(۱)

برآورد فاصله ای

مقدمه

شکل دیگر استنباط آماری برآورد یا تخمین فاصله‌ای است. اگر نسبت به θ پارامتر جامعه بخواهیم قضاوت داشته باشیم می‌توانیم نمونه‌ای تصادفی به حجم n انتخاب کرده و در آن با $\hat{\theta}$ به عنوان یک کمیت تصادفی θ را برآورد می‌کنیم در یک نمونه تصادفی خاص مقدار $\hat{\theta}$ را برآورد نقطه‌ای می‌گویند. در برآورد فاصله‌ای به دنبال فاصله یا بازه‌ای هستیم که با اعتماد یا اطمینان λ پارامتر θ در آن فاصله قرار گیرد.

$P(U \le \theta \le L)$ و U: حد بالا L: حد پایین

به U و L حدود یا کران‌های فاصله اعتماد یا اطمینان λ درصد گفته و به این روش تخمین یا برآورد فاصله‌ای می‌گوییم.

مقایسه برآورد فاصله‌ای و آزمون فرضیه:

کرانه‌ای خطا را می‌توان مرزهای بحرانی توصیف کرد که بین آنها سطح پذیرش H_0 و خارج از آن ناحیه بحرانی است. بنابراین منطق بر آزمون فرض ۲ طرفه است.

نمونه‌هایی از برآورد فاصله‌ای پارامتر θ:

اگر ۱) توزیع جامعه نرمال ۲) نمونه تصادفی به اندازه کافی بزرگ باشد. می‌توان برای پارامترهای یک، ۲ یا K جامعه برآورد فاصله‌ای انجام داد که نمونه‌هایی از آنها را در این بخش بیان خواهیم کرد؛

فرآیند کلی برآورد فاصله‌ای:

مشابه آزمون فرآیندی منظم و منطقی دارد مشتمل بر:

مرحله ۱: تعیین پارامتر و برآوردکننده آن θ و $\hat{\theta}$ — مرحله ۲: تعیین مفروضات (پیش فرض‌ها)

مرحله ۳: محاسبه برآوردکننده یا $\hat{\theta}$ — مرحله ۴: تعیین انحراف معیار برآوردکننده $\hat{\theta}$ ها — مرحله ۵: تعیین کوانتیل $\alpha/2$

مرحله ۶: محاسبه خطای برآورد (حاصل ضرب کوانتیل $\alpha/2$ * $\sigma_{\hat{\theta}}$)   مرحله ۷: کران خطا $\boxed{\hat{\theta} \pm \text{خطا}}$ ②

مرحله ۸: نتیجه‌گیری: بیان فاصله عددی و تفسیر آن

برآورد فاصله‌ای μ میانگین جامعه:

بسته به معلوم بودن یا نبودن واریانس، نرمال بودن یا نبودن توزیع ۴ حالت

- حالت اول: توزیع نرمال، واریانس معلوم
- حالت دوم: توزیع نرمال، واریانس مجهول
- حالت سوم: توزیع مجهول، واریانس معلوم
- حالت چهارم: هر ۲ مجهول

حالت اول: توزیع نرمال واریانس معلوم:

۱) انتخاب نمونه‌ای تصادفی به حجم دلخواه $n \geq 2$

۲) برآورد نقطه‌ای $\bar{X}$

۳) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

۴) کران خطا $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

مثال ۱: فرض کنید توزیع وزن محصولات نرمال با واریانس معلوم $\sigma^2=25 \Rightarrow \sigma=5g$، نمونه‌ای تصادفی به حجم ۴ محصول انتخاب و در آن وزن محصولات $X: 60, 65, 70, 75$ گرم باشند. مطلوب است فاصله اطمینان ۹۵ درصد میانگین وزن محصولات شرکت

حل:

1) $\theta=\mu$, $\hat{\theta}=\bar{X}$

2) توزیع وزن محصولات نرمال است. $\sigma^2=25$, $\sigma=5$; $\alpha=5\%$ $\alpha/2=2.5\%$

3) $\hat{\theta}=\bar{X}=\dots=67.5g$

4) $\sigma_{\hat{\theta}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{5}{\sqrt{4}}=2.5$

5) $Z_{\alpha/2}=Z_{2.5\%}=1.96$

6) خطای برآورد $=2.5*1.96=4.9g$

7) کران خطا $=\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} = 67.5 \pm 4.9 \; \begin{cases} 62.6g \\ 72.4g \end{cases}$

8) نتیجه‌گیری:

- به احتمال ۹۵ درصد متوسط وزن محصولات شرکت بین ۶۲٫۶ تا ۷۲٫۴ گرم است یا $P(62.6g \leq \mu \leq 72.4g)=0.95$

حالت دوم: توزیع نرمال، واریانس مجهول

۱) نمونه ای تصادفی به حجم دلخواه انتخاب می کنیم $n \geq 2$

۲) برآورد نقطه ای $\bar{X}$

۳) $\bar{X} \sim t(\mu, \frac{S}{\sqrt{n}})$

۴) کران ۲ خطا $\bar{X} \pm t_{(\alpha/2, df)} \frac{S}{\sqrt{n}}$

مثال ۲: در مثال ۱ برآورد فاصله ای ۹۵ درصد میانگین وزن محصولات شرکت را تعیین کنید؛ فرض کنید توزیع وزن محصولات نرمال ولی واریانس وزن مجهول بوده

حل:

۱) $\theta = \mu, \hat{\theta} = \bar{X}$

۲) - توزیع وزن محصولات شرکت نرمال
- واریانس وزن مجهول
$df = n-1 = 4-1$
$\alpha = 5\%$ $\alpha/2 = 2.5\%$

۳) $\hat{\theta} = \bar{X} = \dots = 67.5$

۴) $\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \dots \frac{\sqrt{125/3}}{\sqrt{4}} \simeq 3.227$

۵) $t_{(\alpha/2, df)} = t_{(2.5\%, 3)} = 3.1824$

۶) خطای برآورد $= 3.227 * 3.1824 \simeq 10.27\,g$

۷) کران ۲ خطا: $\bar{X} \pm t_{(\alpha/2, df)} \frac{S}{\sqrt{n}}$

$\dots = 67.5 \pm 10.27 \left\langle \begin{matrix} 57.23\,g \\ 77.77\,g \end{matrix} \right.$

۸) نتیجه گیری:
به احتمال ۹۵ درصد متوسط وزن محصولات بین ۵۷٫۲۳ تا ۷۷٫۷۷ گرم است.
یا فاصله اطمینان ۹۵ درصد وزن محصولات شرکت $(57.23\,g \quad 77.77\,g)$

حالت سوم: توزیع نرمال، واریانس معلوم

۱) نمونه ای تصادفی به حجم کافی بزرگ $n \to +\infty$ انتخاب می کنیم.

۲) برآورد نقطه ای $\bar{X}$

۳) $\bar{X} \stackrel{L}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ $n \to +\infty$

۴) کران ۲ خطا $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

نکته: مانند مرحله اول فقط نمونه تصادفی بزرگ است.

حالت چهارم: هر ۲ مجهول!

۱) نمونه ای تصادفی به اندازه کافی بزرگ $n \to +\infty$ انتخاب می کنیم.

۲) برآورد نقطه ای $\bar{X}$

۳) $\bar{X} \stackrel{L}{\sim} N(\mu, \frac{S}{\sqrt{n}})$ $n \to +\infty$

۴) کران ۲ خطا $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$

نکته: مانند حالت قبل فقط به جای σ^2، واریانس نمونه S^2

④

تمرین ۱:

فرض کنید توزیع طول قطعات تولیدی یک ماشین تراش نرمال بوده با میانگین مجهول باشد و نمونه تصادفی به حجم ۱۰۰ قطعه انتخاب و در آن توزیع قطعات به صورت زیر باشد:

طول قطعه	۱۰۰–۱۲۰	۱۲۰–۱۴۰	۱۴۰–۱۶۰	۱۶۰–۱۸۰	۱۸۰–۲۰۰	جمع
تعداد قطعات	۱۰	۲۰	۴۰	۲۰	۱۰	۱۰۰

در هر یک از حالت ذیل:

حالت اول: واریانس طول قطعات معلوم $\sigma^2 = 16$ حالت دوم: واریانس طول قطعات مجهول

مطلوب است برآورد فاصله‌ای با فاصله اطمینان ۹۹ درصد میانگین طول قطعات شرکت

برآورد فاصله‌ای P نسبت جامعه

۱) نمونه‌ای تصادفی به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم. $n \to +\infty$

۲) برآورد نقطه‌ای $\hat{P} = \frac{x}{n}$

۳) $\hat{P} \overset{L}{\sim} N\left(P, \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right)$

۴) کرانه‌های خطا $\hat{P} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$

سوال ۳: جهت ارزیابی سطح اشتغال در یک منطقه از افراد واجد اشتغال به تصادف نمونه‌ای ۱۰۰۰۰ نفره انتخاب شده که از این تعداد ۹۰۰۰ نفر شاغل هستند مطلوب است فاصله اعتماد ۹۹ درصد P نسبت اشتغال

حل:

۱) $\theta = P$, $\hat{\theta} = \hat{P} = \frac{x}{n}$

۲) $\begin{cases} n \to +\infty \\ \alpha = 1\%,\ \alpha/2 = 0.005 \end{cases}$

۳) $\hat{\theta} = \hat{P} = \frac{9000}{10000} = 0.9$

۴) $\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{0.9(0.1)}{10000}} = 0.003$

۵) $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.576$

۶) خطای برآورد $= 0.003 * 2.576 \approx 0.008$

۷) کرانه‌های خطا $= \hat{P} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} = 0.9 \pm 0.008 \begin{cases} 0.882 \\ 0.908 \end{cases}$

۸) نتیجه‌گیری: به احتمال ۹۹ درصد نسبت اشتغال بین ۰٫۸۸۲ تا ۰٫۹۰۸ یا درصد اشتغال بین ۸۸٫۲ تا ۹۰٫۸ درصد می‌باشد

تمرین ۲:

با توجه به مثال قبل فاصله اعتماد نسبت یا درصد بیکاری را در سطح ۹۵ درصد بزنید.

برآورد فاصله‌ای واریانس و انحراف معیار

حالت اول: توزیع متغیر در جامعه نرمال ⟸ $n \geq 2$ به حجم دلخواه

حالت دوم: توزیع متغیر مجهول (غیرنرمال) ⟸ $n \to +\infty$ به اندازه کافی بزرگ

۱) نمونه تصادفی مبتنی بر حالات ۱ و ۲ انتخاب شود

۲) برآورد کننده‌ای واریانس نمونه

$$\hat{\theta} = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

۳) توزیع χ^2

۴) گرفتن درصد خطا

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/2,\, df)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2,\, df)}} \Leftarrow df = n-1$$

نکته ۱: توزیع متقارن نیست.

نکته ۲: از حدود اعتماد واریانس جذر گرفته حدود اعتماد انحراف معیار به دست می‌آید.

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/2,\, df)}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2,\, df)}}} \qquad df = n-1$$

مثال ۴: اگر توزیع وزن محصول شرکتی نرمال و نمونه تصادفی به حجم ۴ محصول انتخاب و X: ۶۰ ۶۵ ۷۰ ۷۵ باشد مطلوب است: فاصله اعتماد ۹۵ درصد واریانس تشکیل دهید.

حل:

۱) $\theta = \sigma^2$, $\hat{\theta} = S^2$

۲) توزیع وزن محصول نرمال است. $df = 4-1 = 3$ ، $\alpha = 5\%$ ، $\alpha/2 = 2.5\%$ ، $1-\alpha/2 = 97.5\%$

۳) $\hat{\theta} = S^2 = \dots = \frac{125}{3}$

۴) —

۵) $\chi^2_{(2.5\%,\, 3)} = 9.348$, $\chi^2_{(97.5\%,\, 3)} = 0.216$

۶) —

۷) گرفتن درصد خطا

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/2,\, df)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2,\, df)}} , \; df = n-1 \Rightarrow \frac{(4-1)\,125/3}{9.348} \leq \sigma^2 \leq \frac{(4-1)\,125/3}{0.216} \;\left\langle\; \begin{matrix} 13.42 \\ 578.17 \end{matrix}\right.$$

۸) نتیجه‌گیری: به احتمال ۹۵ درصد واریانس وزن محصولات شرکت بین ۱۳٫۴۲ تا ۵۷۸٫۱۷ می‌باشد.

تمرین ۱۳:

با توجه به مثال ۴، برآورد فاصله‌ای انحراف معیار وزن‌ها را به دست آورید.