای نمودار یک تابع دربی نهایت خطی مانند $y=y_0$ وجود داشته باشد که بر نمودار تابع مماس گردد در این صورت خط $y=y_0$ را مجاانب افقی نمودار تابع می نامیم و یا به عبارت دیگر اگر حد تابع در بی نهایت عددی مانند y_0 شود در این صورت خط $y=y_0$ را مجاانب افقی نمودار تابع می نامیم.



$$\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \\ y \rightarrow y_0 \end{cases} \Rightarrow y = y_0 \quad \text{مجانِب افقی}$$

نکته:

برای تعیین مجانب افقی توابع کافیهست حد تابع را در بی نهایت محاسبه کنیم از جمله توابع کسری که درجه ی صورت و مخرج آنها مستوی بوده و یا درجه ی صورت از مخرج کمتر باشد توابع اصمی که به حالت مبهم $\infty - \infty$ تبدیل شده بعد از رفع ابهام حاصل حد عددی حقیقی باشد.

مثال:

مجانِب افقی توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$1) F(x) = \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$y = 2$$

مجانِب افقی

$$2) F(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{|x|}$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\pm x} = \pm 1$$

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$y = \pm 1$$

مجانِب افقی

$$3) F(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow D_F = (-1,1) \quad \frac{x-4}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{|x|}$$

مجانِب افقی ندارد

$$4) F(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

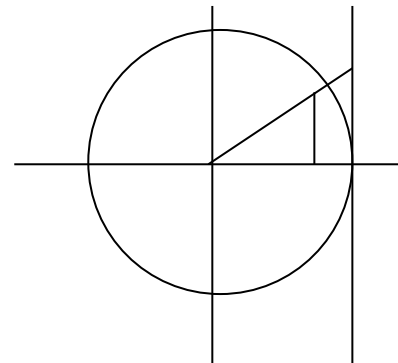
$$Y = 1$$

مجانِب افقی

$$x \rightarrow \pm\infty$$

$$5) F(X) = \frac{1}{\sqrt{X+1}} + \frac{1}{\sqrt{X-1}} \left\{ \begin{array}{l} X+1 > 0 \Rightarrow X > -1 \\ 1-X > 0 \Rightarrow X < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow D_F = (-1, 1)$$

ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \sin x = \frac{MH}{OM} = \frac{MH}{1} \\ \tan x = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} \end{array} \right.$



قطاع $S_{OMA} \Delta \leq S_{OMA} \leq S_{OTA} \Delta$

$$\frac{1}{2} OA \cdot MH \leq \frac{1}{2} OA^2 \cdot x \leq \frac{1}{2} OA \cdot AT$$

$$MH \leq x \leq AT$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$x \rightarrow 0$$

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \leq 1$$

پیوستگی: تابع F و نقطه x_0 در دامنه D_F آن مفروض است گوئیم تابع f در نقطه x_0 پیوسته

اسن در صورتی که هر سه شرط زیر برقرار باشد:

$$(1) \quad x_0 \text{ مطلق به دامنه ی تعریف تابع یا مقدار تابع در آن نقطه معین باشد.}$$

$$1) x_0 \in D_F \quad \text{یا} \quad F(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad \text{تابع در نقطه ی } x_0 \text{ حد داشته باشد: (موجود)}$$

$$2) \lim_{X \rightarrow X_0} F(X)$$

$$X \rightarrow X_0$$

$$(3) \quad \text{حد تابع و مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد.}$$

$$3) \lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = F(X_0)$$

$$X \rightarrow X_0$$

نکته:

اگر حداقل یک از شروط بالا برای نقطه ی x_0 در تابع برقرار نباشد گوییم تابع در آن نقطه ناپیوسته و یا گسسته است.

نکته:

اگر تابعی به ازای همه ی اعداد حقیقی پیوسته بشد نمودار آن یکپارچه و متصل به هم دیگر خواهد بود و در صورتی که تابع در نقاطی گسستگی داشته باشد نمودار تابع در آن قسمت گسسته خواند بود.

نکته:

اگر تابعی در نقطه ای حد نداشته ولی حد راست یا چپ آن در آن نقطه با مقدار تابع مساوی باشد تابع در آن نقطه دارای پیوستگی راست یا پیوستگی چپ خواهد بود.

مثال:

پیوستگی توابع زیر را در نقطه ی داده شده بررسی کنید.

$$1) F(X) = \frac{1}{x}, x_0 = 0$$

$$D_f = R - \{0\} \Rightarrow 0 \notin D_f$$

$$2) F(X) = [x], X_0 = 5$$

$$D_f = R \Rightarrow 5 \in D_f \Rightarrow F(5) = [5] = 5$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 5^+} [x] = 5$$

$$x \rightarrow 5^+ \Rightarrow l^+ = l(5) = 5$$

$$l^- \lim [x] = 4$$

$$x \rightarrow 5^-$$

نکته:

توابع جزء صحیح در نقاط صحیح ناپیوسته اند.

$$F(X) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(X-1)^2}}{X-1} - 1 & X \neq 1 \\ 0 & X = 1 \end{cases}$$

$$D_F = R \Rightarrow 1 \in D_F \Rightarrow F(1) = 0 \quad \text{پیوستگی} \quad \text{راست} \quad \text{دارد}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{|x-1|}{x-1} - 1 \right)$$

$$x \rightarrow 1^+ \quad x \rightarrow 1^+$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{x-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{|x-1|}{x-1} - 1 \right)$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{|x-1|}{x-1} - 1 \right)$$

$$x \rightarrow 1^- \quad x \rightarrow 1^-$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-(x-1)}{x-1} - 1 \right) = -2$$

$$x \rightarrow 1^-$$

$$4) F(X) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2} & X \neq 0 \\ 4 & X = 0 \end{cases} \quad X_0 = 0$$

$$D_F = R \Rightarrow 0 \in D_F \Rightarrow F(0) = 4$$

$$\left. \begin{aligned} L^+ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x-2} = -\frac{1}{2} \\ L^- &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow L = -\frac{1}{2} \\ l \neq F(x_0)$$

پیوسته نیست

$$5) F(X) = (x-2)[x] \quad X_0 = 2$$

$$D_F = R \Rightarrow 2 \in D_F \Rightarrow F(2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} L^+ = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)[x] = 0 \times 2 = 0 \\ L^- = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)[x] = 0 \times 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow L = 0 \quad \begin{array}{l} \text{پیوسته است} \\ l = F(2) = 0 \end{array}$$

حل مسائل پارامتری پیوستگی: با توجه به آنکه می دانیم در صورت پیوسته بودن تابع در یک نقطه هر سه شرط پیوستگی برقرار است لذا در حال مسائل پارامتری پیوستگی همواره حد چپ، حد راست و مقدار تابع را برای هر نقطه ای محاسبه کرده با یکدیگر مساوی قرار داده و به تعداد پارامترهای موجود معادله ایجاد نموده معادلات را در یک دستگاه قرار داده با حل دستگاه پارامترهای مشخص می شود.

مثال:

مقادیر a و b را طوری بیابید که تابعی f با ضابطه ی در نقطه ی (1) پیوسته باشد .

$$F(X) = \begin{cases} ax^2 - 3x & x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ bx - 4 & x > 1 \end{cases}$$

$$l^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(X) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 - 3x) = a - 3$$

$$l^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(X) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx - 4) = b - 4$$

$$x \rightarrow 1^+ \quad x \rightarrow 1^+$$

$$F(1) = 5 \quad \Rightarrow \begin{cases} a - 3 = 5 \Rightarrow a = 8 \\ b - 4 = 5 \Rightarrow b = 9 \end{cases}$$

مثال:

مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه ی زیر روی R پیوسته باشد.

$$F(X) = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b & -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & x > 3 \end{cases}$$

$$l^- = \lim_{x \rightarrow -3} (2x - a) = -6 - a \Rightarrow -3a + 2b = 6 - a$$

$$l^+ = \lim_{x \rightarrow -3^+} (ax + 2b) = -3a + 2b \Rightarrow -2a + 2b = -6$$

$$x \rightarrow -3^+ \Rightarrow a - b = 3$$

$$l^- = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + 2b) = 3a + 2b$$

$$x \rightarrow 3^- \Rightarrow 3a - 2b = b - 15$$

$$l^+ = \lim_{x \rightarrow 3^+} (b - 5x) = b - 15 \Rightarrow 3a + b = -15$$

$$x \rightarrow -3^+$$

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 3a + b = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = -12 \Rightarrow a = -3 \\ -9 + b = -15 \Rightarrow b = -6 \end{cases}$$

مثال:

مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه ی زیر روی فاصله $\{۲ و ۵\}$ پیوسته باشد.

$$F(X) = \begin{cases} 2a - X^2 & 2 \leq x < 3 \\ [X] - 1 & 3 \leq x < 4 \\ bx + 1 & 4 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$L^- \lim_{x \rightarrow 3^-} (2a - x^2) = 2a - 9 \Rightarrow 2a - 9 \Rightarrow 2a = 11 \Rightarrow a = \frac{11}{2}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 3^+} ([x] - 1) = 3 - 1 = 2 \quad x \rightarrow 3^+$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 4^-} ([x] - 1) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow 4b + 1 = 2 \Rightarrow 4b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 4^+} (bx + 1) = 4b + 1 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

مثال:

مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه ی زیر همواره پیوسته باشد.

$$F(X) = \begin{cases} \frac{am+b}{x^2+1} & x > 1 \end{cases}$$

$$\{b-a \quad x=1$$

$$\begin{cases} \frac{\cos \frac{4x}{2}}{|1-x|} & x < 1 \end{cases}$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+b}{x^2+1} = \frac{a+b}{2} \quad x \rightarrow 1^+$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos \frac{\mu x}{2}}{|1-x|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\mu}{2} \sin\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\mu x}{2}\right)}{\frac{\mu}{2}(1-x)} = \frac{\mu}{2} \quad x \rightarrow 1^- \quad x \rightarrow 1^-$$

$$F(1) = b-a \quad \frac{a+b}{2} = \frac{\mu}{2} \Rightarrow a+b = \mu$$

$$a + \frac{3\mu}{4} = \mu \Rightarrow a = \frac{\mu}{4} \quad b-a = \frac{\mu}{2}$$

$$\begin{cases} a+b = \mu \\ b-a = \frac{\mu}{2} \end{cases} \Rightarrow 2b = 3\frac{\mu}{2} \Rightarrow b = \frac{3\mu}{4}$$

مثال:

تابع f با ضابطه ی $\{2x-3\}$ $f(x) = (a-x)$ در $x_0 = \frac{3}{2}$ پیوسته است مقدار a را بیابید.

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} (x-a)[2x-3] = \left(\frac{3}{2}-a\right) * 0 = 0 \quad x \rightarrow \frac{3}{2}^+ \quad 1$$

$$x > \frac{3}{2} \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow 2x-3 > 0$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (x-a)[2x-3] = \left(\frac{3}{2}-a\right)(-1) = a - \frac{3}{2} \quad x \rightarrow \frac{3}{2}^-$$

$$x < \frac{3}{2} \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow 2x-3 < 0$$

$$1, 2 \Rightarrow a - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

نکته:

در صورتی که در مسائل پارامتری پیوستگی تابع در R یا بازه ای داده شده باشد برای حل مسائل نقاطی را انتخاب می کنیم که در دامنه ی تابع شکستگی ایجاد کرده و امکان محاسبه ی حد چپ و راست آنها وجود داشته باشد.