سوال امتحان

Subject: مبانی علم ریاضی Data:

* فرض کنید $A=\{1,\{1,\{1\}\},\{1,\{1,\{1\}\}\}\}$ باشد، مجموعه توانی را با اعضا مشخص کنید:

$n(A)=3$

$n(p(A))=2^{n(A)}=2^3=8$

$p(A)=$

تساوی در مجموعه ها:

دو مجموعهٔ A و B را باهم مساوی گوییم هرگاه هر عضو از مجموعهٔ A به عنوان یک عضو از مجموعهٔ B و هر عضو از مجموعهٔ B به عنوان یک عضو از مجموعه A باشد. به عبارتی دیگر $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ باشد. چنین دو مجموعه ای را دو مجموعه مساوی گفته و با نماد $A=B$ نمایش می دهیم.

$A\subseteq B \text{ و } B\subseteq A \Longleftrightarrow A=B$

* مجموعه های $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{a,a,b,b,b,c,c,c,c\}$ باهم مساویند، زیرا تکرار هیچ تاثیری روی اعضاء ندارد.

نکته: $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{b,d,a,c\}$ باهم مساویند، زیرا جابجایی در اعضای یک مجموعه هیچ تاثیری بر نوع و تعداد اعضای آن مجموعه ندارد.

MICRO

Subject: Date

* با فرض تساوی مجموعه‌های A و B مقدار $4x-5y$ را بدست آورید.

$A=\{6, \frac{1}{3}y, 4, 7\}$ $B=\{7, 2x, 9, 4\}$

$B=\{2x, 9, 4, 7\}$

$\begin{cases} 2x=6 \\ \frac{1}{3}y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=27 \end{cases} \Rightarrow 4x-5y=4(3)-5(27)=12-135=-123$

نکته: 1) $\text{if } A\subseteq B, B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$

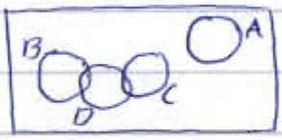
2) $A=B \Longleftrightarrow B=A$

3) $A=B, B=C \Rightarrow A=C$

مجموعه مرجع:

مجموعهٔ تمامی مجموعه‌های موجود شناخته شده در مبحث را مجموعه مرجع (جهانی) نامیده و با نماد M یا U نمایش می‌دهند. شکل هندسی مجموعه مرجع به حالت مستطیل می‌باشد.

U یا M



متمم یک مجموعه:

فرض کنیم A یک مجموعهٔ دلخواه و نیز M مجموعه مرجع باشد، آنگاه متمم مجموعه A را با نماد A' یا A^c نمایش می‌دهیم عبارت است از تمامی اعضای مجموعه مرجع M که در مجموعهٔ A نباشند. به بیان ریاضی:

$A'=\{x \mid x\in M, x\notin A\}$

Subject: Data:

* فرض کنید: $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{4,5\}$ $C=\{\ \}$

$D=\{1,2,3,4,5\}$ $M=\{1,2,3,4,5\}$ مجموعه مرجع

$A'=\{5\}$

$B'=\{1,2,3\}$

$C'=M$ متمم مجموعه تهی مجموعه مرجع می باشد

$D'=\{\ \}$ متمم مجموعهٔ مرجع (یا مساوی با آن) تهی می باشد

$M'=\{\ \}$

نکته: متمم یک مجموعهٔ دلخواه مانند A برابر با خود مجموعه A است، یعنی:

$(A')'=A$

$(A')'=\{x \mid x\in M,\ x\notin A\}=\{x \mid x\in M,\ x\in A\}=A$

جبر مجموعه ها: اعمال روی مجموعه ها

آ) اجتماع: فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند آنگاه اجتماع دو مجموعه A و B

را که با نماد $A\cup B$ نمایش می دهیم عبارت است از مجموعه ای که شامل تمامی اعضای

متعلق به مجموعهٔ A و یا مجموعهٔ B و یا هر دوی آنها می باشد.

$A\cup B=\{x \mid x\in A$ یا $x\in B\}$

ب) اشتراک: فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند آنگاه اجتماع دو مجموعه A و B

را که با نماد $A\cap B$ نمایش می دهیم عبارت است از تمامی اعضای متعلق به مجموعه B باشند

و هم متعلق به مجموعه A باشند. $A\cap B=\{x \mid x\in A$ و $x\in B\}$

اجتماع = جمع

اشتراک = ضرب

Subject: Date

* با فرض $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{3,4,5\}$ $M=\{1,2,\dots,9\}$ $C=\{5,6,7\}$

حاصل هریک از مجموعه های زیر را بیابید:

الف) $A\cup C=\{1,2,3,4\}\cup\{5,6,7\}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

ب) $A\cup(B\cup C)=\{1,2,3,4\}\cup(\{3,4,5\}\cup\{5,6,7\})=\{1,2,3,4\}\cup\{3,4,5,6,7\}$
$=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

ج) $C\cap B=\{5\}$

د) $B'\cap A=\{1,2,6,\dots,9\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4,6,\dots,9\}$
$B'=M-B=\{1,2,6,\dots,9\}$

ه) $M'\cap B=\{\}\cap\{3,4,5\}=\{\}$

و) $M\cup C=\{1,2,\dots,9\}\cup\{5,6,7\}=\{1,\dots,9\}$

ز) $\{\}\cup B=\{\}\cup\{3,4,5\}=B$

نکته: اجتماع و اشتراک هر مجموعه دلخواه با خودش برابر همان مجموعه دلخواه است.

گزاره های درست:

if $A\cup B=A\cup C \not\Rightarrow B=C$

if $B=C \Rightarrow A\cup B=A\cup C$

$B=C \Rightarrow A\cap C=B\cap C$

Subject: Data:

ویژگی های مجموعه ها:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$ جابه جایی

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ شرکت پذیری

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ توزیع پذیری

* با فرض $A = \{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$ $B = \{۴ ، ۵\}$ $C = \{۷ ، ۸\}$

یکی خواص توزیع پذیری و شرکت پذیری برای مجموعه ها اثبات کنید.

شرکت پذیری: اجتماع $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

طرف اول $= A \cup (B \cup C) = \{۱،۲،۳،۴\} \cup (\{۴،۵\} \cup \{۷،۸\}) =$
$\{۱،۲،۳،۴\} \cup \{۴،۵،۷،۸\} = \{۱،۲،۳،۴،۵،۷،۸\}$

طرف دوم $= (A \cup B) \cup C = (\{۱،۲،۳،۴\} \cup \{۴،۵\}) \cup \{۷،۸\} =$
$\{۱،۲،۳،۴،۵\} \cup \{۷،۸\} = \{۱،۲،۳،۴،۵،۷،۸\}$

طرف اول = طرف دوم ✓

توزیع پذیری: اشتراک $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

طرف اول $= A \cap (B \cup C) = \{۱،۲،۳،۴\} \cap (\{۴،۵\} \cup \{۷،۸\}) =$
$\{۱،۲،۳،۴\} \cap \{۴،۵،۷،۸\} = \{۴\}$

Subject: Date

طرف دوم $(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1,2,3,4\} \cap \{4,5\}) \cup (\{1,2,3,4\}$
$\cap \{4,5\}) = \{4\} \cup \{\} = \{4\}$

طرف اول = طرف دوم ✓

قوانین دمورگان:

آ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ب) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ تمرین

اثبات آ):

طرف اول $= (A \cup B)'$

$x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B)$

$x \notin A$ و $x \notin B$

$x \in A'$ و $x \in B'$

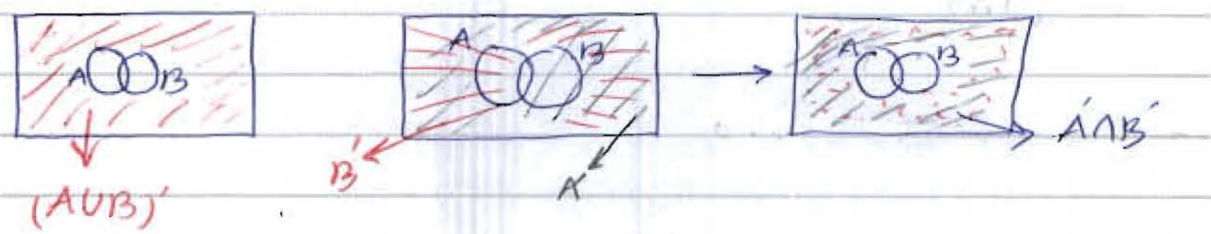
$x \in (A' \cap B') \rightarrow x \in$ طرف دوم

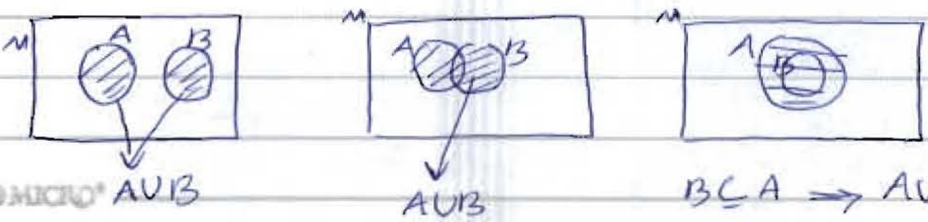
طرف دوم $= x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A' , x \in B'$

$x \notin A$ و $x \notin B \rightarrow x \notin (A \cup B)$

$x \in (A \cup B)' \rightarrow x \in$ طرف اول

طرف دوم = طرف اول ✓



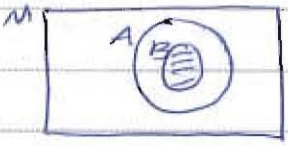


$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$

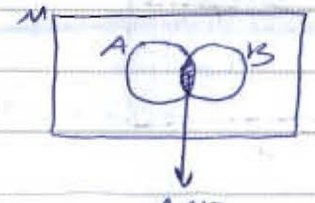
©MICRO®

Subject: Data:

$A\cap B=\varnothing$



$B\subseteq A \Rightarrow A\cap B=B$



$A\cap B$

تفاضل دو مجموعه:

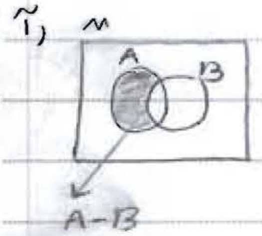
فرض کنیم A و B دو مجموعه دلخواه باشند آنگاه تفاضل B از A را که با نماد A-B نمایش می‌دهیم عبارت است از مجموعه تمامی اعضایی متعلق به مجموعه A که در B نباشند.

به بیان ریاضی: $A-B=\{x \mid x\in A ,\ x\notin B\}$

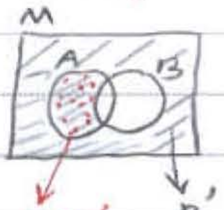
* ثابت کنید: $A-B=A\cap B'$

آ- از طریق نمودار ون - ب- از طریق اثبات ریاضی

آ)



$A-B$



$A\cap B'$ B'

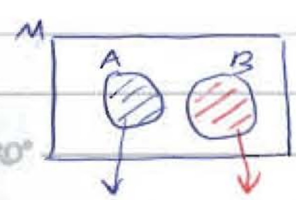
ب)

$A-B=A\cap B'$ $\xrightarrow{\text{رفت}} x\in A-B \rightarrow x\in A ,\ x\notin B \Rightarrow x\in A ,\ x\in B'$
$\rightarrow x\in A\cap B'$

$\xLeftarrow{\text{برگشت}}$ $x\in (A\cap B') \rightarrow x\in A ,\ x\in B' \rightarrow x\in A ,\ x\notin B \rightarrow x\in (A-B)$

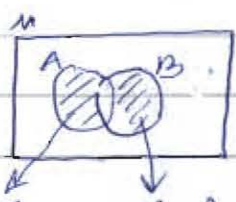
انواع نمودارهای هندسی در مورد تفاضل دو مجموعه:

آ)



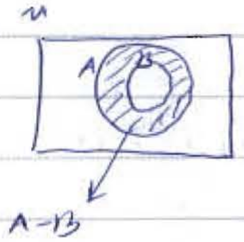
$A-B=A$ $B-A=B$

ب)



$A-B$ $B-A$

ب)



$A-B$ $B-A=\{\}$

نتیجه: تفاضل دو مجموعه دلخواه A و B با B و A هیچگاه مساوی نیستند. یعنی داریم:

$A-B \neq B-A$

* با فرض M = {۱، ...، ۲۹}   A = {مجموعه اعداد اول بین ۱۸، ۲۹}

A = {۱۹، ۲۳}

B = {x | x = ۲k + ۴ ، ۲ < k ≤ ۷ ، k ∈ N}

B = {۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸}

و C = {مجموعه اعداد فرد بین ۱۵ و ۲۵}

C = {۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳}

D = {x | x = ۷k − ۲ ، k ∈ N ، ۲ < k ≤ ۴}

حاصل عبارت های زیر را بیابید:

D = {۱۹، ۲۶}

آ) یکی از قوانین توزیع پذیری به دلخواه برای مجموعه های B، C، B

ب) یکی از قوانین شرکت پذیری به دلخواه برای مجموعه های A، B، C

ج) یکی از قوانین دمورگان " " " B، D

د) $(A'-D)\cup(B'\cap C)$

هـ) $(C'-D')\cap(B-A)$

ی) $P(A\cap C)$

Subject: طرف اول   طرف دوم   Data:

آ) $\overbrace{B\cup(C\cap D)}^{\text{طرف اول}} = \overbrace{(B\cup C)\cap(B\cup D)}^{\text{طرف دوم}}$

طرف اول $= B\cup(C\cap D) = \{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸\}\cup(\{۱۷،۱۹،۲۱،۲۳\}\cap\{۱۹،۲۴\})$
$= \{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸\}\cup\{۱۹\} = \{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸،۱۹\}$

طرف دوم $= (B\cup C)\cap(B\cup D) = (\{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸\}\cup\{۱۷،۱۹،۲۱،۲۳\})$
$\cap(\{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸\}\cup\{۱۹،۲۴\}) = \{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۷،۱۸،۱۹،۲۱،۲۳\}$
$\cap\{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸،۱۹،۲۴\} = \{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸،۱۹\}$

ب) $\overbrace{A\cap(B\cap C)}^{\text{طرف اول}} = \overbrace{(A\cap B)\cap C}^{\text{طرف دوم}}$

طرف اول $= A\cap(B\cap C) = \{۱۹،۲۳\}\cap(\{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸\}\cap\{۱۷،۱۹،۲۱،۲۳\})$
$= \{۱۹،۲۳\}\cap\{\} = \{\}$

طرف دوم $= (A\cap B)\cap C = (\{۱۹،۲۳\}\cap\{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸\})\cap\{۱۷،۱۹،۲۱،۲۳\}$
$= \{\}\cap\{۱۷،۱۹،۲۱،۲۳\} = \{\}$

ج) $(B\cap D)' = B'\cup D'$
$(\{۱۰،۱۲،۱۴،۱۶،۱۸\}\cap\{۱۹،۲۴\})' = (\varnothing) = M$
$\{۱،۲،۳،۴،\ldots،۹،۱۱،۱۳،۱۵،۱۷،۱۹،\ldots،۲۹\}\cup\{۱،\ldots،۱۸،۲۰،\ldots،۲۵،۲۷،۲۸،۲۹\}$
$= M$

د) $(A'-D)\cup(B'\cap C) = (\{۱،\ldots،۱۸،۲۰،۲۱،۲۲،۲۴،\ldots،۲۹\}-\{۱۹،۲۴\})$
$\cup(\{۱،\ldots،۹،۱۱،۱۳،۱۵،۱۷،۱۹،\ldots،۲۹\}\cap\{۱۷،۱۹،۲۱،۲۳\})$
$= \{۱،\ldots،۱۸،۲۰،۲۱،۲۲،۲۴،۲۵،۲۷،۲۸،۲۹\}\cup\{۱۷،۱۹،۲۱،۲۳\} =$
$\{۱،\ldots،۲۵،۲۷،۲۸،۲۹\}$

ه) $(C'-D')\cap(B-A)=(\{1,\dots,16,18,20,22,24,\dots,29\}-$
$\{1,\dots,18,20,\dots,25,27,28,19\})\cap(\{10,12,14,16,18\}-\{19,23\})$
$=\{26\}\cap\{10,12,14,16,18\}=\{\}$

ی) $P(A\cap C)=\{\{19\},\{23\},\{19,23\},\{\}\}$

$(A\cap C)=\{19,23\}\cap\{17,19,21,23\}=\{19,23\}$

$n(P(A))=2^{n(A)}=2^2=4 \rightarrow n(A)=2$

* نشان دهید که $(A\cap B)-B=\varnothing$.

$(A\cap B)-B \xrightarrow{A-B=A\cap B'} (A\cap B)\cap B' \xrightarrow[\text{پذیری اشتراک}]{\text{خاصیت شرکت}} A\cap(B\cap B')=A\cap\varnothing=\varnothing$

تمرین ۲و۳ و ۷ ص ۲۶ ، ص ۲۷ : ۲۰ ، ۲۹ ، [۱۵] ، [۱۸] ، [۲۹] ، ۳۹

حاصلضرب دکارتی :

$N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q \, , \, Q'\subseteq R$

تعریف زوج : هر دو شیء که در کنار یکدیگر از یک یا چند مجموعه قرار بگیرند تشکیل زوج می‌دهند.

زوج مرتب : هرگاه ترتیب قرار گرفتن اشیاء درون یک زوج رعایت شود به زوج حاصل یک زوج مرتب گفته و با نماد (a,b) نمایش می‌دهیم که به a مؤلفهٔ اول زوج مرتب و به b مؤلفهٔ دوم زوج مرتب می‌گوییم.

* بین زوج های مرتب (۲،۳) و (۳،۲) تمایز برقرار است *.

زوج های مرتب مساوی: دو زوج مرتب دلخواه (a,b) و (c,d) را با یکدیگر مساوی گویند هرگاه مولفه های اول آنها با هم و نیز مولفه های دوم آنها با هم مساوی باشند.

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \,,\, b=d$$

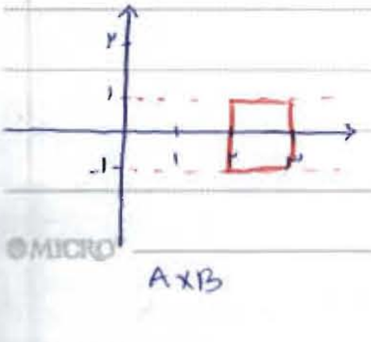
از نظر نموداری حاصلضرب دکارتی $A\times B$ عبارت است از رسم بازه مورد نظر روی محور اعداد حقیقی [در روی محور xها بازه مربوط به مجموعه اول از سمت چپ (A) رسم شده و در روی محور yها بازه مربوط به مجموعه دوم را از سمت چپ (B) رسم می شود] حال محل تقاطع خطوط رسم شده در دستگاه مختصات دکارتی را با هاشور مشخص می کنیم.

* مجموعه های $A\times B$ و $B\times A$ را مشخص کنید و سپس روی محور اعداد رسم نمایید.

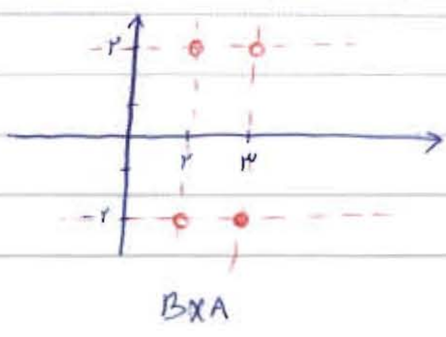
$A=\{x\in\mathbb{R} \mid 2\leq a\leq 3\}$ $\quad B=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\leq x\leq 1\}$

$A\times B=\{x \mid x\in A \,,\, y\in B\}=\{(x,y) \mid 2\leq x\leq 3 \,,\, -1\leq y\leq 1\}$

$B\times A=\{(y,x) \mid y\in A \,,\, x\in B\}=\{(x,y) \mid -1\leq x\leq 1 \,,\, 2\leq x\leq 3\}$



A×B



B×A

Subject: Date

تعریف رابطه: فرض کنیم A و B دو مجموعه دلخواه و ناتهی باشند آنگاه با شرط اینکه $A\times B$ حاصلضرب دکارتی مجموعه های A و B باشد و به هر زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی یک رابطه از A و B را با نماد R نمایش می دهیم.

در مثال قبل که اعضا با زوج مرتب نمایش داده شده روابط زیر را بدست آورید:

$R_1 = \{$ مجموعه تمام زوج مرتب هایی که متعلق به $A\times B$ بوده و مؤلفه دوم آنها زوج باشد $\} = \{(a,2),(b,2),(c,2)\}$

$R_2 = \{$ مجموعه تمام زوج مرتب هایی که روی مجموعه B بوده به طوری که مولفه اول آنها عدد اول باشد $\} = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

نکته: هرگاه R یک رابطه از A و B باشد آنگاه می نویسیم $(a,b)\in A\times B$ که به این عضو یک عضو از رابطه R گوییم. اگر $R\subseteq A\times B$ و $(a,b)\in R$ باشد که از این به بعد $(a,b)\subseteq R$ را با نماد aRb و هرگاه $(a,b)\notin R$ آنگاه می نویسیم $a\not R b$.

نکته: هرگاه در حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های A و B داشته باشیم $A=B$، در این صورت می‌گوییم R رابطه‌ای روی مجموعه A می باشد و (R رابطه‌ای روی مجموعه B می باشد)

* با توجه به مجموعه های فوق رابطه زیر را بیابید:

$A = \{$ مجموعه اعداد اول بین ۲ تا ۱۱ $\} \Rightarrow A=\{13,17,19\}$

$B=\{x \mid x=4k-3,\ k\in Z,\ -2<k\leq 1\} \Rightarrow B=\{-7,-3,1\}$

Subject:　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Data:

آ) رابطه $R_1 \subseteq A\times B$ بطوری که مولفه دوم آن فرد باشد.

A×A = {(۱۳،۱۳)، (۱۳،۱۷)، (۱۳،۱۹)، (۱۷،۱۳)، (۱۷،۱۷)، (۱۷،۱۹)، (۱۹،۱۳)، (۱۹،۱۷)، (۱۹،۱۹)}

B×B = {(-۷،-۷)، (-۷،-۳)، (-۷،۱)، (-۳،-۷)، (-۳،-۳)، (-۳،۱)، (۱،-۷)، (۱،-۳)، (۱،۱)}

ب) رابطه $R_2 \subseteq B\times A$ بطوری که مولفه دوم آن عدد زوج باشد.

B×A = {(-۷،۱۳)، (-۷،۱۷)، (-۷،۱۹)، (-۳،۱۳)، (-۳،۱۷)، (-۳،۱۹)، (۱،۱۳)، (۱،۱۷)، (۱،۱۹)}

A×B = {(۱۳،-۷)، (۱۳،-۳)، (۱۳،۱)، (۱۷،-۷)، (۱۷،-۳)، (۱۷،۱)، (۱۹،-۷)، (۱۹،-۳)، (۱۹،۱)}

ج) رابطه R_3 روی مجموعه A بطوری که مولفه اول و دوم با یکدیگر برابر باشند.

R_1 = {(۱۳،۱)، (۱۷،۱)، (۱۹،۱)}　　　R_2 = { }

R_3 = {(۱۳،۱۳)(۱۷،۱۷)(۱۹،۱۹)}

د) رابطه R_4 روی مجموعه B بطوریکه مولفه اول عدد منفی باشد.

R_4 = {(-۷،-۷)(-۷،-۳)(-۷،۱)(-۳،-۷)(-۳،-۳)(-۳،۱)}

تفاضل متقارن:

فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند آنگاه تفاضل متقارن این دو مجموعه را که با نماد

$A\Delta B$ نمایش می‌دهیم عبارتست از تمامی اعضای اجتماع دو مجموعه منهای تمامی اعضای اشتراک

دو مجموعه و یا به عبارت دیگر تفاضل متقارن دو مجموعه A و B.

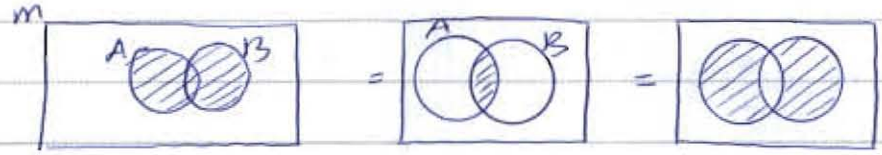
1) $A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B)$

2) $A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

Subject: Date

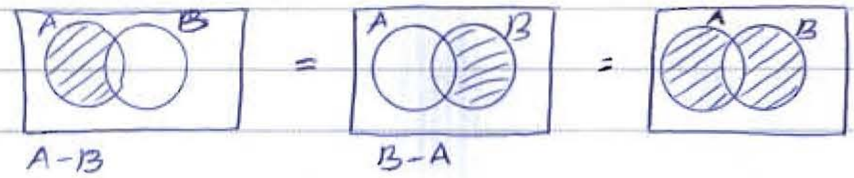
از نمودار هندسی ون تفاضل متقارن دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود:

1ـ



$A \Delta B$

2ـ



$A \Delta B$

اثبات ریاضی:

$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A - B = A \cap B'$ فرمول

توزیع‌پذیری $x \in [(A \cup B) \cap (A \cap B)'] \Rightarrow x \in (A \cup B)$ و $x \in (A' \cup B') \Rightarrow$

$x \in A$ یا $x \in B$ و $x \in A'$ یا $x \in B' \Rightarrow (x \in A , x \in B')$

یا $(x \in B , x \in A') \Rightarrow x \in (A - B)$ یا $x \in (B - A) \Rightarrow x \in [(A - B) \cup (B - A)]$

* $x \in [(A - B) \cup (B - A)] =$

Subject: Data:

ادامه مبحث رابطه:

روابط خاص:

1. رابطه بازتابی (انعکاسی): رابطه R روی مجموعه A یک رابطه بازتابی می‌باشد هرگاه برای

هر $a \in A$ داشته باشیم عضو a با خودش در رابطه است: $\forall a \in A \Rightarrow aRa$

$\forall$: به ازای هر

$\exists$: وجود دارد

$\exists !$: منحصر به فرد

$\nexists$: (به ازای هیچ عضو) وجود ندارد

$\not\forall$: به ازای هر ... برقرار نیست

2. رابطه متقارن بودن یا تقارنی: فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد، آنگاه

هرگاه عضوی باشد $(a,b) \in R$ باشد خواهیم داشت $(b,a) \in R$ چنین رابطه‌ای

را تقارنی گوییم. $aRb = bRa$

مثال: رابطه متعامد بودن روی خطوط - رابطه موازی بودن - رابطه مساوی بودن با اعداد حقیقی

بزرگتر مساوی هم برقرار نیست.

3. رابطه پاد متقارن (پاد متقارنی): فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد آنگاه

اگر $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ حتما a و b باهم مساوی خواهند بود:

aRb و $bRa \Leftrightarrow a=b$

مثال: رابطه زیر مجموعه بودن روی کلاس مجموعه‌ها - رابطه کوچکتر مساوی

4. رابطه متعدی : فرض کنید R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد آنگاه

$\forall a,b,c \in R \; ; \; aRb \, , bRc \Rightarrow aRc$

5. رابطه عاد کردن : $2 \times K = 6 \qquad 2|6 \quad 6|12 \Rightarrow 2|12$

اعداد صحیح

6. رابطه ترتیب جزئی : فرض کنید A یک مجموعه غیر تهی و R رابطه‌ای روی A باشد که دارای خواص انعکاسی، پاد متقارنی و تعدی باشد آنگاه R یک رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه A نامیده و با نماد $\preccurlyeq$ نمایش می‌دهیم.

مثال : هرگاه A کلاس مجموعه و R رابطه زیر مجموعه بودن بر روی R باشد آنگاه R یک رابطه ترتیب جزئی روی A است، زیرا دارای خواص انعکاسی پاد متقارنی روی A می‌باشد.

مثال : رابطه عاد کردن مجموعه $S=\{2,3,4,5,\dots\}$ روی مجموعه S یک رابطه ترتیب جزئی روی S.
کتاب مرجع

7. مجموعه مرتب جزئی (جزئاً مرتب) : فرض کنیم $\preccurlyeq$ یک مجموعه ترتیب جزئی روی مجموعه A باشد آنگاه $(A, \preccurlyeq)$ را یک مجموعه جزئاً مرتب نامیده و به طور اختصار با نماد POSET نمایش می‌دهیم.

Subject: Data:

فصل دوم

منطق ریاضیات :

آشکار ساختن چگونگی استفاده از مفاهیم ریاضی به خصوص روش ساختن نحوه استدلالات و نتیجه گیری را منطق ریاضی گویند. به عبارت دیگر منطق ریاضیات قابل درک سازی مطالعه و استفاده از آن در امور مختلف می باشد.

تعریف گزاره : جمله ایست خبری که راست یا دروغ بودن آن (درستی یا نادرستی) کاملا محرز باشد

مثال : برف سیاه است = نادرست ✗ خیام شاعر و ریاضی دان است = درست ✓

برحسب درستی یا نادرستی گزاره ها، آنها را به دو ارزش درست بودن (T) و نادرست بودن (F) تقسیم بندی می نماییم.

مثال :

1. هر مثلث سه راس دارد : T
2. مجموع زوایای داخلی مثلث بیش از 180° است : F

** جملات تعجبی، سوالی، تاکیدی گزاره نمی باشد ؛ زیرا این جملات بنابه سلیقه هر فرد می تواند ارزش های متفاوتی را اختیار کند **

متغیر گزاره ای : گزاره ها را با حروف کوچک لاتین ... و p،q،r،s نمایش می دهیم.

متغیر گزاره ای به اسامی و افرادی گفته می شود که برای ما نامعین است و نمایانگر یک تعداد از اشیاء، اشخاص و اعدادی باشد و با حروف لاتین نمایش می دهیم.

گزاره نما : جملاتی که شامل یک یا چند متغیر گزاره ای باشد. گزاره نما را با حروف بزرگ لاتین نمایش می دهیم.

نکته: هرگاه جای متغیرها در یک گزاره نما از نمادها و اسامی خاص استفاده نماییم گزاره نما به گزاره تبدیل
می‌شود که یا درست و یا نادرست خواهد بود. مثال: P (x زوج x): اگر x ۲ باشد T
اگر x ۳ باشد F

نکته: تمامی معادلات، نامعادلات و اتحادها گزاره نما می‌باشند:

$R: (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

توجه: معمولاً گزاره نماها را برحسب متغیرهایشان نمایش می‌دهیم.
اندیس متغیر به عنوان خاصیت آن گزاره نما در پای گزاره نما گذاشته می‌شود.

$P(x,y) \quad x^2+y^2 \geq 0$

دامنه متغیر: بزرگترین مجموعه‌ای که متغیرهای یک گزاره نما می‌توانند اعضای آن را اختیار نمایند تا گزاره نما را به یک گزاره درست و نادرست تبدیل کنند.

مجموعه جواب: اگر دقیقاً در تبدیل متغیرها به اعضای یک مجموعه، گزاره نما به یک گزاره درست تبدیل شود آنگاه آن مجموعه را مجموعه جواب نامند.

P_x: (x عدد اول) D: (مجموعه اعداد طبیعی)   مجموعه جواب: (۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ...)

جدول ارزش گزاره‌ها: هر گزاره دلخواه مانند P دارای دو ارزش درست بودن (T) و نادرست بودن (F) می‌باشد که به صورت جدولی نمایش داده خواهد شد.

P
T
F

ترکیب گزاره‌ها: چون هر گزاره دارای دو ارزش متفاوت می‌باشد می‌توان برای بدست آوردن تعداد سطرهای یک جدول ارزش گزاره‌ای از فرمول زیر استفاده نمود:

تعداد سطرهای موجود در جدول ارزش گزاره‌ها $= 2^n$ $n =$ تعداد گزاره‌ها

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

$2^3 = \frac{8}{2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

دوگزاره هم ارز : دوگزاره را هم ارز یا معادل نامیم هرگاه در جدول ارزش گزاره ها دارای درستی یا نادرستی دقیقاً یکسانی باشند و با نماد $p \equiv q$ نمایش می دهند.

روابط خاص در منطق ریاضیات :

1. رابطه عطفی : فرض کنیم p و q دوگزاره دلخواه باشند آنگاه ترکیب عطفی آنها را با نماد $p \wedge q$ نمایش می دهیم و زمانی ترکیب آنها برقرار است که هر دو گزاره درست باشد.

$2^2 = \frac{4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$\wedge$ زمانی درست که هر دو درست

$\vee$ زمانی نادرست که هر دو نادرست

$\Rightarrow$ زمانی نادرست که مقدم درست تالی نادرست

$\Leftrightarrow$ زمانی درست که هر دو درست و یا هر دو نادرست

2. رابطه فصلی : فرض کنیم p و q دوگزاره دلخواه باشند آنگاه ترکیب فصلی این دوگزاره را با نماد $p \vee q$ ، (p یا q) نمایش داده ، زمانی در جدول ارزش گزاره ها ترکیب دوگزاره نادرست می شود

Subject: Date

که هر دو گزاره نادرست باشد.
(یا زمانی درست است که حداقل یکی از آنها درست باشد)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

.3

3. رابطه ترکیب شرطی: فرض کنید p و q دو گزاره دلخواه باشند آنگاه با فرض اینکه گزاره p را به عنوان فرض یا شرط و گزاره q را به عنوان حکم یا جواب شرط در نظر بگیریم واین گزاره را با نماد $p \Rightarrow q$ (p آنگاه q) نمایش دهیم این گزاره زمانی نادرست است که شرط درست و جواب شرط نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

4. رابطه ترکیب دوشرطی: فرض کنید p و q دو گزاره دلخواه باشند آنگاه ترکیب این دو گزاره را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نمایش داده. زمانی این ترکیب برقرار است که هر دو گزاره دارای ارزش های یکسان باشند (هم ارز باشند).

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Subject: Data:

5 . رابطه نقیض برای یک گزاره : فرض کنید p یک گزاره دلخواه باشد آنگاه نقیض این گزاره را

با نماد $\sim p$ یا $\neg p$ نمایش می‌دهیم . دقیقاً دارای ارزش مخالف با گزاره p می‌باشد .

p	$\sim p$
T	F
F	T

6 . گزاره عکس نقیض : فرض کنیم p و q دو گزاره دلخواه باشند آنگاه رابطه ترکیبی

$\sim q \rightarrow \sim p$ را عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ نامیده و این دو گزاره در جدول ارزش

گزاره ها هم ارزند .

$$(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim q \Longrightarrow \sim p)$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T
		طرف اول			طرف دوم

طرف اول $\overset{\checkmark}{\equiv}$ طرف دوم

$$*\overbrace{[(\sim p \vee s) \wedge (\sim q)]}^{*} \equiv [(p \vee q) \Rightarrow (s \wedge \sim q)]$$

گزاره‌ها p q s $۲^{۳} = ۸$

p	q	s	$\sim p$	$(\sim p \vee s)$	$\sim q$	$*$	$(p \vee q)$	$(s \wedge \sim q)$	طرف دوم
T	T	T	F	T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	F	F	T

Subject : Date

۱) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

۲) $(p \vee q) \rightarrow (p \vee s) \equiv p \vee (q \Rightarrow s)$

۳) $p \Rightarrow [\sim(q \Rightarrow p) \vee q] \equiv p \Rightarrow q$

۴) با فرض $p \wedge q \equiv F$ $\quad \sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p) \equiv (p \vee q)$

۵) $[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow \sim[(p \vee q) \Rightarrow r]$

Subject: Data:

Subject :

Date

Subject: Data:

استقرای ریاضیات : شیوه های استدلال :

آ) **روش تجربی** : در این روش که بر پایه آزمایش (آزمون و خطا) همراه می باشد . پس از طی مراحل مختلف آزمایشات نتیجه ای حاصل می گردد که با تبدیل روش تجربی به صورت ریاضی از نوعی استدلال با عنوان استدلال استقرایی استفاده خواهیم نمود . و واضح است که این روش نتیجه گیری بر مبنای تعداد محدودی از مشاهدات انجام شده که یکی از ضعف های مهم این روش محسوب می شود.

ب) **استدلال استنتاجی** : در این روش اساس کار بر پایه مفاهیم دقیق ریاضیات (اثبات های ریاضی) می باشد و در نتیجه حاصل استدلال استنتاجی همواره مورد تایید است .

گام های استدلال استقرایی :

آ) گام اول : در این مرحله باید درستی حکم داده شده را برای $n=1$ بدست آوردن و آن را $P(1)$ می نامیم .

ب) گام دوم (فرض استقرای) : در این مرحله فرض می کنیم که حکم داده شده تا مرحله k ام برقرار باشد $(n=k)$. به عبارت دیگر $p(k)$ را تشکیل می دهیم .

ج) گام سوم (حکم استقرای) : در این مرحله از فرض استقرای کمک گرفته و حکم داده شده را برای $n=k+1$ ثابت می کنیم و به عبارتی $p(k+1)$ را بدست می آوریم .

* با استفاده از استقراء درستی احکام زیر را بررسی کنید.

$$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$1)\ n=1\quad p(1):\ 1=\frac{1(1+1)}{2}\ \rightarrow\ 1=1\ \checkmark$

$2)\ n=k\quad p(k):\ 1+2+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

$3)\ n=k+1\ :\ 1+2+\dots+k+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

حکم

طرف اول حکم : $\overbrace{1+2+\dots+k}^{\text{بنابه فرض}}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)}{1}=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$

$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=$ طرف دوم حکم

* $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

$1)\ n=1\quad p(1):\ 1+3+5+\dots+(2-1)=1^2\ \Rightarrow\ 1=1\ \checkmark$

$2)\ n=k\quad p(k):\ 1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$

$3)\ n=k+1\quad p(k+1):\ 1+3+5+\dots+(2k-1)+\underbrace{(2(k+1)-1)}_{2k+1}=(k+1)^2$

طرف اول حکم : $1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=k^2+2k+1$

$=(k+1)^2$

Subject: Data: ۲۵ مهر

تمرین : درستی تمرین‌های زیر را برای هر $n \geq 1$ با استفاده از روش استقراء نشان دهید:

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$n=1 \quad p(1): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1 \Rightarrow 1 = 1$ ✓

$n=k \quad p(k): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{4k^7+1}{6}$

$n=k+1 \quad p(k+1): 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

2) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

$n=1 \quad p(1): 1 + 3 + 5 + \dots + (2-1) = 1 \qquad 1 = 1$ ✓

$n=k \quad p(k): 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$

$n=k+1 \quad p(k+1): 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$

$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ طرف اول = طرف دوم ✓

3) $2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2$

$n=1 \quad p(1): 2 + 6 + 10 + \dots + (4-2) = 2 \qquad 2 = 2$ ✓

$n=k \quad p(k): 2 + 6 + 10 + \dots + (4k-2) = 2k^2$

$n=(k+1) \quad p(k+1): 2 + 6 + 10 + \dots + (4k-2) + (4(k+1)-2) = 2(k+1)^2$

$2k^2 + 4k + 2 = 2k^2 + 4k + 8$

Subject : Date

$4)\ \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

$n=1 \quad P(1):\ \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\dots+\frac{1}{\underbrace{(3-2)}_{1}\underbrace{(3+1)}_{4}}=\frac{1}{3+1}\Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}\ \checkmark$

$n=k \quad P(k):\ \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}$

$n=(k+1) \quad P(k+1):\ \frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\dots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}$

$=\frac{k+1}{(3(k+1)+1)}\Rightarrow \frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{k+1}{3k+4}$

$\frac{k(3k+1)(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}=$

$5)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

$n=1 \quad P(1):\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+1<\frac{1}{8}(2+1)^2\Rightarrow 1<\frac{9}{8}\ \checkmark$

$n=k \quad P(k):\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+k<\frac{1}{8}(2k+1)^2$

$n=(k+1) \quad P(k+1):\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+k+(k+1)<\frac{1}{8}(2(k+1)+1)^2$

$\frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1)<\frac{1}{8}(2k+3)^2$

MICRO

Subject: Data:

$2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$

$p(1):\ 2(1) = 1(1+1) \Rightarrow 2=2$ ✓

$n=k \quad p(k):\ 2+4+6+\dots+2k = k(k+1)$

$n=k+1 \quad p(k+1):\ 2+4+6+\dots+2k+2(k+1) = (k+1)\big((k+1)+1\big) = (k+1)(k+2)$

طرف اول حکم $= 2+4+6+\dots+2k+2(k+1) = k(k+1)+2(k+1) = (k+1)(k+2) =$ طرف دوم حکم

فصل سوم: سیستم‌های عددنویسی

سیستم ده دهی 8 در سیستم‌های عددنویسی به عنوان قدیمی‌ترین و رایج‌ترین سیستم محسوب می‌شود. سایر سیستم‌ها قابل تبدیل به سیستم ده دهی می‌باشند و نیز هر عددی را می‌توان از سیستم ده دهی به یک سیستم غیر ده برد. ارقام متمایز سیستم ده دهی شامل ده رقم ۰،۱،۲،...،۹ می‌باشند و سایر سیستم‌ها به تبعیت از سیستم ده دهی ارقام آنها از رقم صفر شروع شده و تا یکی مانده به شماره سیستم مورد نظر ادامه دارد. برای مثال سیستم هشت هشتی دارای هشت رقم ۰،۱،۲،...،۷ می‌باشد.

8	4	6	3
10^3	10^2	10^1	10^0
1000	100	10	1

$8000+400+60+3$

Subject: Date

• تبدیل مبنای یک عدد دلخواه از یک سیستم غیر ده به سیستم ده دهی : فرض کنیم عدد دلخواه m

در یک سیستم غیر ده (مثلاً b) دارای ارقام زیر باشد : $m=(n_k\ n_{k-1}\dots n_1n_0)_b$

حال تبدیل مبنای چنین عددی عبارت است از مجموع حاصلضرب ارزش گذاری هر رقم از سمت

راست به چپ در توان مبنای داده شده به صورت زیر :

$$m=(n_k\ n_{k-1}\dots n_1n_0)_b = n_0\times b^0+n_1\times b^1+n_2\times b^2+\dots+n_{k-1}\times b^{k-1}+n_k\times b^k$$
$$=(m)_{10}=m$$

* مبنای ۱۰ را نمی نویسیم

* تبدیل مبناهای زیر را انجام دهید :

$$(\overset{2}{2}\overset{1}{2}\overset{0}{1})_3=(1\times 3^0)+(2\times 3^1)+(2\times 3^2)=1+6+18=25$$

نکته : ارقام سیستم شانزده شانزدهی پس از ده رقم اولیه از ۰ تا ۹ به صورت زیر خواهد بود :

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \underset{10}{A}, \underset{11}{B}, \underset{12}{C}, \underset{13}{D}, \underset{14}{E}, \underset{15}{F}$

$$(\overset{2}{A}\overset{1}{5}\overset{0}{F})_{16}=(15\times 16^0)+(5\times 16^1)+(10\times 16^2)=2655$$

• تبدیل مبنای یک عدد دلخواه از سیستم ده دهی به سیستم غیر ده :

برای تبدیل نمودن یک عدد دلخواه در مبنای ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ ابتدا رقم داده شده را به عنوان

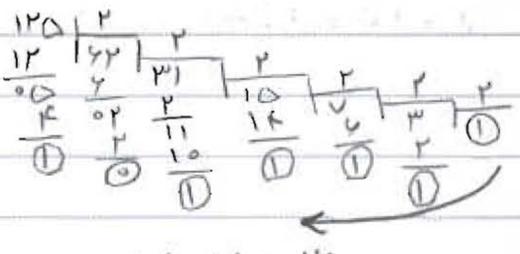
مقسوم یک تقسیم دیواری درنظر می گیریم سپس مبنای خواسته شده را در مقسوم علیه

تقسیم دیواری به کار می بریم ، حال تقسیم را انجام داده و تا مرحله ای پیش می رویم که باقیمانده

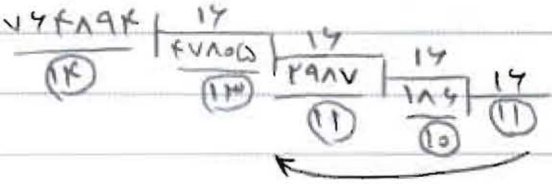
Subject: Data:

بدست آمده یا برابر با صفر گردد و یا از مقسوم علیه کمتر شود. باقیمانده (نهایی) تقسیم
انجام شده را با یک دایره مشخص می کنیم حال به خارج قسمت بدست آمده توجه می نماییم
اگر خارج قسمت بدست آمده از مقسوم علیه کمتر باشد (کمتر الیه) آنگاه دور خارج قسمت
نیز خط کشیده و از سمت خارج قسمت به سمت باقیمانده یکانی را مشخص نموده و از چپ
به راست به عنوان رقم مورد نظر در مبنای خواسته شده می نویسیم. اما اگر خارج قسمت
بدست آمده بزرگتر یا مساوی با مقسوم علیه (مبنای خواسته شده) بود، آنگاه خارج
قسمت را به عنوان مقسوم تقسیم دوباره جدید در نظر گرفته و مجدداً بر مبنای
خواسته شده تقسیم می نماییم. این کار را تا زمانی ادامه می دهیم که آخرین خارج قسمت
بدست آمده دقیقاً کمتر از مقسوم علیه خواسته شده بدست آید.

$۱۲۵ = (۱۱۱۱۱۰۱)_۲$



$۷۶۴۸۹۴ = (BABDE)_{۱۶}$



• تبدیل مبنای یک عدد دلخواه از مبنای غیر ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ دیگر 8

برای تبدیل سیستم عدد نویسی یک عدد دلخواه که در مبنایی مخالف با ۱۰ می باشد و بخواهیم آن را به مبنای مخالف با ۱۰ دیگری ببریم ابتدا عدد داده شده را با هر مبنای مشخص به مبنای ۱۰ بردن و سپس از مبنای ۱۰ به مبنای خواسته شده می بریم.

$(157)_{16} = (527)_8$

$(7\times16^0)+(5\times16^1)+(1\times16^2) = 7+80+256 = 343$

$(157)_{16} = 343$

$343 = (527)_8$

$$\begin{array}{r|l} 343 & 8 \\ \underline{32} & \\ 023 & \\ \underline{16} & \\ 07 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 8 \\ \underline{40} & 5 \\ 02 & \end{array}$$

* معادل مبنای ۲ عدد شانزده شانزدهی $(10EAC2)_{16}$ را بنویسید.

$(10EAC2)_{16} = (100001110101011000010)_2$

$(10EAC2)_{16} = (2\times16^0)+(12\times16^1)+(10\times16^2)+(14\times16^3)+(0\times16^4)+(1\times16^5)$

$= 2+192+2560+57344+0+1048576 = 1108674$

$1108674 = (100001110101011000010)_2$

Subject: Data:

$2^2 = 4$

مبنای ۴	مبنای ۲
۰	۰ ۰
۱	۰ ۱
۲	۱ ۰
۳	۱ ۱

$2^3 = 8$

هشت هشتی	دودوئی
۰	۰۰۰
۱	۰۰۱
۲	۰۱۰
۳	۰۱۱
۴	۱۰۰
۵	۱۰۱
۶	۱۱۰
۷	۱۱۱

$2^4 = 16$

شانزده شانزده تایی	دودوئی
۰	۰۰۰۰
۱	۰۰۰۱
۲	۰۰۱۰
۳	۰۰۱۱
۴	۰۱۰۰
۵	۰۱۰۱
۶	۰۱۱۰
۷	۰۱۱۱
۸	۱۰۰۰
۹	۱۰۰۱
A	۱۰۱۰
B	۱۰۱۱
C	۱۱۰۰
D	۱۱۰۱
E	۱۱۱۰
F	۱۱۱۱

* معادل شانزده شانزدهی عدد دودوئی زیر را بنویسید:

$(1/0011/0011/0111/0111/0101)_2 = (136ED\ \ )_{16}$

$(1/001/011/011/111/011/101)_2 \quad (4333755)_8$

• تبدیل مبنای یک عدد کمتر از واحد از مبنای غیر ۱۰ به مبنای ۱۰ :

$(18/74)_9 = ($

$a^{-n} = \frac{1}{a^{+n}}$

$(1\times 9^1) + (8\times 9^0) + (7\times 9^{-1}) + (4\times 9^{-2}) = 9 + 8 + (7\times\frac{1}{9}) + (4\times\frac{1}{9^2}) = 17/83$

برای تبدیل مبنای یک عدد اعشاری (از مبنای غیر ۱۰ به مبنای ۱۰) ابتدا ممیز را به عنوان جدا کنندهٔ قسمت های صحیح و اعشاری عدد در نظر گرفته حال از ممیز به سمت چپ به ترتیب از شماره صفر به سمت اعداد صحیح مثبت ارزش گذاری نموده و از ممیز به سمت راست به ترتیب از اولین عدد صحیح منفی (۱-) شروع کرده و به سمت اعداد منفی بزرگتر ارزش گذاری می نماییم.

Subject: Date

* تمرین ؛

$(EA,2B)_{16} =$ $(10110110,001011)_2 =$

$(81,9F)_{16} =$ $(262,146)_8 =$

$(EA,2B)_{16} = (14 \times 16^{1}) + (10 \times 16^{0}) + (2 \times 16^{-1}) + (11 \times 16^{-2})$

$= 224 + 10 + (2 \times \frac{1}{16}) + (11 \times \frac{1}{16^2}) =$

$\frac{234}{1} + \frac{2}{16} + \frac{11}{256} = \frac{59904 + 32 + 11}{256} = \frac{59947}{256} = 234,167$

$(81,9F)_{16} = (8 \times 16^{1}) + (1 \times 16^{0}) + (9 \times 16^{-1}) + (15 \times 16^{-2})$

$= 128 + 1 + (\frac{9}{1} \times \frac{1}{16}) + (15 \times \frac{1}{16^2})$

$129 + \frac{9}{16} + \frac{15}{256} = \frac{33024 + 144 + 15}{256} = 129,621$

$(262,146)_8 = (2 \times 8^{2}) + (6 \times 8^{1}) + (2 \times 8^{0}) + (1 \times 8^{-1}) + (4 \times 8^{-2}) + (6 \times 8^{-3})$

$= 128 + 48 + 2 + (1 \times \frac{1}{8}) + (4 \times \frac{1}{8}) + (6 \times \frac{1}{8})$

$= 178 + \frac{1}{8} + \frac{4}{64} + \frac{6}{512} = 914.6$

$(10110110,001011)_2 =$

• تبدیل مبنای یک عدد کمتر از واحد از مبنای ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ ؛

برای تبدیل مبنای یک عدد کمتر از واحد از مبنای ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ باید برای تبدیل نمودن یک عدد اعشاری که در مبنای ۱۰ نوشته شده است . اگر بخواهیم به مبنای غیر ۱۰ تبدیل نماییم ابتدا عدد را از ممیز به دو قسمت تبدیل می‌نماییم ، قسمت صحیح را مانند مرحله قبل با استفاده

Subject: Data:

از حاصل تقسیم های متوالی به مبنای داده شده تبدیل می کنیم. اما قسمت اعشاری را بدون در نظر گرفتن قسمت صحیح جدا نموده (رقم صحیح ۰ باشد) و سپس این عدد کمتر از واحد را در مبنای داده شده ضرب می کنیم، دو حالت اتفاق می افتد: آ) قسمت صحیح صفر باشد که دور صفر را خط کشیده و مجدداً عدد بدست آمده اعشاری کمتر از واحد را نوشته و ضرب را در مبنای خواسته شده ادامه می دهیم. ب) قسمت صحیح عدد صفر نباشد در این حالت دور قسمت صحیح را خط کشیده و به قسمت اعشاری نگاه می کنیم. دو حالت اتفاق می افتد: 1. قسمت اعشاری برابر صفر باشد که در این حالت کار تمام است و از اولین تا آخرین رقم از چپ به راست می نویسیم. 2. قسمت اعشاری مخالف صفر باشد که در این حالت حاصلضرب های قسمت اعشاری را تا زمانی ادامه می دهیم که مجدداً به یکی از اعداد اعشاری ضرب شده برگردیم.

$0/125 = (0/001)_2$

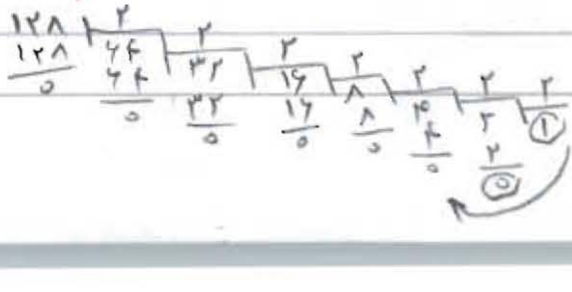
$0/125 \times 2 = 0/25 \qquad 0/25 \times 2 = 0/5 \qquad 0/5 \times 2 = 1/0$

$0/4 = (0/\overline{0110})_2$

$0/4 \times 2 = 0/8 \qquad 0/8 \times 2 = 1/6 \qquad 0/6 \times 2 = 1/2 \qquad 0/2 \times 2 = 0/4$

$128/375 = (10000000/011)_2$

ابتدا قسمت صحیح را با تقسیم جدا می کنیم:



©MICRO®

Subject: Date

حالا قسمت اعشاری را ... : ۰,۳۷۵ × ۲ = ۰,۷۵۰ ۰,۷۵۰ × ۲ = ۱,۵

۰,۵ × ۲ = ۱,۰

۷۶۴۸۹۴,۲۱ = (۱۰۱۱۱۰۱۰۱۰۱۱۱۱۰۱۱۱۱۰,۰۰۱۱۰۱۰۱۱۱۰۰۰۰۱)۲

۷۶۴۸۹۴ | ۲ → ۳۸۲۴۴۷ (۰)
۳۸۲۴۴۷ | ۲ → ۱۹۱۲۲۳ (۱)
۱۹۱۲۲۳ | ۲ → ۹۵۶۱۱ (۱)
۹۵۶۱۱ | ۲ → ۴۷۸۰۵ (۱)
۴۷۸۰۵ | ۲ → ۲۳۹۰۲ (۱)
۲۳۹۰۲ | ۲ → ۱۱۹۵۱ (۰)
۱۱۹۵۱ | ۲ → ۵۹۷۵ (۱)
۵۹۷۵ | ۲ → ۲۹۸۷ (۱)

۲۹۸۷ | ۲ → ۱۴۹۳ (۱)
۱۴۹۳ | ۲ → ۷۴۶ (۱)
۷۴۶ | ۲ → ۳۷۳ (۰)
۳۷۳ | ۲ → ۱۸۶ (۱)
۱۸۶ | ۲ → ۹۳ (۰)
۹۳ | ۲ → ۴۶ (۱)
۴۶ | ۲ → ۲۳ (۰)
۲۳ | ۲ → ۱۱ (۱)
۱۱ | ۲ → ۵ (۱۰ → ۱)
۵ | ۲ → ۲ (۴ → ۱)
۲ | ۲ → ۱ (۲ → ۰)

۰,۲۱ × ۲ = ۰,۴۲
۰,۴۲ × ۲ = ۰,۸۴ ۰,۸۴ × ۲ = ۱,۶۸
۰,۶۸ × ۲ = ۱,۳۶ ۰,۳۶ × ۲ = ۰,۷۲ ۰,۷۲ × ۲ = ۱,۴۴
۰,۴۴ × ۲ = ۰,۸۸ × ۲ = ۱,۷۶ ۰,۸۸ × ۲ = ۱,۷۶ ۰,۷۶ × ۲ = ۱,۵۲
۰,۵۲ × ۲ = ۱,۰۴ ۰,۰۴ × ۲ = ۰,۰۸ ۰,۰۸ × ۲ = ۰,۱۶
۰,۱۶ × ۲ = ۰,۳۲ ۰,۳۲ × ۲ = ۰,۶۴ ۰,۶۴ × ۲ = ۱,۲۸
۰,۲۸ × ۲ = ۰,۵۶ ...

حاصل جمع :

برای جمع نمودن دو عدد در مبنای مخالف ۱۰، ابتدا دو عدد را طوری زیر هم می‌نویسیم که اولین رقم از سمت راست دو عدد داده شده دقیقاً زیر یکدیگر قرار گیرد، سپس این دو رقم از سمت راست را با یکدیگر جمع می‌کنیم، حاصل بدست آمده دارای دو حالت می‌باشد: ۱. حاصل جمع دو عدد زیر هم از مبنای داده شده کمتر است. در این حالت

2. حاصل جمع دو رقم زیرهم بزرگتر و یا مساوی با مبنای داده شده است.

در این حالت حاصل جمع بدست آمده را بر مبنای خواسته شده تقسیم می‌نماییم، باقیمانده را در زیر دو رقم می‌نویسیم و خارج قسمت را به دو رقم زیرهم نوشته شده سمت چپ منتقل می‌نماییم. مراحل حاصل جمع را به صورت قبل تا آخرین دو رقم زیرهم نوشته شده پی می‌گیریم.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{5A2} \\ 2F \\ \hline (5D1)_{16} \end{array}$$

$$17 \div 16 = 1, \quad 17 - 16 = 1$$

$$(11/0111 + 10/1101)_2 =$$

$$\begin{array}{r} (11\,/\,0111 \\ +\ 10\,/\,1101)_2 \\ \hline (110\,/\,0100)_2 \end{array}$$

$$2 \div 2 = 1, \quad 2 - 2 = 0 \qquad 3 \div 2 = 1, \quad 3 - 2 = 1$$

حاصل ضرب دو عدد در مبنای غیر ۱۰:

برای اینکه دو عدد را در مبنای غیر ده در یکدیگر ضرب نماییم ابتدا دو عدد را طوری زیرهم می‌نویسیم که دقیقاً اولین رقم از سمت راست دو عدد زیر یکدیگر قرار گیرد سپس اولین رقم از سمت راست عدد پایینی را در اولین رقم از سمت راست عدد بالایی ضرب می‌کنیم، حاصل بر دو قسم است: ۱. حاصلضرب بدست آمده کمتر از مبنای خواسته شده باشد که همان حاصل را دقیقاً در زیر دو رقم می‌نویسیم.

Subject : Date

2. حاصلضرب انجام شده بیشتر یا مساوی با مبنای خواسته شده باشد. در این حالت حاصلضرب بدست آمده را بر مبنای خواسته شده تقسیم می‌کنیم و باقیمانده تقسیم نهایی را دقیقاً زیر دو رقم سمت راست می‌نویسیم، نیز خارج قسمت را نگه می‌داریم،

سپس اولین رقم از سمت راست عدد پایینی را در دومین رقم از سمت راست عدد بالایی ضرب می‌کنیم. حال حاصل ضرب بدست آمده را با خارج قسمت تقسیم مرحله قبل جمع نموده و حاصل را به عنوان یک عدد جدید در نظر می‌گیریم؛ مانند عدد قبل این عدد بر دو قسمت است: 1. کمتر از مبنا که خودش را می‌نویسیم

2. بیشتر مساوی با مبنا که مجدداً بر مبنا تقسیم نموده و مانند حالت قبل عمل می‌کنیم.

اولین رقم که در تمامی ارقام عدد بالایی ضرب شد قسمت اول حاصلضرب به پایان رسیده

حال زیر اولین رقم سمت راست عدد ۰ را قرار می‌دهیم و دومین رقم را مانند حالت قبل در تک تک ارقام عدد بالایی ضرب می‌کنیم. در انتها مانند حالت قبل حاصل جمع اعداد بدست آمده از حاصلضرب را در مبنای خواسته شده بدست می‌آوریم.

$(5AC \times 25) = (D1DC)_{16}$

$$\begin{array}{r} 5\ A\ C \\ \times\quad 2\ 5 \\ \hline 1\ C\ 5\ C \\ +\ B\ 5\ 8\ 0 \\ \hline (D\ 1\ D\ C)_{16} \end{array}$$

A	B	C	D	E	F
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵

$۵ \times ۱۲ = ۶۰$ ، $۶۰ \div ۱۶$: ۴۸، باقیمانده ۱۲، خارج قسمت ۳

$۵۰ + ۳ = ۵۳$ ، $۵۳ \div ۱۶$: ۴۸، باقیمانده 5، خارج قسمت ۳ ؛ $۳ + ۲۵ = ۲۸$

$۲۸ \div ۱۶$: ۱۶، باقیمانده ۱۲، خارج قسمت ۱

Subject: Date:

$$\begin{array}{r} \boxed{۳} \\ (۵\;۳\;۷ \\ \times\;\; ۲\;۴)_{۸} \\ \hline (۲۵۷۴ \\ +\;۱۲۷۶۰)_{۸} \\ \hline (۱۵۵۵۴)_{۸} \end{array}$$

$۴ \times ۷ = ۲۸ \,|\, \underline{۸}$ ، ۲۴ ، ۳ ، ۴

$$\begin{array}{r} (۱۰۱ \\ \times\;\; ۱۱)_{۲} \\ \hline +(۱۰۱ \\ ۱۰۱۰)_{۲} \\ \hline (۱۱۱۱)_{۲} \end{array}$$

اعشاری :

$$\begin{array}{r} (۱۱/۱۱۱۰۱ \\ \times\; ۰/۱۱۰۱۱)_{۲} \\ \hline ۱۱۱۱۱۰۱ \\ ۱۱۱۱۱۰۱۰ \\ ۱۱۱۱۱۰۱۰۰۰ \\ ۱۱۱۱۰۱۰۰۰۰ \\ \hline ۰۱۰۰۱۰۱۱۱۱ \end{array}$$

$(۵۶۴۳/۲۱۰۳)_{۸} = (\quad)_{۲}$ ، ۲۳

Subject: ✳ فصل ۴ : ترکیبیات ✳ Date

برای اینکه بخواهیم چند عمل مختلف را که هرکدام از این اعمال به چندین طریق انجام می‌شود را

با یکدیگر ترکیب نماییم از ترکیبیات کمک می‌گیریم.

اصل ضرب : فرض کنیم عملی به m طریق متفاوت انجام پذیر باشد و بازای هرکدام از این m طریق

عمل دیگری را بتوان به n طریق متفاوت دیگر انجام داد در نتیجه ترکیب این دو عمل به $m \times n$

طریق قابل انجام می‌باشد که به آن اصل ضرب گوییم

تعمیم اصل ضرب : اگر عمل اول خواهی به n_1 طریق و برای هرکدام از این طریق ها عمل دومی به n_2

طریق و ... و عمل k امی به n_k طریق امکان پذیر باشد آنگاه این k عمل باهم به

$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ طریق امکان پذیر خواهد بود.

* باحروف کلمه سرپرشته چند کلمه چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری که آ: تکرار حروف

جایز نباشد ، ب : تکرار حروف جایز باشد.

آ)

$\boxed{6} \times \boxed{5} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 360$

ب)

$\boxed{6} \times \boxed{6} \times \boxed{6} \times \boxed{6} = 1296$

* با ارقام ۵ ، ۷ ، ۵ ، ۴ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که تکرار ارقام در آنها

جایز نباشد؟

$\boxed{4} \times \boxed{4} \times \boxed{3} = 48$

٥ در خانه اول نمی‌تواند بنویسند.

Subject: Data:

نکته 1 : زمانیکه یک سکه را به صورت پرتاب می‌کنیم دو حالت اتفاق می‌افتد: آ) شیر (H) ب) خط (T)

۳ بار پرتاب همزمان سکه ⟸ $۲^۳=۸$

۴ بار پرتاب همزمان سکه ⟸ $۲^۴=۱۶$

نکته 2 : تمامی حالت های ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه آن آزمایش نامیده و با S نمایش می‌دهیم.

اصل جمع : فرض کنید پیشامدهای E_1 ، E_2 ، ... ، E_r دنباله‌ای از r پیشامد دلخواه باشند که

پیشامد E_1 به n_1 طریق متفاوت رخ دهد، پیشامد E_2 به n_2 طریق متفاوت رخ دهد و ... و

پیشامد E_r به n_r طریق متفاوت رخ دهد آنگاه با شرط اینکه هیچ دو پیشامدی به طور همزمان رخ ندهند،

تعداد کل راه هایی که این پیشامدها می‌توانند رخ دهند به $n_1+n_2+\cdots+n_r$ طریق خواهد بود.

* از میان ۳۸ نفر دانشجوی IT و ۳۳ نفر دانشجوی حسابداری می‌خواهیم یک نماینده انتخاب

نماییم. این کار به چند طریق است؟ $۳۸+۳۳=۷۱$

تبدیل : تعداد حالاتی که بتوان n شیء متمایز را در کنار یکدیگر طوری قرار داد که ترتیب قرار گرفتن این

n شیء متمایز اهمیت داشته باشد را تبدیل یا جایگشت این n شیء نامیده و با $P(n)$ نمایش می‌دهیم.

و به صورت زیر تعریف می‌شود. $P(n)=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$

* به چند طریق ۵ نفر می‌توانند در یک ردیف ۵ صندلی را اشغال نمایند؟

$\boxed{۵}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}=۱۲۰$

قانون 1: از این به بعد به جای نوشتن $p(n)$ از نماد $n!$ استفاده می‌کنیم و تعریف می‌کنیم:

$0! = 1$

قانون 2: $(n+1)! = \underbrace{(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots}_{p(n)=n!}\times 2\times 1 = (n+1)n!$

* حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{8!}{5!\times 3!} = \frac{\cancel{5!}\times 6\times 7\times 8}{\cancel{5!}\times 3\times 2\times 1} = 56$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)\times(n+1)\times \overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1}^{n!}}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+2)(n+1)$$

تعریف: تعداد جایگشت های n شیء متمایز زمانی که بخواهیم از این n شیء، r شیء آن

کنار هم قرار گیرند از رابطه مقابل بدست می‌آید: $\boxed{(n-r+1)!\times r!} \Rightarrow$?

* به چند طریق می‌توان ۷ نفر که سه نفر از آنها فامیل می‌باشند را در کنار یکدیگر قرار داد

به طوری که سه نفر فامیل کنار هم بنشینند؟

$n=7 \quad r=3$

$(n-r+1)!\times r! = (7-3+1)!\times 3! = 5!\times 3! = 120\times 6 = 720$

نکته: هرگاه بخواهیم n شیء متمایز را دور یک میز گرد قرار دهیم آنگاه تعداد حالات ممکن

برابر است با $(n-1)!$.

تعداد حالات ممکن برای اینکه بخواهیم n شیء متمایز از یک دسته را با n شیء متمایز از دسته‌ی

دیگر طوری دور یک میز بچینیم که این به صورت یک در میان در کنار یکدیگر قرار گیرند از رابطه زیر

استفاده می‌کنیم: $(n-1)!\times(n-1)!\times n = n!\times(n-1)!$

Subject: Data:

* به چند طریق می‌توان شش صندلی چوبی و شش صندلی فلزی را به صورت یک درمیان دور یک میز قرار داد؟

$n! \times (n-1)!$

$6! \times (6-1)! = 720 \times 120 =$

مثال صفحه ۸۳ کتاب درسی

۷. با فرض اینکه تکرار ارقام مجاز نباشد با رقم‌های ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۹:

آ) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ $\boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$, $6\times5\times4=120$

ب) چون اعداد باید کوچکتر از ۴۰۰ باشند لذا مربع سمت چپ می‌تواند توسط اعداد ۲ و ۳ پر شود بنابراین مربع سمت چپ به ۲ طریق پر می‌شود. مربع میانی به ۵ طریق و مربع سمت راست به ۴ طریق.

$\boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$, $2\times5\times4=40$

پ) چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟ $\boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{2}$, $4\times5\times2=40$

ت) چند عدد سه رقمی فرد می‌توان نوشت؟ $\boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$, $4\times5\times4=80$

ث) چند عدد سه رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ $\boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{1}$, $4\times5\times1=20$

۸. چند عدد سه رقمی با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ می‌توان نوشت به طوری که:

آ) تکرار ارقام جایز باشد. 5^3 $\boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{5}$, $5\times5\times5=125$

ب) ارقام تکرار نشوند. $\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}$, $5\times4\times3=60$

پ) در حالت ب چند عدد زوج و چند عدد فرد هستند؟ $\boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{2} = 24$ ← زوج

فرد ← $60-24=36$

Subject: تمرین صفحه ۸۵ کتاب Date

۲) با ارقام ۵، ۰، ۳، ۷، ۱ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به طوری که تکرار ارقام جایز نباشد.

$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}$, ۴×۴×۳ = ۴۸

۴) به چند طریق می‌توان به ۵ سوال تستی ۴ گزینه‌ای پاسخ داد؟

$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}$, ۴×۴×۴×۴×۴ = $۴^{۵}$ = ۱۰۲۴

۵) با حروف کلمه ارومیه چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت به طوری که حروف تکرار نشوند؟

$\boxed{۶}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}$, ۶×۵×۴ = ۱۲۰

۶) با ارقام ۰، ۳، ۵، ۸، ۶ چند عدد دو رقمی می‌توان ساخت به طوری که ارقام تکراری نباشند؟ ۱۶ تا

$\boxed{۴}\ \boxed{۴}$ = ۱۶

۷) با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی قابل قسمت بر ۵ می‌توان نوشت به طوری که ارقام تکراری نباشند؟ عددی مضرب ۵ است که رقم سمت راست آن ۰ و یا ۵.

۳۶.

$\boxed{۳}\ \boxed{۵}\ \boxed{۲}$

۸) با ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۰ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۳۰.

$\boxed{۵}\ \boxed{۲}\ \boxed{۳}$

۹) با ارقام ۴، ۵، ۶ چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت؟

$\boxed{۳}\ \boxed{۲}$ ۳×۲ = ۶

چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت؟

$\boxed{۱}\ \boxed{۲}$ ۱×۲ = ۲

« « « فرد « « « ؟

۶−۲ = ۴

Subject: Data:

۱۰) چند عدد سه رقمی از ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ می توان نوشت به طوری که:

آ) تکرار ارقام جایز باشد. $\boxed{5}\,\boxed{5}\,\boxed{5}$, $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$

ب) ارقام تکرار نشوند. $\boxed{5}\,\boxed{4}\,\boxed{3}$, $5 \times 4 \times 3 = 60$

پ) در حالت ب چند عدد زوج و چند عدد فرد هستند؟

$\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{2}$ $3 \times 4 \times 2 = 24$ زوج

$60 - 24 = 36$ فرد

ترتیب: تعداد حالت های ممکن انتخاب r شیء متمایز از n شیء را جایگشت یا ترتیب r شیء از n شیء گفته و با $p(n,r)$ نمایش می دهیم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$p\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad p\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{2! \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{2!} = 360$$

هرگاه از تکرار نشدن ارقام، حروف و اعداد صحبت می کنیم

©MICRO®

Subject: Date

$P(n,6) = 6P(n,4)$

$$\frac{n!}{(n-6)!} = 6\,\frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{\cancel{n}\times\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}(n-4)(n-5)\cancel{(n-6)!}}{\cancel{(n-6)!}} = \frac{6\cancel{n}\times\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}}$$

$(n-4)(n-5) = 6 \Rightarrow n^2-9n+20 = 6 \Rightarrow n^2-9n+14=0$

$\Rightarrow \Delta$ ازروش $\begin{cases} x_1 = 7 & \text{ق ق} \\ x_2 = 2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

بجای n گذاریم 7 را

$$\frac{7!}{(7-6)!} = 6\,\frac{7!}{(7-4)!} \Rightarrow 7! = \cancel{6}\times\frac{\cancel{3!}\times4\times5\times6\times7}{\cancel{3!}}$$

$7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 \Rightarrow 7! = 7!$ ✓

$P(7,4) = nP(4,2)$ $\qquad n = ?$ $\qquad$ مثال

$$\frac{7!}{(7-4)!} = n\,\frac{4!}{(4-2)!}$$

$$\frac{\cancel{3!}\times\cancel{4}\times5\times\cancel{6}\times7}{\cancel{3!}} = n\times\frac{\cancel{2!}\times\cancel{3}\times\cancel{4}}{\cancel{2!}} \Rightarrow 70 = n$$

ترکیب: اگر در انتخاب r شیء از n شیء $(r \leq n)$، ترتیب انتخاب‌ها مهم نباشد آنگاه این نوع انتخاب را ترکیب نامیده و با $\binom{n}{r} = C(n,r)$ نمایش می‌دهیم. بر این اساس هنگامی که جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز موجود باشند آنگاه ترکیب آنها عبارت است از

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{r!}{1}} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Subject: Data:

* از یک گروه متشکل از ۵ پزشک و ۴ پرستار چند کمیته ۳ نفره می‌توان تشکیل داد؟

$n = 4 + 5 = 9 \qquad r = 3 \quad (r \leq n)$

$$C(9,3) = \frac{9!}{(9-3)! \times 3!} = \frac{6! \times 7 \times 8 \times 9}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$$

* در مثال قبل اگر کمیته ۳ نفری متشکل از ۲ پزشک و یک پرستار باشد آنگاه چند کمیته می‌توان انتخاب نمود؟

$$\left.\begin{array}{l} D = 5 \\ N = 4 \end{array}\right\} r = 3 \rightarrow \begin{array}{l} D_1 = 2 \\ N_1 = 1 \end{array}$$

$$\binom{5}{2}\binom{4}{1} = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} \times \frac{4!}{(4-1)! \times 1!} = \frac{3! \times 4 \times 5}{3! \times 2} \times \frac{3! \times 4}{3! \times 1} = 40$$

* در یک کارگاه شیرینی پزی ۹ کارگر مشغول به کار هستند که ۵ نفر از آنها مرد بوده و بقیه زن می‌باشند. به چند طریق می‌توان یک گروه ۴ نفری از میان کارگران انتخاب نمود که حداقل ۲ نفر از آنها زن باشند.

$n = 9 \qquad$ مرد $= 5$

$r = 4 \qquad$ زن $= 9 - 5 = 4 \qquad$ حداقل ۲ زن

$$\binom{4}{2}\binom{5}{2} + \binom{4}{3}\binom{5}{1} + \binom{4}{4}\binom{5}{0} = \left(\frac{4!}{(4-2)! \times 2!} \times \frac{5!}{(5-2)! \times 2!}\right) + \left(\frac{4!}{(4-3)! \times 3!} \times \frac{5}{(5-1)! \times 1!}\right)$$

$$+ \left(\frac{4!}{(4-4)! \times 4!} \times \frac{5!}{(5-0)! \times 0!}\right) = \left(\frac{2! \times 3 \times 4}{2! \times 2} \times \frac{3! \times 4 \times 5}{3! \times 2}\right) + \left(\frac{3! \times 4}{1! \times 3!} \times \frac{4! \times 5}{4! \times 1!}\right)$$

$$+ \left(\frac{4!}{0! \times 4!} \times \frac{5!}{5! \times 0!}\right) = 60 + 20 + 1 = 81$$

حداکثر ۲ زن :

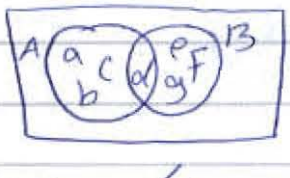
$$\binom{4}{2}\binom{5}{2}+\binom{4}{1}\binom{5}{3}+\binom{4}{0}\binom{5}{4}$$

$$=\left(\frac{4!}{(4-2)!\times 2!}\times\frac{5!}{(5-2)!\times 2!}\right)+\left(\frac{4!}{(4-1)!\times 1!}\times\frac{5!}{(5-3)!\times 3!}\right)+\left(\frac{4!}{(4-0)!\times 0!}\times\frac{5!}{(5-4)!\times 4!}\right)$$

$$=\left(\frac{4\times 3\times 2!}{2!\times 2!}\times\frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2!}\right)+\left(\frac{4\times 3!}{3!\times 1!}\times\frac{5\times 4\times 3!}{2!\times 3!}\right)+\left(\frac{4!}{4!\,0!}\times\frac{4!\times 5}{1!\times 4!}\right)$$

$$=(3\times 2\times 2\times 5)+(4\times 2\times 5)+(5)=60+40+5=105$$

اصل شمول و طرد :



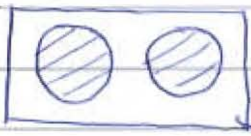
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=4+4-1=7$$

فرض کنید مجموعه‌های A و B با یکدیگر اشتراک داشته باشند. آنگاه چون عناصر مشترک بین مجموعه‌های A و B دوبار در اشتراک گرفته می‌شود (شامل می‌شود) بنابه اینکه تکرار در تعداد اعضای مجموعه هیچ تأثیری روی اجتماع مجموعه‌ها ندارد یک مرتبه از عناصر مشترک را حذف می‌کنیم (طرد می‌کنیم).

فرض کنید U و n یک مجموعه مرجع و مجموعه‌های متناهی و دلخواه A و B موجود باشند آنگاه

با شرط اینکه این دو مجموعه با یکدیگر هیچ اشتراکی نداشته باشند آنگاه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

به صورت زیر خواهد بود.



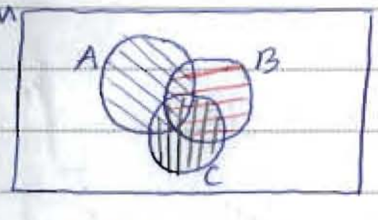
$A\cap B=\varnothing$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

اصل شمول و طرد برای سه مجموعه دلخواه A و B و C :

فرض کنیم M (U) مجموعه جهانی بوده و مجموعه‌های A، B و C دلخواه باشند. حال با شرط

اینکه این سه مجموعه با یکدیگر اشتراک داشته باشند آنگاه اصل شمول و طرد برای این



سه مجموعه به صورت زیر خواهد بود.

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

* با فرض اینکه مجموعه‌های دلخواه A، B و C به ترتیب دارای ۹، ۵ و ۸ عضو باشند

و نیز داشته باشیم $n(A\cap B)=3$ ، $n(A)=9$ ، $n(A\cup B\cup C)=12$ و آنگاه تعداد اعضای اشتراک این سه مجموعه را بدست آورید.

$n(B)=5$ ، $n(A\cap C)=6$

$n(C)=8$ ، $n(B\cap C)=2$

بنابر اصل شمول و طرد داریم:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)$$
$$+n(A\cap B\cap C) \Rightarrow 12=9+5+8-3-6-2+n(A\cap B\cap C)$$
$$\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=12-11=1$$

* فرض کنید مجموعه $X=\{1,2,\ldots,600\}$ را داشته باشیم، آنگاه تعداد اعداد متعلق به مجموعه X را طوری بیابید که بر اعداد ۳ یا ۵ یا ۷ بخش پذیر نیستند.

$n(X)=600$

$$n(A\cap B)=\left[\frac{600}{3\times 5}\right]=\left[\frac{600}{15}\right]=40$$

$$n(A)=\left[\frac{600}{3}\right]=200$$

$$n(A\cap C)=\left[\frac{600}{3\times 7}\right]=\left[\frac{600}{21}\right]=28$$

$$n(B)=\left[\frac{600}{5}\right]=120$$

$$n(B\cap C)=\left[\frac{600}{5\times 7}\right]=\left[\frac{600}{35}\right]=17$$

$$n(C)=\left[\frac{600}{7}\right]=85$$

$$n(A\cap B\cap C)=\left[\frac{600}{3\times 5\times 7}\right]=\left[\frac{600}{105}\right]=5$$

Subject : Date

$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C) - n(A\cap B) - n(B\cap C) - n(A\cap C)$
$+ n(A\cap B\cap C) = ۲۰۰ + ۱۲۰ + ۸۵ - ۴۰ - ۱۷ - ۲۸ + ۵ = ۳۲۵$

$(n(A\cup B\cup C))' = n(X) - n(A\cup B\cup C) = ۶۰۰ - ۳۲۵ = ۲۷۵$

عدد استرلینگ نوع اول :

تعریف : عدد استرلینگ نوع اول که با نماد $S(m,n)$ نمایش می‌دهند عبارت است از ضریب عددی جمله x^m در عبارت حاصل ضربی $x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ با این قرارداد که $S(0,0)=1$ است.

قضیه : برای محاسبه اعداد استرلینگ نوع اول : اعداد استرلینگ نوع اول برای m و n طبیعی در روابط زیر صدق می‌کنند :

۱) $S(m,0) = S(0,n) = 0$
۲) $S(m,n) \quad S(m-1,n-1) - (n-1)S(m,n-1)$

■ با استفاده از تفکیک درمورد اعداد استرلینگ نوع اول، حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$S(2,1) \qquad n=1 \qquad m=2$

از تفکیک: $S(m,n) = S(m-1,n-1) - (n-1)\,S(m,n-1)$

$S(2,1) = S(2-1,1-1) - (1-1)\,S(2,1-1)$

$= S(1,0) - (0)\,S(2,0) = 0 - (0)(0) = 0$

$S(2,3) = \xrightarrow{\text{تعریف}} ①$

$\qquad \xrightarrow{\text{تفکیک}} ②$

$m=2 \qquad x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) \Rightarrow x-n+1 = x-3+1 = x-2$

$n=3$

$x(x-1)(x-2) = (x^2-x)(x-2) = x^3-2x^2-x^2+2x = x^3-3x^2+2x$

ضریب $x^m \Rightarrow m=2 \Rightarrow x^2 \Rightarrow -3$ ①

$\begin{cases} S(m,0) = S(0,n) = 0 \\ S(m,n) = S(m-1,n-1) - (n-1)\,S(m,n-1) \end{cases}$

$S(2,3) \begin{cases} m=2 \quad n=3 \end{cases}$

$S(2,3) = S(2-1,3-1) - (3-1)\,S(2,3-1)$

$= S(1,2) - (2)\,S(2,2) = [S(1-1,2-1) - (2-1)\,S(1,2-1)]$

$-(2)[S(2-1,2-1) - (2-1)\,S(2,2-1)] = [S(0,1) - S(1,1)] - (2)[S(1,1) - S(2,1)]$

$= -[S(1-1,1-1) - (1-1)\,S(1,1-1)] - (2)[(S(1-1,1-1) - (1-1)\,S(1,1-1)$

$-(S(2-1,1-1) - (1-1)\,S(2,1-1)] = -[S(0,0) - (0)\,S(1,0)]$

$-(2)[(S(0,0) - (0)\,S(1,0)] - (S(1,0) - (0)\,S(2,0)] = -1 - 2(1) = -3$ ②

Subject : Date

گراف ها: گراف G را که از یک مجموعه ناتهی V با نام مجموعه رئوس (گره‌ها یا نقطه‌ها) و یک مجموعه که الزاماً غیر تهی نمی‌باشد، یک مجموعه E با نام یال (خط یا لبه) و یک نگاشت به صورت $F: E \to V \times V$ که این نگاشت مجموعه یال‌ها را به مجموعه زوج‌های مرتب و یا نامرتب رئوس مجاور را یک گراف (نامیده) که به صورت $G=\langle V,E \rangle$ نمایش می‌دهیم. تعداد اعضای مجموعه V (تعداد رئوس گراف G) را مرتبه گراف G نامیده و تعداد اعضای مجموعه E (تعداد یال‌های گراف G) را اندازه گراف G می‌نامیم.

راس مجاور: اگر بین راس‌های دلخواه u و v یال $e \in E$ موجود باشد آنگاه رئوس u و v را رئوس مجاور نامیم.

یال جهت دار: یال e را جهت دار نامیم هرگاه زوج مرتبی از رئوس دلخواه گراف G مانند u و v موجود باشد به طوری که داشته باشیم (u,v) $u \to v$ در غیر این صورت یال e را یک یال بی‌جهت می‌نامیم.

نکته: اگر یال e یک تلاقی بین رئوس v و u باشد و این تلاقی جهت دار باشد آنگاه می‌نویسیم

$F(e)=(u,v)$ | $u \xrightarrow{e} v$. اما اگر تلاقی میان رئوس u و v بی جهت باشد آنگاه داریم:

$F(e)=\{u,v\}$ | u —— v یا v —— u $e=uv=vu$

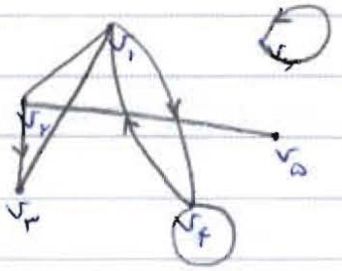
گراف جهت دار: گرافی که تمامی یالهای آن جهت دار باشد را گراف جهت دار نامیم. و گرافی که تمامی یالهای آن بی جهت باشد را گراف بی جهت نامیده و گرافی که دارای یالهای هم جهت دار و هم بی جهت باشد را گراف مخلوط نامیم.

* با استفاده از جدول زیر گراف حاصل را رسم نمایید.

e	f(e)
e_1	$\{v_1, v_3\}$
e_2	$\{v_1, v_2\}$
e_3	$\{v_4, v_4\}$
e_4	$\{v_5, v_2\}$
e_5	v_4, v_1
e_6	v_1, v_4
e_7	v_2, v_3
e_8	v_6, v_6

$V = \{v_1, \ldots, v_6\} \Rightarrow n(V) = 6$

$E = \{e_1, \ldots, e_8\} \Rightarrow n(E) = 8$



نکته: اگر در گراف G بیش از یک یال دو راس مجاور را به یکدیگر متصل نماید چنین گرافی را گراف چندگانه نامیم، که در این حالت حتماً گراف G دارای یال چندگانه می باشد.

طوقه: اگر یالی از راس دلخواهی شروع و به همان راس ختم شود این یال را طوقه نامیم.

گراف ساده: گراف بی جهتی که فاقد طوقه و فاقد یالهای چندگانه باشد را گراف ساده نامیم.

مسیر: فرض کنیم $G = \langle V, E \rangle$ یک گراف دلخواه باشد، آنگاه یک مسیر از راس v_1 به راس v_n

دنباله‌ای از رئوس و یال‌های گراف G است که به طور متناوب در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند و به صورت زیر بیان می‌شود: $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \dots \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n$

از این به بعد یک مسیر را یا با مجموعهٔ رئوس درگیر آن ($v_1, v_2, \dots v_n$) و یا با مجموعهٔ یال‌های موجود در آن ($e_1 e_2 \dots e_{n-1}$) نمایش می‌دهیم.

مسیر ساده: هرگاه مسیری از رئوس متمایز تشکیل شده باشد (مسیر فاقد طوقه و فاقد یال چندگانه) آنگاه این مسیر را مسیر ساده نامیم.

گذر (تریل): مسیری که دارای یال‌های متمایز باشد را گذر یا تریل نامیم.

نکته: اگر در یک مسیر رئوس آن متمایز باشند (مسیر ساده) آنگاه یال‌ها نیز متمایز خواهند بود (گذر) در نتیجه هر مسیر ساده یک گذر می‌باشد. اما عکس این مطلب درست نیست. زیرا در گراف دلخواهی شاید یال‌ها متمایز بوده اما راس‌ها در دو نقطه بر یکدیگر منطبق باشند. در نتیجه هر گذر یک مسیر ساده نمی‌باشد.

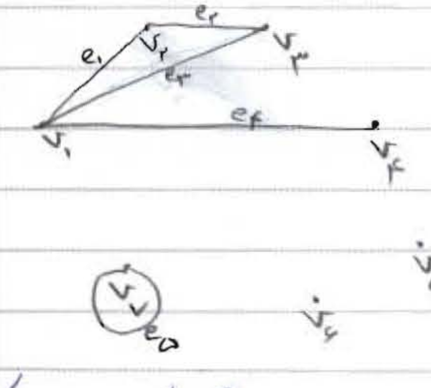
دور: مسیر ساده‌ای که در آن رئوس ابتدا و انتها بر یکدیگر منطبق باشند دور نامیم.

طول مسیر (طول دور): تعداد یال‌های موجود در یک مسیر (دور) را به انضمام یال‌های تکراری، طول مسیر یا طول دور نامیم و مسیر (دور) به طول k را یک k-مسیر (k-دور) نامیم.

Subject: Data:

* گراف دلخواهی با مرتبه ۷ و اندازه ۵ را طوری رسم نمایید که یک ۴- مسیر و یک ۳- دور در آن موجود باشد. همچنین یکی از رئوس تنهای آن دارای طوقه باشد.

۷ راس = مرتبه ۷ ۵ یال = اندازه ۵



$v_1v_2v_3v_1v_4 = e_1e_2e_3e_4$ ۴- مسیر

$v_1v_2v_3v_1 = e_1e_2e_3$ ۳- دور

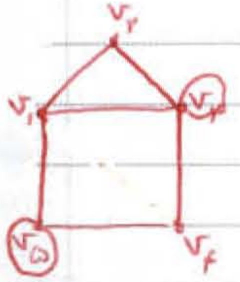
$v_7 = e_5$ طوقه

ماتریس مجاورت: هرگاه گراف دلخواه G با m راس و n یال موجود باشد آنگاه در صورتی که ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times m}$ یک ماتریس مربعی از مرتبه m باشد و بخواهیم درایه های این ماتریس را براساس یالهای گراف G مشخص نماییم و داشته باشیم

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر } \{v_i,v_j\} \text{ یک یال موجود باشد}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

آنگاه چنین ماتریسی را ماتریس مجاورت گراف G می نامیم.

نکته: اگر در راس دلخواه v_i طوقه داشته باشیم آنگاه درایه a_{ii} متناظر با آن که روی قطر اصلی می باشد برابر 1 است.



* ماتریس مجاورت گراف فوق را بیابید:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Subject :

Date