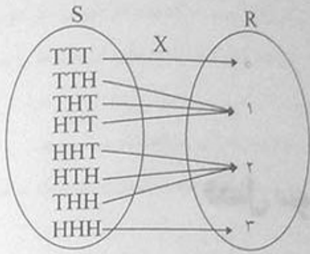


$X : S \to R$

$X(THT)=۱$

$X(HTH)=۲$

$\vdots \qquad \vdots$

تعریف ۱.۳ یک متغیر تصادفی تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است به طوری که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد. برای نمایش متغیر تصادفی از یکی از حروف بزرگ مانند X، Y و... استفاده می‌شود و برای نمایش یکی از مقادیری که متغیر تصادفی اختیار می‌کند از حروف کوچک معادل آن یعنی x، y و... استفاده می‌شود. مجموعه مقادیر و یا برد متغیر تصادفی X را با S_X نمایش می‌دهند و آن را تکیه گاه X گویند. $\left(P(X=2) = P(A)\right)$

با استفاده از متغیرهای تصادفی می‌توان کلیه مباحث احتمال که در فصل قبل بیان شد را به نحو ساده‌تری بیان کرد و این مباحث را نیز تعمیم داد. برای مثال در مثال ۱.۱.۳ در صورتی که گفته شود متغیر تصادفی X دارای مقدار ۲ است، که آن را با مجموعه $\{\omega \in S \mid X(\omega)=۲\}$ و یا به طور ساده‌تر با نماد (X=۲) نمایش می‌دهند، به این معنی است که یکی از اعضای پیشامد $A=\{HHT, HTH, THH\}$ را مشاهده کرده‌ایم و بنابراین (X=۲) یک پیشامد است و می‌توان احتمال آن را به صورت زیر محاسبه کرد. $P(X=۲)=P(A)=\frac{۳}{۸}$. همچنین $(X \leq ۱)$ معادل پیشامد $B=\{TTT, TTH, THT, HTT\}$ است و بنابراین $P(X \leq ۱)=P(B)=\frac{۴}{۸}$ و یا $(X \in (۱/۵, ۲/۵]) = (X=۲) \equiv A$ بنابراین $P(X \in (۱/۵, ۲/۵]) = P(X=۲) = \frac{۳}{۸}$.

توجه توجه کنید که برای هر زیر مجموعه C از اعداد حقیقی منظور از $(X \in C)$ پیشامد این است که مقادیر متغیر تصادفی X در مجموعه C قرار گیرند.

در زیر چند مثال از متغیرهای تصادفی می‌آوریم.

مثال ۲.۱.۳ سه مهره به شماره‌های ۱، ۲ و ۳ را در ۳ جعبه به شماره‌های ۱، ۲ و ۳ به طور تصادفی می‌ریزیم به گونه‌ای که هر جعبه تنها شامل یک مهره باشد. اگر متغیر تصادفی X برابر تعداد جورها

(تعداد مهره‌هایی که در جعبه با شماره متناظر خودشان قرار گرفته‌اند) باشد، مطلوب است

الف- احتمال اینکه دقیقاً یک جور (match) داشته باشیم را بیابید.

ب- احتمال اینکه حداقل دو جور داشته باشیم را بیابید.

حل فهرست نقاط فضای نمونه که عبارت از قرار گرفتن سه مهره ۱، ۲ و ۳ در جعبه‌ها می‌باشد و مقادیری که متغیر تصادفی X به نقاط نسبت می‌دهد عبارت است از

S	۱۲۳	۱۳۲	۲۱۳	۲۳۱	۳۱۲	۳۲۱
x	۳	۱	۱	۰	۰	۱

بنابراین $S_X=\{۰, ۱, ۳\}$ و در نتیجه

الف- $P(X=۱)$ مورد سئوال است پس $P(X=۱)=P(\{۱۳۲, ۲۱۳, ۳۲۱\})=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ب- $P(X \geq ۲)$ مورد سئوال است پس $P(X \geq ۲)=P(X=۳)=P(\{۱۲۳\})=\frac{۱}{۶}$

مثال ۳.۱.۳ سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یک خط مشاهده کنیم و سپس توقف می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی M برابر تعداد پرتابهای لازم تا رسیدن به یک خط باشد، احتمال اینکه حداقل ۴ پرتاب لازم باشد را بیابید.

حل فهرست نقاط فضای نمونه، مقادیری که متغیر تصادفی M به این نقاط نسبت می‌دهد و احتمالات مربوطه عبارت است از

S	T	HT	HHT	$HHHT$	....
M	۱	۲	۳	۴	....
احتمالات	$\frac{۱}{۳}$	$(\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})$	$(\frac{۲}{۳})^۲(\frac{۱}{۳})$	$(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})$	....

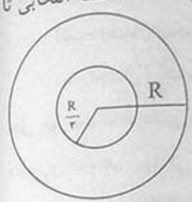
در اینجا $S_M=\{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$ و $P(M \geq ۴)$ مورد سئوال است بنابراین

$$P(M \geq ۴)=P(M=۴)+P(M=۵)+...$$

$$=(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})+(\frac{۲}{۳})^۴(\frac{۱}{۳})+...=\frac{(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})}{۱-\frac{۲}{۳}}=(\frac{۲}{۳})^۳=\frac{۸}{۲۷}$$

مثال ۴.۱.۳ از داخل دایره‌ای به شعاع R نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی Y

را برابر فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره در نظر می‌گیریم. احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره کمتر از $\frac{۱}{۳}$ شعاع دایره باشد را بیابید.



حل در اینجا $S_Y = [۰,R]$ و $P(Y<\frac{R}{۳})$ مورد سئوال است. بنابراین

$$P(Y<\frac{R}{۳}) = \frac{\text{مساحت دایره به شعاع } \frac{R}{۳}}{\text{مساحت دایره به شعاع } R} = \frac{\pi\left(\frac{R}{۳}\right)^۲}{\pi R^۲} = \frac{۱}{۹}$$

متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر باشد را متغیر تصادفی گسسته و متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته می‌نامند. برای مثال، متغیرهای تصادفی مثالهای ۲.۱.۳ و ۳.۱.۳ از نوع گسسته و متغیر تصادفی مثال ۴.۱.۳ از نوع پیوسته می‌باشد.

در بخشهای بعد توزیع احتمال هر یک از متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته را می‌آوریم.

۲.۳ توزیع احتمالات گسسته

در مثال ۲.۱.۳ چون $(X=x)$ یک پیشامد است پس می‌توان احتمال این پیشامد را محاسبه کرد. مثلاً احتمال پیشامد $(X=۰)$ برابر احتمال پیشامد $A=\{۲۳۱,۳۱۲\}$ است که برابر $\frac{۲}{۶}$ است یعنی $P(X=۲)=P(A)=\frac{۲}{۶}$. با به دست آوردن احتمالات دیگر مربوط به نقاط ۱ و ۳ از مجموعه مقادیر متغیر تصادفی X یعنی $S_X=\{۰,۱,۳\}$ جدول زیر که به جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی گسسته X موسوم است را به دست می‌آوریم

x	۰	۱	۳
$P(X=x)$	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۳}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

جدول فوق یک تابع از S_X به اعداد حقیقی در فاصله $[۰,۱]$ برقرار می‌کند که آن را با تابع $f_X(x)$ نمایش داده و به آن تابع احتمال متغیر تصادفی X گویند، بنابراین

$$f_X(x)=P(X=x)$$

این تابع یک تابع غیر منفی است و مجموع آن روی کلیه مقادیری که می‌تواند اختیار کند برابر ۱

است.

تعریف ۲.۳ تابع $f_X(x)=P(X=x)$ را تابع احتمال متغیر تصادفی X گویند هر گاه

۱- برای هر $x\in R$ داشته باشیم که $f_X(x)\geq ۰$

۲- $\sum_{x\in R} f_X(x)=۱$

برای محاسبه احتمال پیشامد $(X\in C)$ که C زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\boxed{P(X\in C)=\sum_{x\in C} f_X(x)} \qquad (۱.۳)$$

مثال ۱.۲.۳ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر مجموع اعداد روی دو تاس مشاهده شده در نظر می‌گیریم.

الف- تابع احتمال X را به دست آورید.

ب- احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس حداکثر ۴ شود را بیابید.

ج- احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس بین ۶ و ۹ شود را بیابید.

حل الف- تکیه گاه X برابر $S_X=\{۲,۳,۴,\ldots,۱۲\}$ است و برای مثال

$$P(X=۴)=P(\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\})=\frac{۳}{۳۶}$$

با محاسبه احتمالات مربوط به نقاط دیگر S_X تابع احتمال X به صورت زیر به دست می‌آید.

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f_X(x)=P(X=x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

ب- $P(X\leq ۴)$ مورد سئوال است بنابراین از فرمول (۱.۳) داریم که

$$P(X\leq ۴)=f_X(۲)+f_X(۳)+f_X(۴)=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ج- با استفاده از فرمول (۱.۳) داریم که

$$P(۶<X<۹)=f_X(۷)+f_X(۸)=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۵}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

مثال ۲.۲.۳ تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f_Y(y) = k\left(\frac{1}{6}\right)^y \qquad y = 0, 1, 2, ...$$

الف- مقدار k را چنان تعیین کنید که $f_Y(y)$ تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته Y باشد.

ب- احتمالات زیر را محاسبه کنید $\quad P(Y\le \frac{5}{2}) \quad , \quad P(Y\ge\frac{11}{3})$

حل الف- با توجه به تعریف ۲.۳ بایستی $k\ge 0$ و همچنین

$$1=\sum_{y=0}^{+\infty} f_Y(y) = \sum_{y=0}^{+\infty} k\left(\frac16\right)^y = k\left[1+\frac16+\left(\frac16\right)^2+...\right]=k\left[\frac{1}{1-\frac16}\right]=k\left(\frac65\right)$$

بنابراین بایستی $k=\frac56$ باشد.

ب- با استفاده از فرمول (۱.۳) داریم که

$$P(Y\le\frac52)=f_Y(0)+f_Y(1)+f_Y(2)=\frac56\left[1+\frac16+\frac1{36}\right]=\frac56\times\frac{43}{36}=\frac{215}{216}$$

$$P(Y\ge\frac{11}{3})=\sum_{y=4}^{+\infty} f_Y(y)=\sum_{y=4}^{+\infty}\left(\frac56\right)\left(\frac16\right)^y=\frac{\frac56\left(\frac16\right)^4}{1-\frac16}=\left(\frac16\right)^4=\frac1{1296}$$

مثال ۳.۲.۳ فرمولی برای تابع احتمال تعداد شیر وقتی سکه‌ای را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم به دست آورید.

حل در اینجا فضای نمونه دارای $n(S)=2^4$ عضو هم شانس است. اگر متغیر تصادفی X را برابر تعداد شیرهای مشاهده شده در ۴ مرتبه پرتاب سکه در نظر بگیریم در این صورت $S_X=\{0,1,2,3,4\}$ و $P(X=x)$ به این معنی است که در ۴ مرتبه پرتاب سکه می‌خواهیم x شیر مشاهده کنیم که تعداد حالات مساعد آن برابر $\binom{4}{x}$ است. بنابراین

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{\binom{4}{x}}{2^4} \qquad x=0,1,2,3,4$$

تابع توزیع (تجمعی)

تعریف ۳.۳ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد آنگاه تابع توزیع (تجمعی) X که با نماد $F_X(x)$ نمایش داده می‌شود، برای هر $x\in R$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\boxed{F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x} f_X(t)} \qquad (3.3)$$

احتمال کوچکتر مساوی را جمع می‌زند.

مثال ۴.۲.۳ در مثال ۲.۱.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورید.

حل در قسمت قبل دیدیم که تابع احتمال متغیر تصادفی مثال ۲.۱.۳ عبارت است از

x	0	1	3
$f_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

برای محاسبه تابع توزیع ابتدا آن را در چند نقطه دلخواه محاسبه می‌کنیم.

$$F_X(0/5)=P(X\le 0/5)=\sum_{t\le 0/5} f_X(t)=f_X(0)=\frac26$$

$$F_X(2/3)=P(X\le 2/3)=\sum_{t\le 2/3} f_X(t)=f_X(0)+f_X(1)=\frac26+\frac36=\frac56$$

به راحتی دیده می‌شود که برای هر $x<0$ ، $F_X(x)=0$ و برای هر $0\le x<1$ ، $F_X(x)=\frac26$ و....

بنابراین با انجام محاسبات تابع توزیع X به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac26 & 0\le x<1 \\ \frac56 & 1\le x<3 \\ 1 & 3\le x \end{cases}$$

مثال ۵.۲.۳ در مثال ۳.۲.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورده و تابع احتمال و تابع توزیع را رسم کنید.

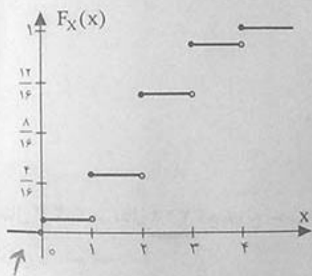
حل فرم جدولی تابع احتمال مثال ۳.۲.۳ به صورت زیر می‌باشد.

x	0	1	2	3	4
$f_X(x)=P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

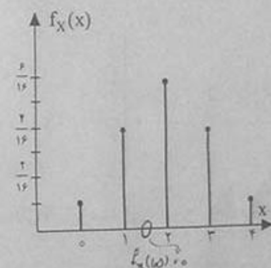
بنابراین با انجام عملیات مشابه مثال قبل تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{16} & 0\le x<1 \\ \frac{5}{16} & 1\le x<2 \\ \frac{11}{16} & 2\le x<3 \\ \frac{15}{16} & 3\le x<4 \\ 1 & 4\le x \end{cases}$$

معمولاً نمودار تابع احتمال را به صورت یک نمودار میله‌ای رسم می‌کنند و نمودار تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته یک تابع پله‌ای است که این دو نمودار در زیر رسم شده‌اند.



نمودار پله‌ای تابع توزیع مثال ۵.۲.۳



نمودار میله‌ای تابع احتمال مثال ۵.۲.۳

خواص تابع توزیع با توجه به تعریف تابع توزیع و همچنین با توجه به نمودار بالا خواص زیر را در مورد تابع توزیع می‌توان بیان کرد.

الف- برای هر $x\in R$، $0\le F_X(x)\le 1$.

ب- تابع توزیع یک تابع غیرنزولی است یعنی

$$x_1<x_2 \Rightarrow F_X(x_1)\le F_X(x_2)$$

ج-

$$\boxed{\begin{aligned} F_X(-\infty)&=\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0 \\ F_X(+\infty)&=\lim_{x\to+\infty}F_X(x)=1 \end{aligned}}$$

د- تابع توزیع همواره از سمت راست پیوسته است یعنی

$$\lim_{x\to a^+}F_X(x)=F_X(a)$$

توجه کنید که از روی تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته می‌توان تابع احتمال آن را توسط فرمول زیر به دست آورد.

$$\boxed{f_X(x)=F_X(x)-F_X(x^-)} \qquad (۳.۳)$$

که در آن $F_X(x^-)$ حد سمت چپ تابع توزیع در نقطه x است یعنی

$$F_X(x^-)=\lim_{t\to x^-}F_X(t)$$

مثلاً در مثال ۵.۲.۳ داریم که

$$f_X(2)=F_X(2)-F_X(2^-)=\frac{11}{16}-\frac{5}{16}=\frac{6}{16}$$

و همچنین

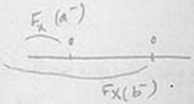
$$f_X(1/5)=F_X(1/5)-F_X(1/5^-)=\frac{5}{16}-\frac{5}{16}=0$$

همچنین توجه کنید که هر نوع احتمالی را می‌توان توسط تابع توزیع از فرمولهای زیر محاسبه کرد:

۱- $P(a<X\le b)=F_X(b)-F_X(a)$

۲- $P(a<X<b)=F_X(b^-)-F_X(a)$

۳- $P(a\le X<b)=F_X(b^-)-F_X(a^-)$



۴- $P(a\le X\le b)=F_X(b)-F_X(a^-)$

۵- $P(X>a)=1-F_X(a)$

۶- $P(X=b)=F_X(b)-F_X(b^-)$

مثال ۶.۲.۳ یک کلاس آمار ۸ شاگرد دارد که ۵ نفر آنها ۱۹ ساله و ۳ نفر آنها ۲۱ ساله هستند. از این کلاس ۲ شاگرد به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر میانگین سن ۲ شاگرد انتخابی در نظر می‌گیریم. تابع احتمال و تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورده و $P(19<X<21)$ را محاسبه کنید.

حل در اینجا $S_X=\{19,20,21\}$ و

$$f_X(19)=P(X=19)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}$$

$$f_X(20)=P(X=20)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}\quad,\quad f_X(21)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}$$

بنابراین تابع احتمال X برابر است با

x	۱۹	۲۰	۲۱
$f_X(x)$	$\frac{۱۰}{۲۸}$	$\frac{۱۵}{۲۸}$	$\frac{۳}{۲۸}$

و در نتیجه تابع توزیع X به صورت زیر به دست می آید

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases} ۰ & x<۱۹ \\ \frac{۱۰}{۲۸} & ۱۹\le x<۲۰ \\ \frac{۲۵}{۲۸} & ۲۰\le x<۲۱ \\ ۱ & ۲۱\le x \end{cases}$$

برای محاسبه $P(۱۹<X<۲۱)$ به دو صورت زیر می توان عمل کرد.

$$P(۱۹<X<۲۱)=f_X(۲۰)=\frac{۱۵}{۲۸}$$
$$P(۱۹<X<۲۱)=F_X(۲۱^-)-F_X(۱۹)=\frac{۲۵}{۲۸}-\frac{۱۰}{۲۸}=\frac{۱۵}{۲۸}$$

۳.۳ توزیع احتمالات پیوسته

متغیر تصادفی که مجموعه مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد را متغیر تصادفی پیوسته گویند. در مورد متغیر تصادفی پیوسته بایستی توجه کرد که احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته بخواهد فقط یک مقدار بخصوص از مجموعه مقادیرش را بگیرد برابر صفر است. به مثال زیر توجه کنید.

* **مثال ۱.۳.۳** نقطه‌ای را به تصادف از فاصله اعداد حقیقی $[۰,۲]$ انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر نقطه انتخاب شده در فاصله $[۰,۲]$ در نظر می‌گیریم. در این صورت X یک متغیر تصادفی پیوسته است و برای هر $r\in[۰,۲]$ ، $P(X=r)=۰$. زیرا بین نقاط ۰ و ۲ بی نهایت نقطه وجود دارد و احتمال انتخاب یک نقطه بخصوص بسیار ناچیز است.

در حالت کلی اگر b هر عدد حقیقی و X هر متغیر تصادفی پیوسته باشد آنگاه $P(X=b)=۰$ و در نتیجه ✓

$$P(a<X\le b)=P(a<X<b)+P(X=b)=P(a<X<b)$$

بنابراین توزیع احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته را نمی توان به صورت یک جدول نمایش داد. در این حالت توزیع احتمال متغیر تصادفی پیوسته X را به صورت یک تابع $f_X(x)$ نمایش داده و آن را

تابع چگالی احتمال X می نامند.

برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته معمولاً ابتدا تابع توزیع آن را به دست می آورند، زیرا تابع توزیع احتمال را در فواصل محاسبه می‌کند و محاسبه این احتمالات در حالت پیوسته امکان‌پذیر است. تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته X به صورت $F_X(x)=P(X\le x)$ تعریف می‌شود. با توجه به آنکه در حالت گسسته تابع توزیع به صورت $F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{t\le x} f_X(t)$ محاسبه می‌شد، با قرار دادن تابع چگالی احتمال به جای تابع احتمال و تبدیل مجموع به انتگرال می توان تابع توزیع در حالت پیوسته را به طور مشابه و به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\boxed{F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt} \qquad (۴.۳)$$ ✓

تابع $f_X(x)$ که در رابطه (۴.۳) صدق می‌کند را تابع چگالی احتمال و تابع $F_X(x)$ در این رابطه را تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X گویند. همچنین با توجه به قضیه اساسی حساب از رابطه (۴.۳) نتیجه می شود که

$$\boxed{F'_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=f_X(x)} \qquad (۵.۳)$$ ✓

با توجه به روابط (۴.۳) و (۵.۳) با داشتن تابع توزیع X و مشتق گرفتن از آن به راحتی می توان تابع چگالی احتمال X را به دست آورد و برعکس با داشتن تابع چگالی احتمال X و انتگرال گرفتن از آن می توان تابع توزیع X را به دست آورد. ✓

* **مثال ۲.۳.۳** در مثال ۱.۳.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته X را به دست آورده و از روی آن تابع چگالی احتمال X را محاسبه کنید و سپس این دو تابع را رسم کنید.

حل با توجه به نمودار روبرو و مفهوم تابع توزیع

اگر $x<۰$ آنگاه $F_X(x)=P(X\le x)=۰$ و اگر $۰\le x<۲$ آنگاه

$$F_X(x)=P(X\le x)=\frac{\text{طول فاصله } [۰,x]}{\text{طول فاصله } [۰,۲]}=\frac{x}{۲}$$

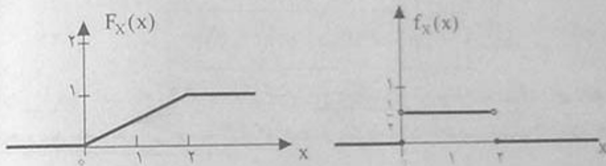
و اگر $x\ge ۲$ آنگاه $F_X(x)=P(X\le x)=۱$. بنابراین

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{2} & 0\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$$

و در نتیجه

$$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

نمودار این دو تابع در زیر رسم شده است. همان طور که دیده می‌شود نمودار تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته یک نمودار پیوسته است.



خواص تابع چگالی احتمال و تابع توزیع با توجه به روابط (۴.۳) و (۵.۳) بین تابع چگالی احتمال و تابع توزیع می‌توان خواص زیر را برای تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ بیان کرد.

الف- برای هر $x\in R$، $f_X(x)\ge 0$

ب- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$

همچنین تمامی خواص گفته شده برای تابع توزیع یک متغیر تصادفی گسسته در بخش ۲.۳، برای تابع توزیع یک متغیر تصادفی پیوسته برقرار است و علاوه بر آن در حالت پیوسته این تابع همواره پیوسته است.

برای محاسبه احتمالات مربوط به یک متغیر تصادفی پیوسته می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد

$$\boxed{P(a<X\le b)=\int_a^b f_X(x)dx=F_X(b)-F_X(a)} \qquad (۶.۳)$$

که در آن a می‌تواند $-\infty$ و b می‌تواند $+\infty$ باشد.

مثال ۳.۳.۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{c}{x^2} & 1<x<10\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- تابع توزیع X را به دست آورید.

ج- احتمالات زیر را محاسبه کنید

$$P(X>2)\quad,\quad P(1<X\le 5)\quad,\quad P([X]=3)$$

حل الف- با توجه به خواص تابع چگالی احتمال بایستی $c\ge 0$ و همچنین

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{1}f_X(x)dx+\int_1^{10}f_X(x)dx+\int_{10}^{+\infty}f_X(x)dx$$

$$=0+\int_1^{10}\frac{c}{x^2}dx+0=\frac{-c}{x}\Big|_1^{10}=-\frac{c}{10}+c=\frac{9}{10}c$$

پس بایستی $c=\frac{10}{9}$ باشد.

ب- اگر $x<1$ آنگاه $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=0$ و اگر $1\le x<10$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt+\int_1^{x} f_X(t)dt=0+\int_1^{x}\frac{10}{9t^2}dt=\frac{-10}{9t}\Big|_1^{x}=\frac{-10}{9x}+\frac{10}{9}$$

و اگر $x\ge 10$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{1} f_X(t)dt+\int_1^{10} f_X(t)dt+\int_{10}^{x} f_X(t)dt=0+1+0=1$$

بنابراین

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{x}\right) & 1\le x<10\\ 1 & 10\le x\end{cases}$$

ج- با توجه به رابطه (۶.۳) داریم که

$$P(X>2)=\int_2^{+\infty}f_X(x)dx=\int_2^{10}\frac{10}{9x^2}dx=\frac{-10}{9x}\Big|_2^{10}=\frac{-1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

$$P(1<X\le 5)=F_X(5)-F_X(1)=\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{5}\right)-0=\frac{8}{9}$$

$$P([X]=3)=P(3\le X<4)=F_X(4)-F_X(3)=\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{54}$$

مثال ۴.۳.۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x)=\begin{cases} cx^2e^{-2x} & x>0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- تابع توزیع X را به دست آورید و $P(X>5)$ را محاسبه کنید.

حل الف- با توجه به خواص تابع چگالی بایستی $c\ge 0$ و همچنین با انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء داریم که

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=c\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}dx=c\left[\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right]e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}$$
$$=0-\left(-\frac{c}{4}\right)=\frac{c}{4}$$

بنابراین بایستی $c=4$ باشد (توجه کنید که برای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی $\alpha>0$ داریم که

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-\alpha x}=0$$

ب- اگر $x<0$ آنگاه $F_X(x)=0$ و اگر $x\ge 0$ آنگاه

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt=\int_0^x 4t^2e^{-2t}dt=4\left[-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\right]e^{-2t}\Big|_0^x$$
$$=1-(2x^2+2x+1)e^{-2x}$$

بنابراین

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-(2x^2+2x+1)e^{-2x} & x\ge 0 \end{cases}$$

و در نتیجه

$$P(X>5)=1-P(X\le 5)=1-F_X(5)=61e^{-10}=0/003$$

۴.۳ توزیع احتمالات توأم دو متغیره

در بخش‌های قبل متغیرهای تصادفی مورد مطالعه یک بعدی بودند. در بعضی از مسائل ممکن است که نتایجی از چندین متغیر تصادفی را به طور همزمان لازم داشته باشیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۴.۳ فرض کنید سکه‌ای را ۳ مرتبه پرتاب کنیم و قرار دهیم:

$X=$ تعداد شیرهای مشاهده شده در ۳ مرتبه پرتاب سکه

$Y=$ تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب سوم سکه

حال پیشامدهای $(X=1)$ و $(Y=1)$ را در نظر بگیرید. اگر وقوع این دو پیشامد در یکدیگر تأثیری داشته باشد آنگاه دانستن تابع احتمال $f_X(x)=P(X=x)$ و $f_Y(y)=P(Y=y)$ به تنهایی تمام اطلاعات را در مورد متغیرهای تصادفی X و Y به ما می‌دهد. اما همانطور که دیده می‌شود وقوع هر یک از این دو پیشامد در دیگری تأثیر می‌گذارد و بنابراین نیاز به دانستن اطلاعاتی در مورد وقوع همزمان این دو پیشامد داریم.

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند توزیع احتمال برای وقوع همزمان آنها به صورت تابع دو متغیره $f_{X,Y}(x,y)$ نشان داده می‌شود و معمولاً آن را توزیع احتمال توأم X و Y گویند (اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند این تابع به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)} \qquad (7.3)$$

یعنی $f_{X,Y}(x,y)$ احتمال این است که نتایج x و y به طور همزمان اتفاق بیفتند. مثلاً در مثال ۱.۴.۳، $f_{X,Y}(1,1)=P(X=1,Y=1)$ به معنای احتمال این است که در ۳ مرتبه پرتاب سکه دقیقاً در پرتاب سوم یک شیر مشاهده کنیم که این احتمال برابر $\frac{1}{8}$ است. با توجه به رابطه (۷.۳) تعریف زیر را داریم.

تعریف ۴.۳ تابع $f_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X و Y گویند هرگاه

الف- برای هر x و y داشته باشیم $f_{X,Y}(x,y)\ge 0$.

ب- $\sum_x\sum_y f_{X,Y}(x,y)=1$

برای محاسبه احتمال قرار گرفتن (X,Y) در یک ناحیه A در صفحه xy به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\boxed{P((X,Y)\in A)=\sum_{(x,y)\in A}\sum f_{X,Y}(x,y)} \qquad (8.3)$$

مثال ۲.۴.۳ در مثال ۱.۴.۳ تابع احتمال توأم X و Y را به دست آورید و $P((X,Y)\in A)$ را محاسبه کنید که در آن $A=\left\{(x,y)\mid x\le y\right\}$

حل توجه کنید که $S_X=\{۰,۱,۲,۳\}$ و $S_Y=\{۰,۱\}$ بنابراین

$$f_{X,Y}(۰,۰)=P(X=۰,Y=۰)=P(\{TTT\})=\frac{۱}{۸}$$
$$f_{X,Y}(۰,۱)=P(X=۰,Y=۱)=۰$$
$$f_{X,Y}(۱,۰)=P(X=۱,Y=۰)=P(\{HTT,THT\})=\frac{۲}{۸}$$

با محاسبه احتمالات مربوط به نقاط دیگر، جدول زیر را که به جدول توزیع احتمالات توأم X و Y موسوم است به دست می‌آوریم.

y \ x	۰	۱	۲	۳
۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	۰
۱	۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

توجه کنید که $\sum_{x=۰}^{۳}\sum_{y=۰}^{۱} f_{X,Y}(x,y)=۱$

چون $A=\{(x,y)\mid x\le y\}=\{(۰,۰),(۰,۱),(۱,۱)\}$ بنابراین با توجه به رابطه (۸.۳) داریم که

$$P(X\le Y)=f_{X,Y}(۰,۰)+f_{X,Y}(۰,۱)+f_{X,Y}(۱,۱)=\frac{۱}{۸}+۰+\frac{۱}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۳.۴.۳ از داخل جعبه‌ای که شامل ۳ توپ آبی، ۲ توپ قرمز و ۴ توپ سبز است، دو توپ به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم

X = تعداد توپهای آبی مشاهده شده در ۲ توپ انتخابی

Y = تعداد توپهای قرمز مشاهده شده در ۲ توپ انتخابی

الف- تابع احتمال توأم (X,Y) را به دست آورید.

ب- $P(X+Y\le ۱)$ را محاسبه کنید.

حل الف- توجه کنید که $S_X=S_Y=\{۰,۱,۲\}$ و برای مثال $f_{X,Y}(۰,۰)$ به معنای احتمال این است که در ۲ توپ انتخابی ما هیچ توپ آبی، هیچ توپ قرمز و ۲ توپ سبز داشته باشیم که احتمال آن

برابر است با

$$f_{X,Y}(۰,۰)=P(X=۰,Y=۰)=\frac{\binom{۳}{۰}\binom{۲}{۰}\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۶}{۳۶}$$

به همین ترتیب

$$f_{X,Y}(۰,۱)=P(X=۰,Y=۱)=\frac{\binom{۳}{۰}\binom{۲}{۱}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۸}{۳۶}$$

$$f_{X,Y}(۱,۰)=P(X=۱,Y=۰)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۰}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۱۲}{۳۶}$$

با محاسبه احتمالات مربوط به نقاط دیگر جدول توزیع احتمالات توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید.

y \ x	۰	۱	۲
۰	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۱۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$
۱	$\frac{۸}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	۰
۲	$\frac{۱}{۳۶}$	۰	۰

جدول ۱.۳ جدول توزیع احتمالات توأم

توجه کنید که تابع احتمال توأم X و Y را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\binom{۳}{x}\binom{۲}{y}\binom{۴}{۲-x-y}}{\binom{۹}{۲}}\qquad x,y=۰,۱,۲\ ,\ ۰\le x+y\le ۲$$

ب- با توجه به رابطه (۸.۳) داریم که

$$P(X+Y\le ۱)=f_{X,Y}(۰,۰)+f_{X,Y}(۰,۱)+f_{X,Y}(۱,۰)=\frac{۶}{۳۶}+\frac{۸}{۳۶}+\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۲۶}{۳۶}$$

برای متغیرهای تصادفی پیوسته تعریف زیر را داریم.

تعریف ۵.۳ تابع $f_{X,Y}(x,y)$ را یک تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y گویند هرگاه

الف- برای هر x و y داشته باشیم $f_{X,Y}(x,y)\ge 0$

ب- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$

برای محاسبه احتمال قرار گرفتن (X,Y) در یک ناحیه A در صفحه xy به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\boxed{P((X,Y)\in A)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy} \qquad (۹.۳)$$

مثال ۴.۴.۳ تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx(1+2y) & 0<x<3\ ,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف- مقدار c را به گونه‌ای تعیین کنید که این تابع یک تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y باشد.

ب- $P(1<X<2\ ,\ 0<Y<\frac{1}{2})$ و $P(X+2Y\ge 3)$ را محاسبه کنید.

حل الف- با توجه به خواص تابع چگالی احتمال توأم، بایستی $c\ge 0$ و همچنین

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^3 cx(1+2y)\,dxdy$$

$$=c\int_0^1(1+2y)\left[\int_0^3 x\,dx\right]dy=c\int_0^1(1+2y)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 dy$$

$$=\frac{9}{2}c\int_0^1(1+2y)\,dy=\frac{9}{2}c\left[y+y^2\right]_0^1=9c$$

بنابراین بایستی $c=\frac{1}{9}$ باشد.

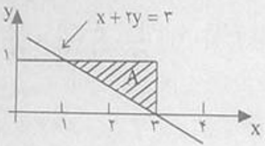
ب- با توجه به رابطه (۹.۳) داریم که

$$P(1<X<2\ ,\ 0<Y<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_1^2 \frac{1}{9}x(1+2y)\,dxdy$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{2}}(1+2y)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 dy=\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1+2y)\,dy$$

$$=\frac{1}{6}\left[y+y^2\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$$

برای محاسبه $P(X+2Y\ge 3)$ ابتدا بایستی ناحیه $A=\{(x,y)\mid x+2y\ge 3\}$ را مشخص کنیم. با توجه به نمودار زیر داریم که



$$A=\{(x,y)\mid 1<x<3\ ,\ \frac{3-x}{2}<y<1\}$$

$$=\{(x,y)\mid 3-2y<x<3\ ,\ 0<y<1\}$$

بنابراین

$$P(X+2Y\ge 3)=\int_0^1\int_{3-2y}^3 \frac{1}{9}x(1+2y)\,dxdy=\frac{1}{9}\int_0^1(1+2y)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{3-2y}^3 dy$$

$$=\frac{2}{9}\int_0^1(1+2y)(3y-y^2)\,dy$$

$$=\frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}y^2+\frac{5}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4\right]_0^1=\frac{2}{9}\times\frac{8}{3}=\frac{16}{27}$$

توزیع احتمالات حاشیه‌ای (کناری)

با داشتن تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم متغیرهای تصادفی X و Y می‌توان تابع احتمال (چگالی احتمال) X به تنهایی و Y به تنهایی را محاسبه کرد که به آنها توابع احتمال (چگالی احتمال) حاشیه‌ای گویند. اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابع احتمال حاشیه‌ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\boxed{f_X(x)=\sum_y f_{X,Y}(x,y)\quad ,\quad f_Y(y)=\sum_x f_{X,Y}(x,y)} \qquad (۱۰.۳)$$

و اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\boxed{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\quad ,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx} \qquad (۱۱.۳)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که توابع به دست آمده در (۱۰.۳) و (۱۱.۳) تمامی خواص تابع احتمال و تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی X و Y را دارند.

مثال ۵.۴.۳ در مثال ۳.۴.۳ تابع احتمال حاشیه‌ای X و تابع احتمال حاشیه‌ای Y را به دست آورید.

حل با توجه به اینکه $S_X = S_Y = \{0,1,2\}$ بنابراین با توجه به جدول ۱.۳ و رابطه (۱۰.۳) داریم که

$$f_X(0)=\sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(0,y)=f_{X,Y}(0,0)+f_{X,Y}(0,1)+f_{X,Y}(0,2)=\frac{6}{36}+\frac{8}{36}+\frac{1}{36}=\frac{15}{36}$$

$$f_X(1)=\sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(1,y)=\frac{12}{36}+\frac{6}{36}+0=\frac{18}{36}$$

$$f_X(2)=\sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(2,y)=\frac{3}{36}+0+0=\frac{3}{36}$$

بنابراین تابع احتمال حاشیه‌ای X عبارت است از

x	۰	۱	۲
$f_X(x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$

به همین ترتیب تابع احتمال حاشیه‌ای Y به صورت زیر به دست می‌آید.

y	۰	۱	۲
$f_Y(y)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{1}{36}$

می‌توان عملیات فوق را در جدول توزیع احتمالات توأم به صورت زیر خلاصه کرد

y \ x	۰	۱	۲	$f_Y(y)$
۰	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{21}{36}$
۱	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	۰	$\frac{14}{36}$
۲	$\frac{1}{36}$	۰	۰	$\frac{1}{36}$
$f_X(x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$	

توزیع احتمالات شرطی

در فصل دوم احتمال شرطی را به صورت زیر تعریف کردیم

$$P(A \mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B)\neq 0$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند و قرار دهیم $A\equiv(X=x)$ و $B\equiv(Y=y)$ در این صورت

$$\boxed{P(X=x \mid Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}} \quad , \quad f_Y(y)\neq 0$$

به سادگی می‌توان نشان داد که تابع $\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ به عنوان تابعی از x برای y ثابت، تمامی شرایط یک تابع احتمال را دارد که به آن تابع احتمال شرطی X به شرط Y=y گویند و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهند.

$$P(X=x|Y=y) = \boxed{f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad , \quad f_Y(y)\neq 0} \qquad (۱۲.۳)$$

به همین ترتیب تابع احتمال شرطی Y به شرط X=x به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{f_{Y|X}(y \mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad , \quad f_X(x)\neq 0} \qquad (۱۳.۳)$$

اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، به طور مشابه تابع چگالی احتمال شرطی X به شرط Y=y توسط رابطه (۱۲.۳) و تابع چگالی احتمال شرطی Y به شرط X=x توسط رابطه (۱۳.۳) تعریف می‌شوند. همچنین برای محاسبه احتمالات شرطی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{P(a<X<b \mid Y=c)=\begin{cases}\sum_{a<x<b} f_{X|Y}(x \mid c) & \text{اگر X و Y گسسته باشند}\\ \int_a^b f_{X|Y}(x \mid c)\,dx & \text{اگر X و Y پیوسته باشند}\end{cases}} \qquad (۱۴.۳)$$

مثال ۶.۴.۳ در مثال ۳.۴.۳ تابع احتمال شرطی X به شرط Y=۰ را به دست آورده و $P(X\leq 1 \mid Y=0)$ را محاسبه کنید.

حل با توجه به رابطه (۱۲.۳) داریم که

$$f_{X|Y}(x \mid 0)=\frac{f_{X,Y}(x,0)}{f_Y(0)}=\frac{f_{X,Y}(x,0)}{\frac{21}{36}} \quad x=0,1,2$$

بنابراین با توجه به جدول ۱.۳ داریم که

x	0	1	2
$f_{X\mid Y}(x\mid 0)$	$\frac{6}{21}$	$\frac{12}{21}$	$\frac{3}{21}$

و از رابطه (۱۴.۳) نتیجه می‌شود که

$$P(X\leq 1\mid Y=0)=\sum_{x=0}^{1}f_{X\mid Y}(x\mid 0)=\frac{6}{21}+\frac{12}{21}=\frac{6}{7}$$

مثال ۷.۴.۳ در مثال ۴.۴.۳ توابع چگالی احتمال $f_X(x)$، $f_Y(y)$ و $f_{X\mid Y}(x\mid y)$ را بـه دست آورده و $P(1<X<2\mid Y=\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

حل با توجه به رابطه (۱۱.۳) داریم که

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1\frac{1}{9}x(1+2y)\,dy=\frac{1}{9}x\left[y+y^2\right]_0^1=\frac{2}{9}x$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_0^3\frac{1}{9}x(1+2y)\,dx=\frac{1}{9}(1+2y)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{1}{2}(1+2y)$$

بنابراین

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & 0<x<3\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}\quad,\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+2y) & 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

همچنین از رابطه (۱۲.۳) داریم که

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{9}x(1+2y)}{\frac{1}{2}(1+2y)}=\frac{2}{9}x$$

بنابراین

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\begin{cases}\frac{2}{9}x & 0<x<3\ ,\ 0<y<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

و با توجه به رابطه (۱۴.۳) داریم که

$$P(1<X<2\mid Y=\frac{1}{2})=\int_1^2 f_{X\mid Y}(x\mid \frac{1}{2})\,dx=\int_1^2\frac{2}{9}x\,dx=\frac{1}{9}x^2\Big|_1^2=\frac{1}{3}$$

متغیرهای تصادفی مستقل در مثال ۷.۴.۳ دیده می‌شود که $f_{X\mid Y}(x\mid y)$ به y بستگی نداشت و در حقیقت $f_{X\mid Y}(x\mid y)=f_X(x)$. در این حالت متغیر تصادفی Y تأثیری روی متغیر تصادفی X ندارد و گویند این دو متغیر تصادفی از یکدیگر مستقل هستند) در این حالت داریم که

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=f_X(x)\Rightarrow\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)\ \Rightarrow f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

تعریف ۶.۳ فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی با تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم $f_{X,Y}(x,y)$ و توابع احتمال (چگالی احتمال) حاشیه‌ای $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ باشند. متغیرهای تصادفی X و Y را از لحاظ آماری مستقل گویند اگر و فقط اگر

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\qquad \text{برای هر } x,y}\qquad (15.3)$$

برای مثال متغیرهای تصادفی مثال ۴.۴.۳ از یکدیگر مستقل هستند زیرا برای آنها رابطه (۱۵.۳) برقرار است (مثال ۷.۴.۳ را ملاحظه کنید) ولی متغیرهای تصادفی مثال ۳.۴.۳ از یکدیگر مستقل نیستند زیرا در این مثال داریم که

$$f_X(0)=\frac{15}{36}\quad,\quad f_Y(0)=\frac{21}{36}\quad,\quad f_{X,Y}(0,0)=\frac{6}{36}$$

و بنابراین $f_{X,Y}(0,0)\neq f_X(0)f_Y(0)$

مثال ۸.۴.۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}cxy & 0<y<2x^2\ ,\ 0<x<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- $P(X+Y<1)$ را محاسبه کنید.

ج- $P(0<Y<\frac{1}{3}\mid X=\frac{1}{2})$ و $P(\frac{1}{2}<X<1\mid Y=\frac{1}{3})$ را محاسبه کنید.

د- آیا X و Y مستقل هستند؟ چرا؟

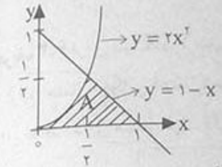
حل الف- در این مثال کران متغیرهای X و Y به یکدیگر وابسته است و ناحیه‌ای را که می‌توان روی آن انتگرال گرفت عبارت است از

$$B=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<2x^2\}=\{(x,y)\mid \sqrt{\frac{y}{2}}<x<1,\ 0<y<2\}$$

بنابراین بایستی $c\geq 0$ و همچنین

$$1=\int_0^1\int_0^{2x^2}cxy\,dy\,dx=c\int_0^1 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{2x^2}dx=2c\int_0^1 x^5\,dx$$
$$=\frac{c}{3}x^6\Big|_0^1=\frac{c}{3}\quad\Rightarrow\quad c=3$$

ب- برای محاسبه احتمال بایستی ناحیه $A=\{(x,y)\mid x+y<1\}$ را معین کنیم. با توجه به نمودار زیر داریم که



$$A=\{(x,y)\mid \sqrt{\frac{y}{2}}<x<1-y\ ,\ 0<y<\frac{1}{2}\}$$

بنابراین

$$P(X+Y<1)=\int_0^{\frac12}\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y} 3xy\,dx\,dy = 3\int_0^{\frac12} y\left[\frac12 x^2\right]_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1-y}dy$$

$$=\frac32\int_0^{\frac12} y\,(1-\frac52 y+y^2)\,dy$$

$$=\frac32\left[\frac12 y^2-\frac56 y^3+\frac14 y^4\right]_0^{\frac12}=\frac{7}{128}$$

ج- ابتدا توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای و شرطی را به دست می آوریم (به حدود انتگرالها و توابع توجه کنید).

$$f_X(x)=\int_0^{2x^2}3xy\,dy=\frac32 x\left[y^2\right]_0^{2x^2}=6x^5$$

$$f_Y(y)=\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1}3xy\,dx=\frac32 y\left[x^2\right]_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{1}=\frac32 y\,(1-\frac{y}{2})$$

بنابراین

$$f_X(x)=\begin{cases}6x^5 & 0<x<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac32 y\,(1-\frac{y}{2}) & 0<y<2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3xy}{\frac32 y\,(1-\frac{y}{2})}=\frac{4x}{2-y}$$

بنابراین

$$f_{Y\mid X}(y\mid x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{3xy}{6x^5}=\frac{y}{2x^4}$$

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\begin{cases}\frac{4x}{2-y} & 0<y<2\ ,\ \sqrt{\frac{y}{2}}<x<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

$$f_{Y\mid X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{y}{2x^4} & 0<x<1\ ,\ 0<y<2x^2\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

با توجه به این توابع، احتمالات مورد نظر به صورت زیر به دست می آیند.

$$P(0<Y<\frac13\mid X=\frac12)=\int_0^{\frac13}f_{Y\mid X}(y\mid\frac12)\,dy=\int_0^{\frac13}8y\,dy=4y^2\Big|_0^{\frac13}=\frac49$$

$$P(\frac12<X<1\mid Y=\frac13)=\int_{\frac12}^{1}f_{X\mid Y}(x\mid\frac13)\,dx=\int_{\frac12}^{1}\frac{4x}{\frac53}\,dx=\frac65 x^2\Big|_{\frac12}^{1}=\frac{9}{10}$$

د- چون $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ پس X و Y از یکدیگر مستقل نیستند. در ضمن چون حدود متغیرهای تصادفی X و Y به یکدیگر وابسته است پس X و Y از یکدیگر مستقل نیستند.

۵.۳ توزیع احتمالات چند متغیره

تمام بحث بخش قبل در مورد توزیع احتمالات توأم دو متغیر تصادفی را می توان به n متغیر تصادفی تعمیم داد. فرض کنید $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X_1، X_2، ... و X_n باشد. تابع احتمال حاشیه‌ای X_1 و تابع احتمال توأم حاشیه‌ای X_1 و X_2 به صورت زیر به دست می آیند.

$$f_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2}\sum_{x_3}\dots\sum_{x_n}f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\sum_{x_3}\sum_{x_4}\dots\sum_{x_n}f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

همچنین اگر $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای X_1، X_2، ... و X_n باشد، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X_2 و تابع چگالی احتمال توأم حاشیه‌ای X_2 و X_3 به صورت زیر به دست می آیند.

$$f_{X_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\,dx_3\dots dx_n$$

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1dx_4\dots dx_n$$

همچنین تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم شرطی X_1، X_2 و X_3 به شرط $X_4=x_4$، ... و $X_n=x_n$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_{X_1,X_2,X_3|X_4,\dots,X_n}(x_1,x_2,x_3|x_4,\dots,x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{f_{X_4,\dots,X_n}(x_4,\dots,x_n)}$$

تعریف ۶.۳ را می‌توان برای استقلال n متغیر تصادفی به صورت زیر تعمیم داد.

تعریف ۷.۳ فرض کنید X_1، X_2، ... و X_n متغیرهای تصادفی با تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و توابع احتمال (چگالی احتمال) حاشیه‌ای $f_{X_1}(x_1)$، $f_{X_2}(x_2)$، ... و $f_{X_n}(x_n)$ باشند. متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ... و X_n را دو به دو از لحاظ آماری مستقل گویند اگر و فقط اگر برای هر x_1، x_2، ... و x_n

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\dots f_{X_n}(x_n)$$

مثال ۱.۵.۳ فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1، X_2 و X_3 دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} c & 0<x_1<x_2<x_3<1\\ 0 & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

الف- مقدار c را تعیین کنید.

ب- تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X_2 را به دست آورید.

ج- تابع چگالی احتمال توأم X_1 و X_3 را به دست آورید و $P(2X_1<X_3)$ را محاسبه کنید.

د- تابع چگالی احتمال شرطی X_1 به شرط $(X_2,X_3)=(x_2,x_3)$ را به دست آورید.

حل الف-

$$1=c\int_0^1\int_0^{x_3}\int_0^{x_2}dx_1dx_2dx_3=c\int_0^1\int_0^{x_3}x_2dx_2dx_3$$

$$=c\int_0^1\frac{1}{2}x_3^2dx_3=\frac{c}{6}x_3^3\Big|_0^1=\frac{c}{6}$$

بنابراین c=6.

ب-

$$f_{X_2}(x_2)=\int_{x_2}^1\int_0^{x_2}6dx_1dx_3=\int_{x_2}^1 6x_2dx_3=6x_2(1-x_2)\qquad 0<x_2<1$$

ج-

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3)=\int_{x_1}^{x_3}6dx_2=6(x_3-x_1)\qquad 0<x_1<x_3<1$$

بنابراین

$$P(2X_1<X_3)=\int_0^1\int_0^{\frac{x_3}{2}}6(x_3-x_1)dx_1dx_3=6\int_0^1\left[x_1x_3-\frac{1}{2}x_1^2\right]_0^{\frac{x_3}{2}}dx_3$$

$$=6\left(\frac{3}{8}\right)\int_0^1x_3^2dx=\frac{3}{4}x_3^3\Big|_0^1=\frac{3}{4}$$

د-

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)=\int_0^{x_2}6dx_1=6x_2\qquad 0<x_2<x_3<1$$

$$f_{X_1|X_2,X_3}(x_1|x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)}=\frac{6}{6x_2}=\frac{1}{x_2}\qquad 0<x_1<x_2<x_3<1$$

۶.۳ مسائل حل شده

مثال ۱.۶.۳ تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر داده شده است. مقدار k را پیدا کنید.

$$f_X(x)=\frac{k}{2^x}\ ,\qquad x=0,1,2,3,4$$

حل بایستی $k\geq 0$ و همچنین

$$1=\sum_{x=0}^{4}f_X(x)=\sum_{x=0}^{4}\frac{k}{2^x}=k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)=k\left(\frac{31}{16}\right)$$

بنابراین $k=\frac{16}{31}$

مثال ۲.۶.۳ فروشگاهی ۶ دستگاه تلویزیون دارد که ۲ دستگاه آن معیوب است. هتلی ۳ دستگاه آن را به طور تصادفی خریداری می‌نماید. اگر X تعداد تلویزیونهای معیوب باشد که توسط هتل خریداری شده است. تابع احتمال X را به دست آورید.

حل در اینجا $S_X=\{0,1,2\}$ و بنابراین

$$f_X(0)=P(X=0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

$$f_X(1)=P(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$