فصل یک

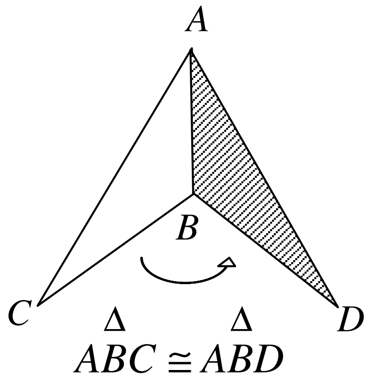
از خط تا چند ضلعی

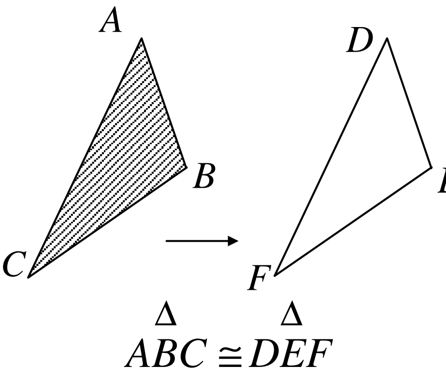
تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی
شهرستان باوی

www.mathtower.org

☑ دو شکل همنهشت

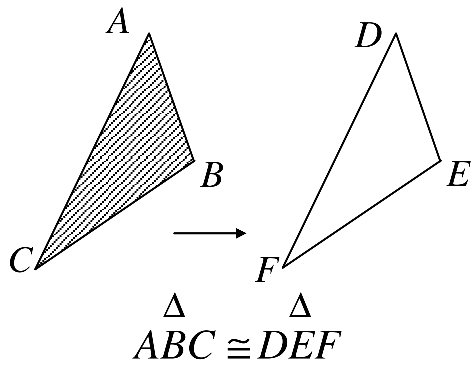
تعریف : دو شکل را همنهشت گویند ، هرگاه بدون تغییر آنها بر یکدیگر قابل انطباق باشند.



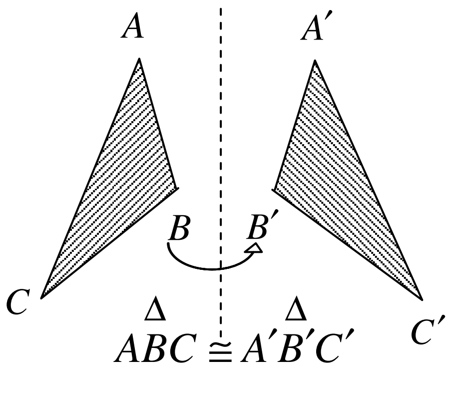


☑ انواع همنهشتی

۱- اگر دو شکل همنهشت فقط با لغزاندن یکی بر هم منطبق شوند، در این صورت همنهشتی را مستقیم و این دو شکل را هم جهت گویند.



۲- اگر دو شکل همنهشت علاوه بر لغزاندن با برگرداندن یکی بر هم منطبق شوند در این صورت همنهشتی را معکوس و این دو شکل را غیرهم‌جهت گویند.



☑ اصل تغییر ناپذیری

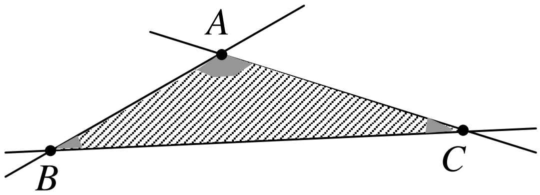
هر شکل هندسی ضمن جا به جا شدن تغییر نمی‌کند.

نتیجه : اگر دو شکل همنهشت باشند، آنگاه

الف) تمام اضلاع و زاویه‌های متناظر آنها مساویند.

ب) مساحت و محیط هر دو نیز مساوی است.

☑ مثلث

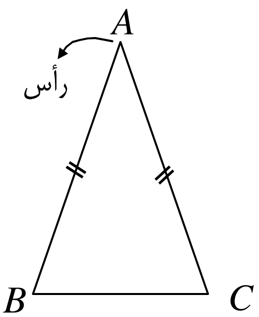


تعریف : هر گاه سه خط دو به دو همدیگر را در سه نقطه متمایز قطع کنند، شکل حاصل را مثلث می‌نامند.[1]

سه ضلع و سه زاویه ی هر مثلث را اجزای اصلی آن مثلث می‌نامند.

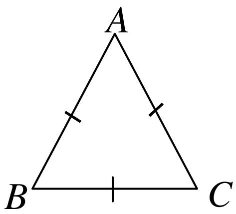
***

☑ انواع مهم مثلث

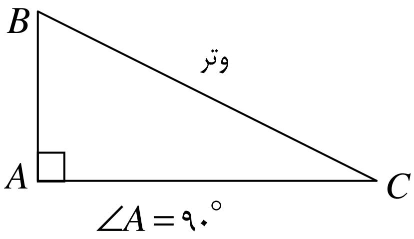


۱- مثلث متساوی الساقین : مثلثی که دو ضلع مســــاوی داشته باشد. دو ضلع مساوی را ساق و ضلع سوم را قاعده

می‌نامند. رأس مقابل به قاعده را رأس مثلث می‌نامند.



۲- مثلث متساوی الاضلاع : مثلثی که سه ضلع آن برابرند.



۳- مثلث قائم الزاویه : مثلثی که یک زاویه قائمه داشته باشد.

ضلع مقابل به زاویه قائمه را وتر می‌نامند.

نتیجه : هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی الساقین است.

***

1 . تعریف دیگر مثلث : هرگاه سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل کنیم، شکل حاصل را مثلث می نامند.

☑ حالت‌های عمومی همنهشتی مثلث‌ها

اصل ۱) هر گاه دو ضلع و زاویه ی بین آنها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه ی بین آنها از مثلث دیگری مساوی باشند،آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل ض‌زض).

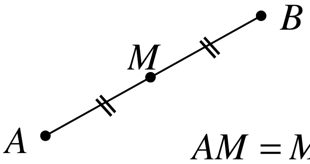
اصل ۲) هر گاه دو زاویه و ضلع بین آنها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دیگری مساوی باشند،آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل زض‌ز).

اصل ۳) هر گاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری مساوی باشند،آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل ض‌ض‌ض).

***

☑ نقطه ی میانی پاره خط :

نقطه ی میانی پاره خط، نقطه‌ای از همان پاره‌خط است که آن را به دو پاره‌خط مساوی تقسیم می‌کند.



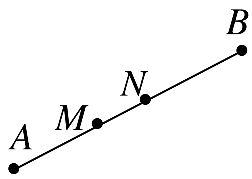
$$AM = MB$$

نتیجه : اگر M نقطه ی میانی پاره خط AB باشد، در این صورت :

$$AM = \frac{AB}{۲} \quad \text{و} \quad MB = \frac{AB}{۲}$$

قضیه ی ۱) هر پاره خط فقط یک نقطه ی میانی دارد.

اثبات : (به روش برهان خلف) فرض کنیم که پاره خط AB دونقطه ی میانی M و N داشته باشد ، آنگاه داریم :



M نقطه ی میانی AB $\rightarrow \quad AM = MB \rightarrow AM = \frac{AB}{۲}$

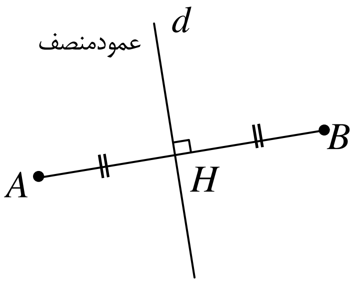
N نقطه ی میانی AB $\rightarrow \quad AN = NB \rightarrow AN = \frac{AB}{۲}$

$$\rightarrow \quad AM = AN$$

این وقتی ممکن است که دو نقطه ی N و M روی هم قرار گیرند و لذا پاره خط AB یک نقطه میانی دارد.

***

☑ عمود منصف یک پاره خط



تعریف : هر خط که هم از نقطه ی میانی یک پاره خط بگذرد و هم عمود بر آن باشد را عمود منصف آن پاره خط می‌نامند.

نتیجه : هر پاره خط فقط یک عمود منصف دارد.

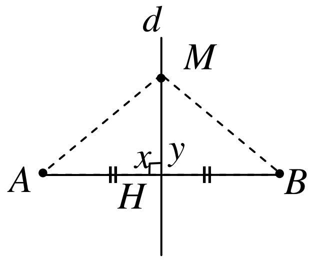
***

قضیه ی ۲) هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

فرض : $M \in d$ (عمود منصف)

حکم : $MA = MB$

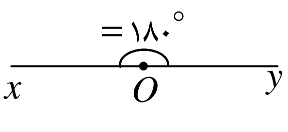
اثبات:



$$\left.\begin{array}{ll} MH = MH & \text{مشترک} \\ \angle x = \angle y = ۹۰^\circ & \\ AH = BH & \end{array}\right\} \to \underset{(\text{ض‌زض})}{\overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}} \to MA = MB$$

***

اصل زاویه ی نیم صفحه : هر طرف یک خط راست، یک زاویه ی نیم صفحه (۱۸۰°) است.



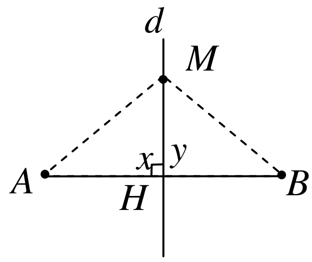
***

قضیه ی ۳) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

فرض: $MA = MB$

حکم : d عمود منصف AB است.

اثبات : از نقطه ی M خطی چنان رسم می‌کنیم که از نقطه ی میانی پاره‌خط AB بگذرد. پس :



$$\left.\begin{array}{ll} \text{طبق فرض} & MA = MB \\ \text{مشترک} & MH = MH \\ & AH = BH \end{array}\right\} \rightarrow \underset{(\text{ض ض ض})}{\overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}} \rightarrow \angle x = \angle y$$

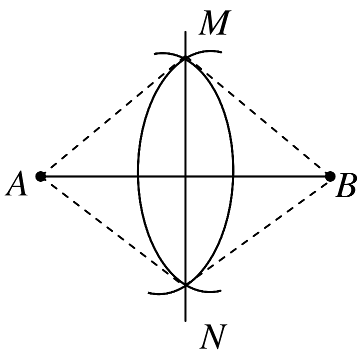
از طرفی طبق اصل زاویه ی نیم صفحه، واضح است که $\angle x + \angle y = ۱۸۰^\circ$ پس:

$$\angle x = \angle y = ۹۰^\circ \rightarrow d \perp AB$$

و چون $AH = BH$ و $d \perp AB$ پس d عمود منصف AB است.

***

☑ طریقه ی رسم عمود منصف یک پاره خط به کمک خط کش و پرگار

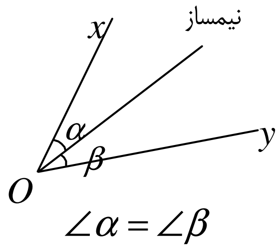


به مرکز A کمانی که شعاع آن از نصف طول پاره خط AB بیشتر باشد رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B و به همان شعاع کمان دیگری رسم می‌کنیم به طوری که کمان اول را در نقاط M و N قطع کند . خط MN عمود منصف AB است. (چرا؟)

چون نقاط M و N از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند، پس روی عمودمنصف آن قرار دارند و چون از M و N فقط یک پاره‌خط می‌گذرد، پس MN عمود منصف AB است.

***

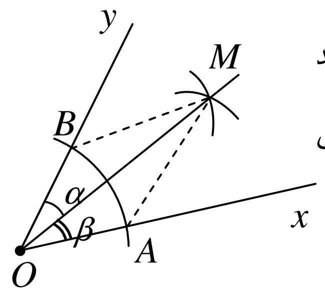
☑ نیمساز زاویه



تعریف : نیمساز زاویه خطی است که از رأس زاویـــه می‌گذرد و آن را به دو زاویه ی مساوی تقسیم می‌کند.

***

☑ طریقه ی رسم نیمساز زاویه به کمک خط کش و پرگار

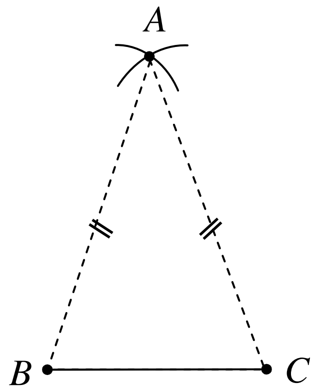


به مرکز O (رأس زاویه) کمانی رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط B و A قطع کند سپس به مرکز B و A کمانهایی به شعاع‌های مساوی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه ی M قطع کنند. OM نیمساز زاویه است (چرا؟)

جواب :

$$\left.\begin{array}{r} OA=OB \\ \text{مشترک} \quad OM=OM \\ AM=BM \end{array}\right\} \rightarrow \underset{(\text{ض ض ض})}{\overset{\Delta}{MAO} \cong \overset{\Delta}{MBO}} \rightarrow \angle\alpha=\angle\beta$$

☑ طریقه ی رسم مثلث متساوی‌الساقین به کمک خط کش و پرگار

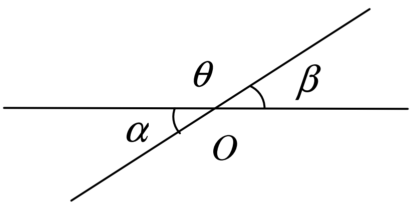


ابتدا پاره خط دلخواه BC را رسم می‌کنیم. سپس از نقاط B و C کمانهایی با شعاع های مساوی رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه A قطع کنند. چون $AB = AC$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تذکر : اگر پرگار را به اندازه ی پاره خط BC باز کنیم و سپس کمانها را رسم کنیم. مثلث متساوی الاضلاع به دست می‌آید.

***

☑ دو زاویه ی متقابل به رأس



تعریف : دو زاویه مقابل حاصل از دو خط متقاطع را دو زاویه ی متقابل به رأس می‌نامند. مانند زاویه‌های β و α در شکل زیر:

نتیجه : دو زاویه ی متقابل به رأس در یک رأس مشترک بوده و اضلاع آنها در امتداد همدیگر می‌باشند.

***

قضیه ی ۴) هر دو زاویه ی متقابل به رأس مساویند.

زاویه های β و α متقابل به رأس هستند : فرض

حکم : $\angle\alpha = \angle\beta$

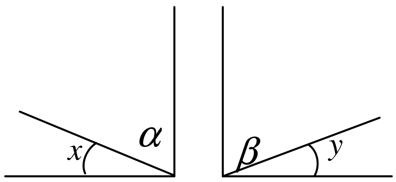
اثبات : با توجه به شکل فوق داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\angle\alpha + \angle\theta = ۱۸۰^\circ \\ \angle\beta + \angle\theta = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \angle\alpha + \angle\theta = \angle\beta + \angle\theta \rightarrow \angle\alpha = \angle\beta$$

☑ دو زاویه ی متمم

تعریف : دو زاویه را متمم گویند، هرگاه مجموع اندازه‌های آنها ۹۰ درجه باشد.

قضیه ی ۵) اگر دو زاویه مساوی باشند، متممهای آنها نیز مساویند.



فرض : $\angle x = \angle y$

حکم : $\angle\alpha = \angle\beta$

$\alpha \rightarrow \angle x + \angle\alpha = ۹۰^\circ$ متمم x است.

$\beta \rightarrow \angle y + \angle\beta = ۹۰^\circ$ متمم y است.

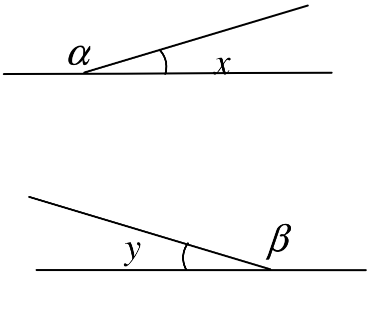
$$\angle x + \angle\alpha = \angle y + \angle\beta \xrightarrow{\angle x = \angle y} \angle\alpha = \angle\beta$$

***

☑ دو زاویه ی مکمل

تعریف : دو زاویه را مکمل گویند، هرگاه مجموع اندازه‌های آنها ۱۸۰ درجه باشد.

قضیه ی ۶) اگر دو زاویه مساوی باشند، مکملهای آنها نیز مساویند.



فرض : $\angle x = \angle y$

حکم : $\angle\alpha = \angle\beta$

$\alpha \rightarrow \angle x + \angle\alpha = ۹۰^\circ$ مکمل x است.

مکمل y است. $\beta \to \angle y + \angle \beta = 90^\circ$

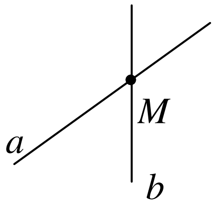
$$\angle x + \angle \alpha = \angle y + \angle \beta \xrightarrow{\angle x = \angle y} \angle \alpha = \angle \beta$$

❋❋❋

☑ حالت‌های مختلف دو خط در صفحه

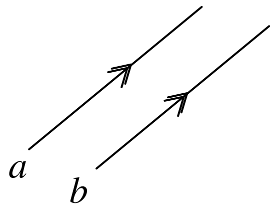
الف) دو خط یک نقطه مشـــترک دارند.

در این صورت دو خط را متقاطع گویند.



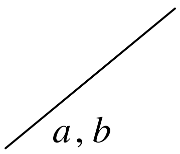
ب) دو خط هیچ نقطه مشترکی ندارند،

در این صورت دو خط را موازی گویند.



ج) تمام نقاط دو خط مشـــترک است،

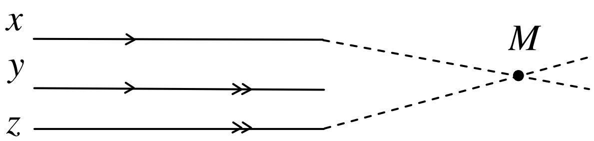
در این صورت دو خط را منطبق گویند.



توجه : در بعضی از کتب هندسه دو خط را در حالت های ب و ج را موازی می‌گویند.

❋❋❋

قضیه ی ۷) هر دو خط که با خط سومی موازی باشند، خود با هم موازیند.

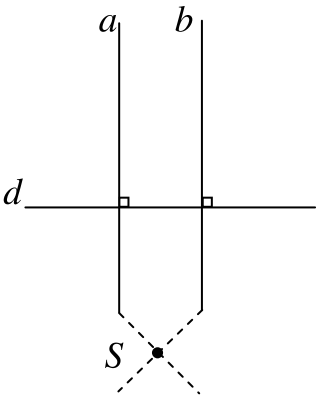


فرض : $x \parallel y$ و $y \parallel z$

حکم : $x \parallel z$

اثبات: (به روش برهان خلف) ، گیریم که خط x موازی z نباشد. لذا همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند، در این صورت از نقطه ی M دو خط موازی y رسم شده است و این خلاف اصل توازی اقلیدس می باشد، پس $x \parallel z$

❋❋❋



قضیه ی ۸) در هر صفحه دو خط عمود بر یک خط موازی یکدیگرند.

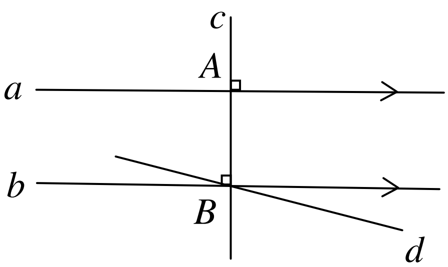
فرض : $a \parallel d$ و $b \parallel d$

حکم : $a \parallel b$

اثبات : (به روش برهان خلف)، فرض کنیم که $a \parallel b$ نباشد، پس b و a همدیگر را در نقطه‌ای مانند S قطع می‌کنند و لذا از یک نقطه دو خط بر d عمود شده است و این خلاف اصل تعامد اقلیدس است. پس $a \parallel b$

قضیه ی ۹) اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد ، بر دیگری نیز عمود است.

فرض : $a \parallel b$ و $c \perp a$　　　　　　حکم : $c \perp b$



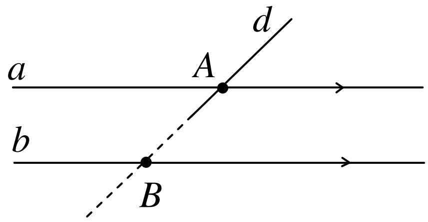
اثبات:گیریم‌که $a \parallel b$ و $c \perp a$ است ولی c بر b عمود نباشد.(به روش برهان خلف) پس از نقطه ی B خط دیگری مانند d چنان رسم می‌کنیم که بر c عمود باشد طبق قضیه ی قبل d نیز موازی a است ، یعنی از نقطه ی B دو خط موازی a رسم شده است و این ممکن نیست و لذا $c \perp b$

***

قضیه ی ۱۰) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

خط d خط b را قطع می کند. : حکم　　　　دو خط a و b موازیند و دو خط d و a متقاطعند. : فرض

اثبات : اگر خط d خط b را قطع نکند. پس با آن موازی است (به روش برهان خلف) و لذا از نقطه ی B دو خط موازی a رسم شده است و این ممکن نیست.

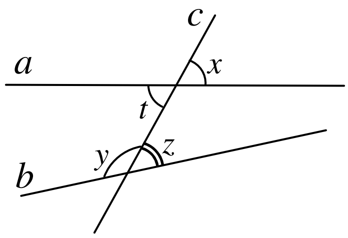


***

☑ خط‌های مورب

تعریف : هرگاه دو خط را خط سومی قطع کند، این خط را مورب (قاطع) گویند.

همچنین :

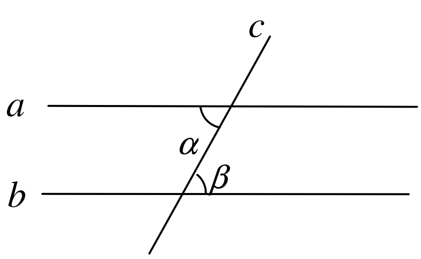


۱- هر دو زاویه که در یک طرف خط مورب واقع باشند را متقابل گویند. مانند زاویه های (z و x) یا زاویه های (z و t)

۲- هر دو زاویه که در دو طرف خط مورب واقع باشند را متبادل گویند. مانند زاویه های (t و x) یا زاویه های (z و x)

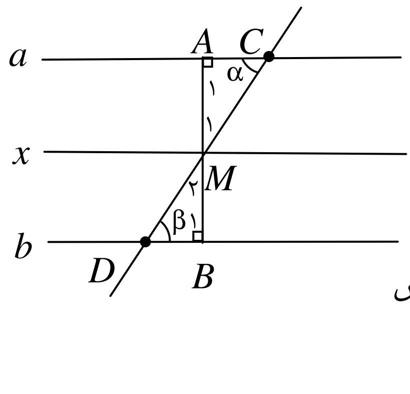
۳- هر زاویه که بین دو خط قطع شده قرار گرفته باشد داخلی و در غیر این صورت خارجی گویند. برای مثال زاویه ی x خارجی و زاویه های t و z و y داخلی می باشند.

قضیه ی ۱۱) (قضیه ی خطوط موازی):اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کند، زاویه‌های متبادل داخلی مساوی به دست می‌آید.



فرض : $a \parallel b$ حکم : $\angle\alpha = \angle\beta$

اثبات : پاره‌خط AM که بر دو خط موازی x و a عمود است را به اندازه خودش از طرف نقطه ی M امتداد می‌دهیم تا نقطه ی B به دست آید. از نقطه ی B خطی مانند b موازی a رسم می کنیم و قاطع CD را طوری رسم می‌کنیم که از نقطه ی M بگذرد. واضح است که $AB \perp b$ پس می‌توان نوشت:

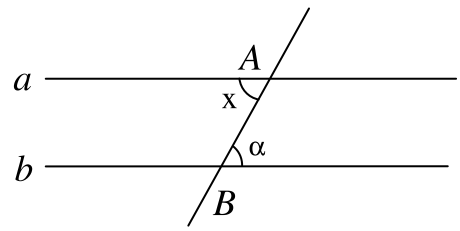


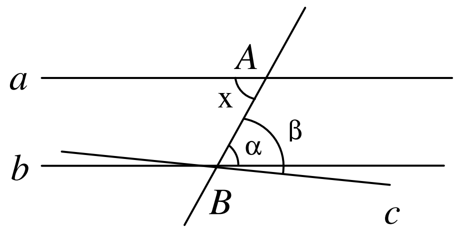
$$\left.\begin{array}{c} \angle A_1 = \angle B_1 = 90^\circ \\ AM = BM \\ \angle M_1 = \angle M_1 \ \text{متقابل به رأس} \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{AMC} \underset{(\text{ز ض ز})}{\cong} \overset{\Delta}{BMD} \rightarrow \angle\alpha = \angle\beta$$

***

قضیه ی ۱۲) اگر دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویه ی متبادل داخلی متساوی باشند، آن دو خط موازی یکدیگرند.

فرض : $\angle x = \angle \alpha$ حکم : $a \parallel b$





اثبات (به روش برهان خلف) : گیریم که $a \parallel b$ نباشد. پس از نقطه ی B خط c را موازی a رسم می‌کنیم و لذا می‌توان نوشت: $\angle x = \angle \beta$

از طرفی طبق فرض داشتیم $\angle x = \angle \alpha$ لذا $\angle \alpha = \angle \beta$ این وقتی ممکن است که خط c باید روی b واقع باشد. پس $a \parallel b$

***

نتیجه : اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، در این صورت :

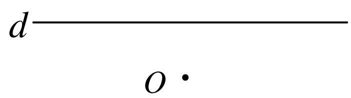
۱- تمام زاویه‌های حاده[2] با یکدیگر مساویند.

۲- تمام زاویه‌های منفرجه[3] با یکدیگر مساویند.

۳- یک زاویه منفرجه و یک زاویه حاده مکمل یکدیگرند.

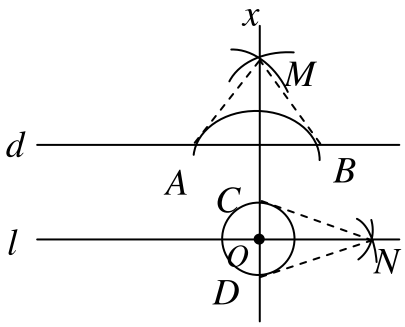
***

☑ رسم خط موازی با خط دیگر از یک نقطه ی خارج آن به کمک خط‌کش و پرگار



[2] . هر زاویه که اندازه ی آن کمتر از ۹۰ درجه باشد را حاده (تند) می نامند.

[3] . هر زاویه که اندازه ی آن بین ۹۰ و ۱۸۰ درجه باشد را منفرجه یا (باز) می نامند.



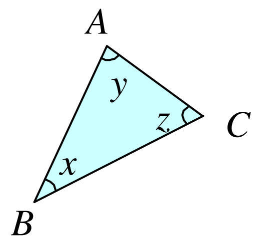
به مرکز O و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه ی B و A قطع کند. خط x را طوری رسم می‌کنیم که عمود منصف AB باشد. حال از نقطه ی O دایره‌ای رسم می‌کنیم که خط x را در نقاط D و C قطع کند. سپس خط l را طوری رسم می‌کنیم که عمود منصف CD باشد.

خط l موازی d است (چرا؟)

$$\left.\begin{array}{l} d \perp x \\ l \perp x \end{array}\right\} \rightarrow l \parallel d$$

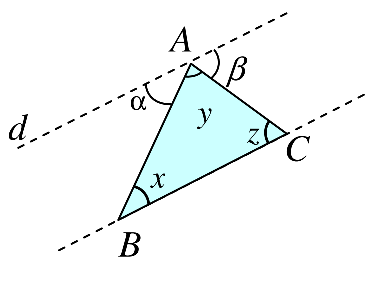
***

قضیه ی ۱۳) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.



حکم : $\angle x + \angle y + \angle z = ۱۸۰^\circ$

اثبات : از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم.آنگاه داریم :



$d \parallel BC \rightarrow \angle x = \angle \alpha$ و AB مورب

$d \parallel BC \rightarrow \angle z = \angle \beta$ و AC مورب

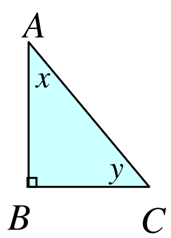
از طرفی بنا بر اصل زاویه نیم صفحه می‌توان نوشت:

$$\angle \alpha + \angle y + \angle \beta = ۱۸۰^\circ \rightarrow \angle x + \angle y + \angle z = ۱۸۰^\circ$$

***

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه دو زاویه ی حاده ، متمم یکدیگرند.

$$\angle x + \angle y = ۹۰^\circ$$



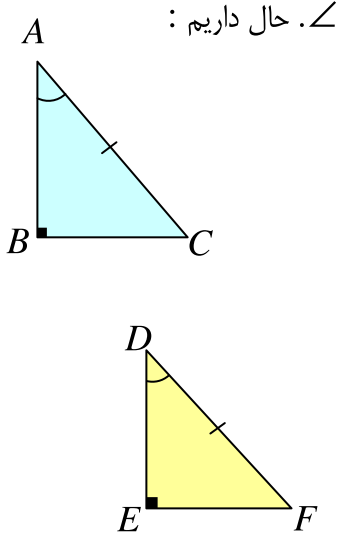
***

قضیه ی۱۴) هرگاه وتر و یک زاویه ی حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویه ی حاده از مثلث قائم‌الزاویه ی دیگری مساوی باشند،آن دو مثلث همنهشت هستند.

فرض : $AC = DF$ و $\angle A = \angle D$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$

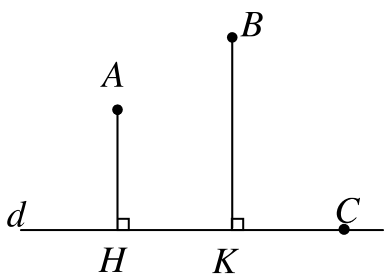
اثبات : طبق قضیه ی قبل چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث °۱۸۰ است، پس $\angle C = \angle F$. حال داریم :



$$\left.\begin{array}{r}\angle C = \angle F \\ AC = DF \\ \angle A = \angle D\end{array}\right\} \to \underset{\text{(ز ض ز)}}{\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}}$$

***

☑ فاصله ی نقطه تا خط



تعریف : فاصله ی نقطه ی خارج یک خط تا همان خط، برابر اندازه ی پاره‌خطی تعریف می‌کنند که از نقطه ی مورد نظر بر خط عمود باشد.

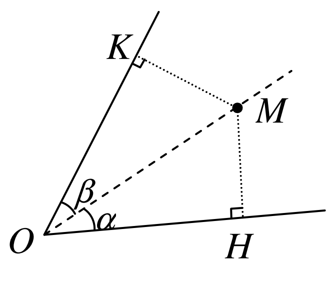
تذکر : فاصله ی نقطه ی روی خط تا همان خط برابر صفر است.

***

قضیه ی ۱۵) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

حکم : $MK = MH$

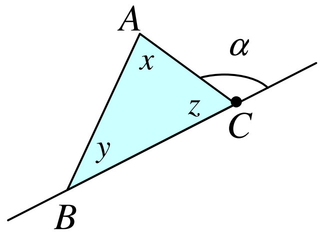
اثبات : دو مثلث $\overset{\Delta}{OHM}$ و $\overset{\Delta}{OKM}$ قائم‌الزاویه هستند. پس :



$$\left.\begin{array}{r}\angle \alpha = \angle \beta \\ \text{وتر مشترک} \quad OM = OM\end{array}\right\} \to \underset{\text{(وتر و یک زاویه ی حاده)}}{\overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK}} \to MH = MK$$

☑ زاویه ی خارجی مثلث

تعریف : زاویه ی خارجی زاویه‌ای است که بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر مثلث باشد. مانند زاویه ی α در شکل زیر



بدیهی است که هر زاویه ی خارجی و زاویه ی داخلی مجاور آن، مکمل یکدیگرند.

$$\angle z + \angle \alpha = ۱۸۰^\circ$$

***

قضیه ی ۱۶) در هر مثلث هر زاویه ی خارجی با مجموع دو زاویه ی داخلی غیرمجاور آن برابر است.

حکم : $\angle \alpha = \angle x + \angle y$

اثبات : با توجه به شکل فوق داریم :

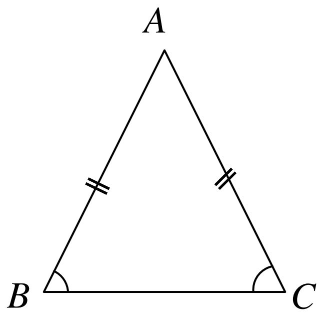
$$\left.\begin{array}{r} \angle z + \angle \alpha = ۱۸۰^\circ \\ \angle x + \angle y + \angle z = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \to \angle z + \angle \alpha = \angle x + \angle y + \angle z \to \angle \alpha = \angle x + \angle y$$

***

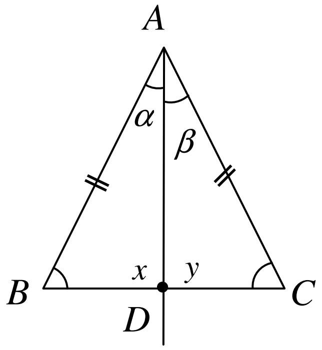
قضیه ی ۱۷) در هر مثلث متساوی‌الساقین، زاویه های روبرو به اضلاع مساوی با یکدیگر مساویند.

فرض : $AB = AC$

حکم : $\angle B = \angle C$

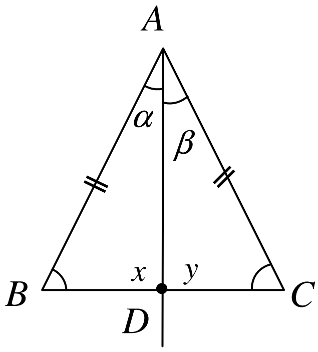


اثبات : از رأس مثلث (رأس A) خطی چنان رسم می‌کنیم که نیمساز زاویه ی متناظر آن (زاویه ی A) باشد و قاعده ی مثلث (ضلع BC) را در نقطه ی D قطع کند. در این صورت داریم :



$$\left.\begin{array}{r} AB = AC \\ \angle \alpha = \angle \beta \\ \text{مشترک} \quad AD = AD \end{array}\right\} \to \underset{(\text{ض ز ض})}{\overset{\Delta}{AMC} \cong \overset{\Delta}{BMD}} \to \angle B = \angle C$$

قضیه ی ۱۸) هر مثلث که دو زاویه ی آن مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.



فرض : $\angle B = \angle C$

حکم : $AB = AC$

اثبات : از رأس A خطی چنان رسم می‌کنیم که نیمساز زاویه A باشد و ضلع BC را در نقطه ی D قطع کند. چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است. پس $\angle x = \angle y$

حال می‌توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} \angle\alpha = \angle\beta \\ AD = AD \quad \text{مشترک} \\ \angle x = \angle y \end{array}\right\} \rightarrow \underset{\text{(ز ض ز)}}{\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}} \rightarrow AB = AC$$

***