

Subject

Date

۹۲, ۲, ۲

توابع دو متغیره: $z = f(x, y)$

$$APP_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$f: A \rightarrow B \quad y = f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$z = f(x, y) \quad \lim_{z \rightarrow L} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |P - P_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \epsilon$$

شعاع δ : $N_\epsilon = (A(x_0, y_0), \epsilon)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \pm g) = L_1 \pm L_2$$

وقتی دو متغیره صد در صد متغیره دو متغیره را برساند.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f \times g) = L_1 \times L_2$$

مثال: ثابت کنید حد تابع $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{xy} + y \cos x$ وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ برابر صفر است.

$$APP_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |xy \sin \frac{1}{xy} + y \cos x| < \epsilon$$

$$|x + y| < |x| + |y| \Rightarrow |x| |y| \left| \sin \frac{1}{xy} \right| + |y| |\cos x| < \epsilon \Rightarrow |x| |y| + |y| < \epsilon$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$$\begin{cases} |x| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \\ |y| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow |x| |y| < \delta^2 \Rightarrow |x| |y| + |y| < \delta^2 + \delta < \epsilon$$

برای اینکه δ را پیدا کنیم

حدهای متغیره (که اسم حد توابع متغیره)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)) = L_1$$

$$\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)) = L_2$$

محدودیت آردی و وجود داشته باشند ولی صلا نداشته باشند و برعکس

megin

Subject

Date

در این فصل به بررسی حد و پیوستگی توابع چند متغیره خواهیم پرداخت. ابتدا به بررسی حد توابع خواهیم پرداخت و سپس به بررسی پیوستگی توابع خواهیم پرداخت.

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

مثال: نشان دهید که حد این تابع وجود ندارد.

$$y = mx \quad f(m, m) = \frac{x^2 - m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{(1 - m^2)x^2}{(1 + m^2)x^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2} \rightarrow \text{چون } m \text{ هر چه باشد}$$

و این مقدار ثابت است پس حدی وجود ندارد.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (\sin x + x \sin y) = 0$$

مثال: وجود این حد را با استفاده از قضیه لانه چرخه اثبات کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} (\sin x + x \sin y)) = L_1 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + x \sin y)) = L_2 = 0$$

شماره های درونی تابع را تغییر می دهیم: با توجه به تعریف مشتق می توانیم بنویسیم:

$$z = f(x, y) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

$$* \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad * f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = (f_y)_x$$

$$\text{در این فصل } y = f(x) \quad df = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x) dx \Rightarrow \text{تغییرات کوچک}$$

$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

تغییرات کوچک

subject

date

$$f(x, y) = e^x \cos \frac{1}{xy} - \sin \frac{1}{xy}$$

مثال در آمار و احتمال

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow e^x \cos \frac{1}{xy} - \frac{1}{xy} e^x \sin \frac{1}{xy} - \frac{1}{xy} \sin \frac{1}{xy} \cdot \cos \frac{1}{xy}$$

mesim