فصل دوم

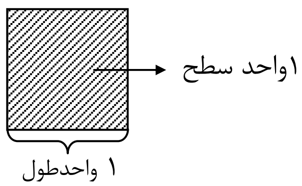
مساحت - رابطه ی فیثاغورس

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی
شهرستان باوی

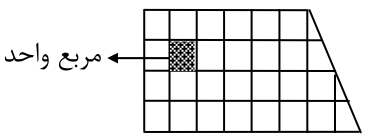
www.mathtower.org

☑ سطح و واحد آن

تعریف : هر مربع که اندازه ی طول ضلع آن یک واحد طول باشد را مربع واحد (واحد سطح) می‌نامند.



معمولاً مساحت هر شکل با تقسیم آن به تعدادی مربع واحد اندازه‌گیری می‌شود. به عبارت دیگر مساحت یک ناحیه، مقدار فضایی از صفحه است که آن ناحیه اشغال می‌کند.

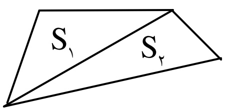


***

☑ اصول مساحت

۱- مساحت هر شکل در صفحه یک عدد حقیقی مثبت است.

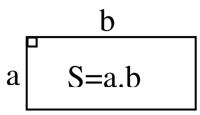
۲- اگر یک شکل از بخش‌های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر مجموع مساحت‌های آن بخش‌ها است.



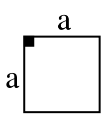
$S_t = S_1 + S_2$ (اصل مجموع مساحت‌ها)

۳- شکل‌های همنهشت مساحت‌های مساوی دارند.

۴- مساحت مستطیل برابر حاصل ضرب طول در عرض آن است.

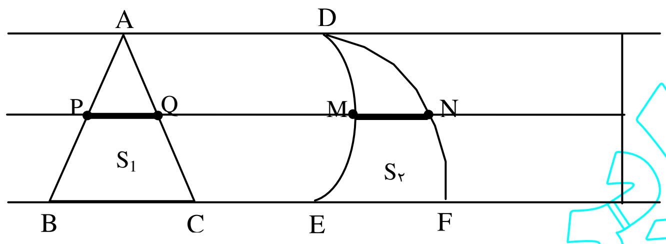


نتیجه : مساحت هر مربع برابر مجذور اندازه یک ضلع آن است.



$S = a^2$

۵- هرگاه قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند و هر خط که موازی قاعده‌های دو شکل رسم شود در آنها قطعه‌های با طول‌های مساوی ایجاد کند مساحت آن دو شکل برابر است. (اصل کاوالیری در مساحت)



$$PQ = MN \to S_۱ = S_۲$$

نتیجه : از اصل کاوالیری برابری قاعده‌ها و برابری ارتفاع‌های دو شکل نیر نتیجه می‌شود.

تمرین : مساحت مستطیلی به طول ۹ برابر مساحت مربعی به ضلع ۱۲ است. عرض مستطیل را بیابید.

حل : اگر عرض مستطیل x باشد. در این صورت داریم.

مساحت مربع = مساحت مستطیل

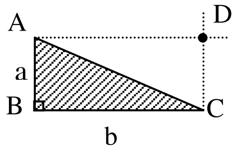
$$۹x = (۱۲)^۲$$

$$\to ۹x = ۱۴۴ \to x = ۱۶$$

***

☑ مساحت اشکال هندسی مهم

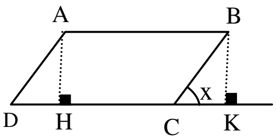
قضیه ی ۳۵) مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه آن است.



اثبات : ابتدا از رأس A خطی موازی ضلع BC و از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌بینیم واضح است که چهارضلعی حاصل مستطیل است و از دو مثلث همنهشت و مجزای ABC و ADC تشکیل شده است لذا

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times \text{مساحت مستطیل} = \frac{۱}{۲} a.b$$

قضیه ی ۳۶) مساحت هر متوازی‌الاضلاع ، با حاصل ضرب اندازه ی قاعده در ارتفاع نظیر آن برابر است.



اثبات : از رأس B خطی بر امتداد ضلع DC عمود می‌کنیم آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel DC \text{ و } DC\text{مورب} \rightarrow \hat{D} = \hat{x} \\ AD = BC \end{array}\right\} \underset{\text{(وتر و یک زاویه حاده)}}{\rightarrow \overset{\Delta}{ADH} \cong \overset{\Delta}{BCK}} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADH}} = S_{\overset{\Delta}{BCK}}$$

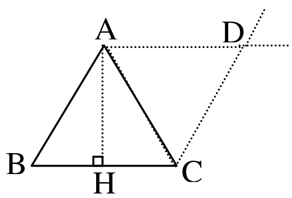
از طرفی

مساحت چهارضلعی $ABCH$ + مساحت مثلث ADH = مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$

مساحت چهارضلعی $ABCH$ + مساحت مثلث BCK =

$= ABKH$ مساحت مستطیل $= AB.AH = AH.DC$.

قضیه ی ۳۷) مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده نظیر آن است.



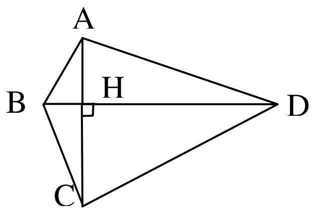
اثبات : از رأس A خطی موازی ضلع BC و از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم پس چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است و از دو مثلث همنهشت و مجزا تشکیل شده است.

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ AC = AC \text{ مشترک} \\ BC = AD \end{array}\right\} \underset{\text{(ض‌ض‌ض)}}{\rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}}$$

لذا

$$ABC \text{ مساحت مثلث} = \text{مساحت متوازی‌الاضلاع نصف} = \frac{۱}{۲} AH \times BC$$

قضیه ی ۳۸) اگر در یک چهارضلعی دو قطر بر هم عمود باشند، مساحت آن چهارضلعی برابر نصف حاصل ضرب قطرهای آن است.



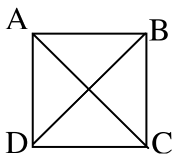
اثبات : با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$S_{ABCD}=S_{\overset{\Delta}{ABD}}+S_{\overset{\Delta}{CBD}}$$
$$=\frac{۱}{۲}AH.BD+\frac{۱}{۲}HC.BD$$
$$=\frac{۱}{۲}BD(\underbrace{AH+HC}_{AC})=\frac{۱}{۲}BD\times AC$$

نتیجه :

۱) مساحت هر کایت و هر لوزی با نصف حاصل ضرب قطرهای آن برابر است چون قطرهای آنها بر هم عمودند.

۲) مساحت هر مربع با نصف مجذور اندازه قطر آن برابر است.



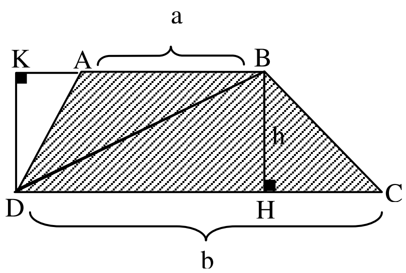
$$AC=BD=r$$
$$AC\perp BD\rightarrow S=\frac{۱}{۲}AC.BD$$
$$=\frac{۱}{۲}r.r=\frac{۱}{۲}r^{۲}$$

قضیه ی ۳۹) مساحت ذوزنقه برابر نصف حاصل ضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع آن برابر است.

اثبات : چون $AB\parallel DC$ پس بدیهی است که $DK=BH=h$

پس

$$\text{مساحت ذوزنقه } ABCD = S_{\overset{\Delta}{ABD}} + S_{\overset{\Delta}{BDC}}$$

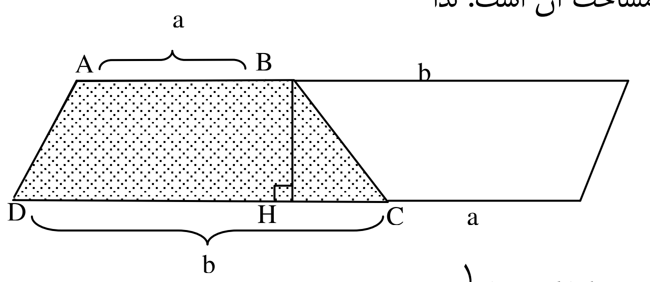


$$= \frac{۱}{۲} DK.AB + \frac{۱}{۲} BH.DC$$

$$= \frac{۱}{۲} h.a + \frac{۱}{۲} h.b$$

$$= \frac{۱}{۲} (a+b)\,h$$

روش دوم : قاعده ی AB را از طرف نقطه ی B به اندازه ی DC و قاعده ی DC را از طرف نقطه ی C به اندازه ی AB امتداد می دهیم. بدیهی است که در چهار ضلعی بدست آمده دو ضلع مقابل موازی و مساویند. پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع می باشد و مساحت ذوزنقه نصف مساحت آن است. لذا

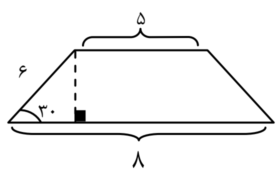


$$S = \frac{۱}{۲}(a+b)h$$

***

تمرین

۱- مساحت ذوزنقه شکل مقابل را حساب کنید.



۲- ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر برابر است.

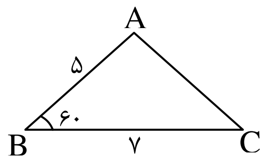
۳- احکام زیر را ثابت کنید.

الف- اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت ارتفاع‌های متناظر آنها است.

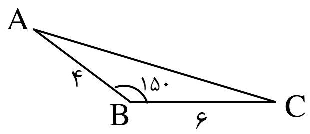
ب- اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌های متناظر آنها است.

۴- ثابت کنید که مساحت هر مثلث با نصف حاصل ضرب هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع برابر است.

۵- مساحت مثلث‌های زیر را حساب کنید.



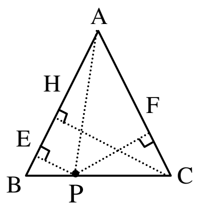
(الف)



(ب)

۶- مساحت مربعی را حساب کنید که طول قطر آن $۲\sqrt{۷}$ باشد.

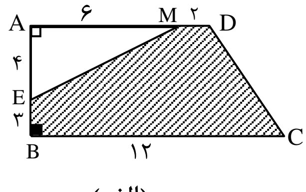
۷- ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده ی یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن با ارتفاع وارد بر یک ساق آن برابر است.



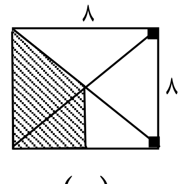
$$PE + PF = CH$$

۸- مساحت مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ۴۰ است، اندازه ی هر کدام از ساقها را پیدا کنید.

۹- در هر مورد مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.

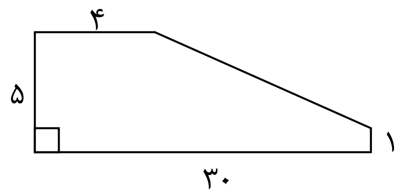


(الف)



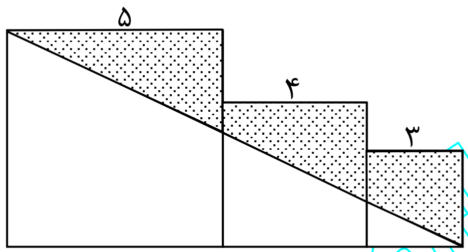
(ب)

۱۰ – مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



۱۱– مساحت مربعی به قطر $6\sqrt{2}$ با مساحت مستطیلی به طول ۹ برابر است. اندازه ی عرض مستطیل را بدست آورید.

۱۲ – با توجه به شکل مقابل مساحت قسمت رنگی را به دست آورید. (هر سه چهارضلعی مربع هستند.)



کار تحقیقی: چگونه می‌توان مساحت مثلث را فقط با داشتن اندازه ی سه ضلع آن محاسبه نمود؟

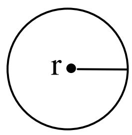
***

☑ مساحت و محیط دایره

مساحت و محیط هر دایره به شعاع r را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.

مساحت $S = \pi r^{2}$

محیط $P = 2\pi r$



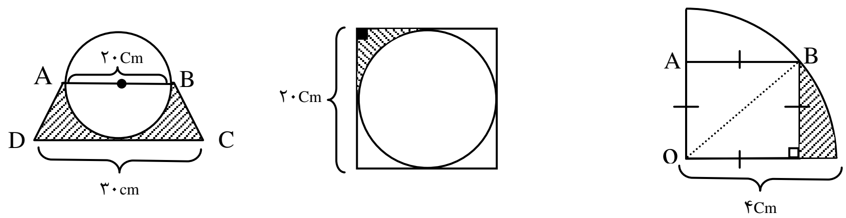
این دو رابطه را اینجا بدون اثبات می‌پذیریم.

***

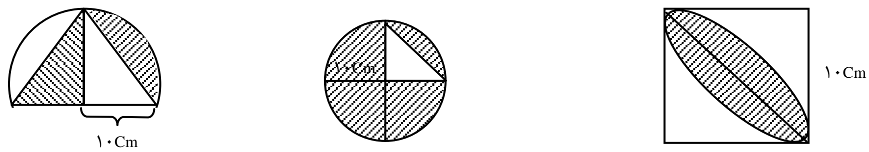
تمرین

۱۳: مساحت و محیط دایره‌ای را حساب کنید که اندازه قطر آن ۱۰ سانتی‌متر باشد.

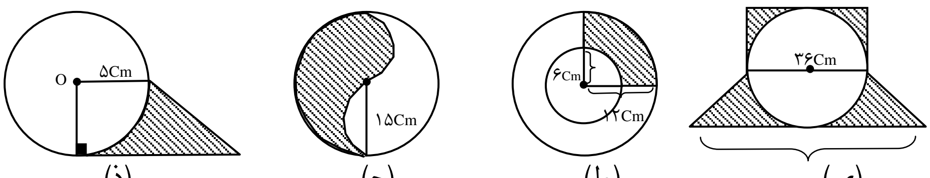
۱۴: با توجه به شکل‌های زیر در هر مورد مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.



(ج) (ب) (الف)

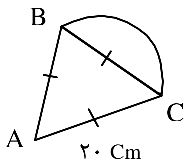


(و) (هـ) (د)

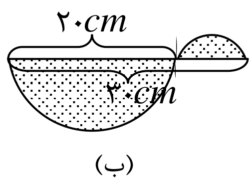


(ی) (ط) (ح) (ذ)

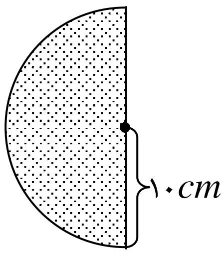
۱۵: در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و BC قطر نیم دایره است محیط و مساحت شکل را محاسبه کنید.



۱۶ : مساحت و محیط هر یک از شکل های زیر را حساب کنید.



(ب)



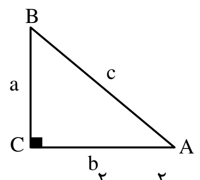
(الف)

☑ قضیه ی فیثاغورس و کاربردهایی از آن

در ادامه یکی از قضیه های اساسی در مورد مثلث قائم الزاویه را بیان و اثبات می کنیم و در نهایت کابرد هایی برای آن معرفی می نماییم.

قضیه ی ۴۰ (قضیه ی فیثاغورس) :

در هر مثلث قائم‌الزاویه مجموع وتر با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر آن برابر است.

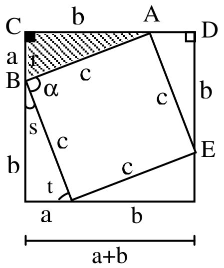


حکم: $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$

اثبات :

مرحله ی ۱) مربعی به ضلع $a+b$ رسم می‌کنیم سپس در این مربع چهار مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع b و a تشکیل می‌دهیم.

مرحله ی ۲) بنا به حالت (ض‌زض) این چهار مثلث با همدیگر و با مثلث اصلی همنهشت هستند.



$$\left.\begin{array}{l} BC = AD \\ \hat{C} = \hat{D} = ۹۰^{\circ} \\ AC = DE \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADE}$$

(ض‌زض)

پس دارای وترهای برابر c می‌باشند.

مرحله ی ۳) چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است. زیرا

الف- چهارضلع مساوی دارد.

ب- یک زاویه قائمه دارد.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{S} + \hat{t} = ۹۰^{\circ} \\ \hat{r} = \hat{t} \end{array}\right\} \rightarrow \hat{S} + \hat{r} = ۹۰^{\circ} \xrightarrow[\text{(اصل زاویه نیم صفحه)}]{\hat{r}+\hat{\alpha}+\hat{S}=۱۸۰^{\circ}} \hat{\alpha} = ۹۰^{\circ}$$

مرحله ی ۴) طبق اصل مجموع مساحت‌ها می‌توان نوشت:

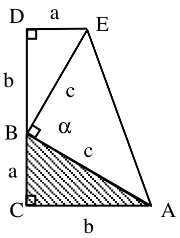
مساحت ۴ مثلث همنهشت + مساحت مربع کوچک = مساحت مربع بزرگ

$$(a+b)^{۲} = c^{۲} + ۴(\frac{۱}{۲}a.b)$$

$$\rightarrow a^{۲} + ۲\cancel{ab} + b^{۲} = c^{۲} + ۲\cancel{ab} \rightarrow a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$$

تذکر ۱ : می‌توان قضیه فیثاغورس را به روش زیر نیز ثابت کرد :

با توجه به شکل مقابل واضح است که چهارضلعی ذوزنقه است و مساحت آن با مجموع مساحت‌های مثلثهای تشکیل دهنده آن مساوی است از طرفی مانند اثبات قبلی زاویه $\hat{\alpha}$ قائمه است لذا می‌توان نوشت



مجموع مساحت‌های سه مثلث = مساحت ذوزنقه

$$\frac{۱}{۲}(a+b)(a+b) = \frac{۱}{۲}a.b + \frac{۱}{۲}c.c + \frac{۱}{۲}a.b$$

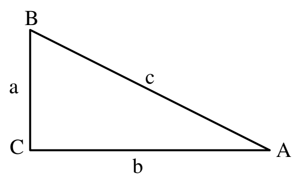
$$\frac{۱}{۲}(a+b)^۲ = \frac{۱}{۲}(ab + c^۲ + ab)$$

$$a^۲ + \cancel{۲ab} + b^۲ = \cancel{۲ab} + c^۲$$

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

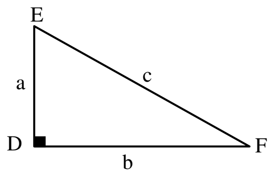
قضیه ی ۴۱ (عکس قضیه ی فیثاغورس) :

اگر در مثلثی مربع بزرگترین ضلع با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر برابر باشد آن مثلث قائم‌الزاویه و زاویه روبرو به ضلع بزرگتر قائمه است.



فرض : $a^۲ + b^۲ = c^۲$

اثبات : مثلثی قائم الزاویه به نام DEF طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه ی قائمه ی آن b و a باشند.آنگاه داریم



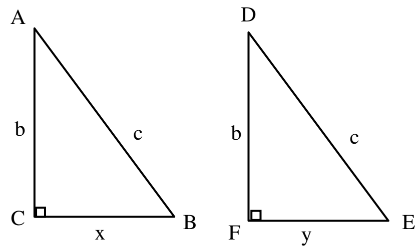
$$a^۲ + b^۲ = x^۲$$

و با مقایسه با فرض قضیه می‌توان نوشت

$$x^۲ = c^۲ \rightarrow x = a$$

لذا مثلث‌های ABC و DEF بنا به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند و چون زاویه D قائمه است پس زاویه متناظر آن یعنی زاویه C نیز قائمه است.

قضیه ی ۴۲) هرگاه وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگری برابر باشند آن دو مثلث همنهشت هستند.



$AC = DF$ و $AB = DE$: فرض

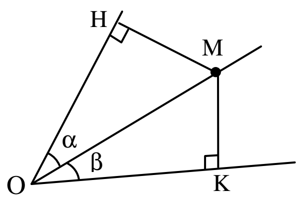
$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$: حکم

اثبات : چون هر دو مثلث قائم‌الزاویه هستند پس رابطه فیثاغورس را برای هر مثلث می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC}: x^{۲} + b^{۲} = c^{۲} \\ \overset{\Delta}{DEF}: y^{۲} + b^{۲} = c^{۲} \end{array}\right\} \to x^{۲} = y^{۲} \to x = y$$

و لذا دو مثلث به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند.

قضیه ی ۴۳) هرگاه نقطه‌ای از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.



$MH = MK$: فرض

$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$: حکم

اثبات : دو مثلث $\overset{\Delta}{OMH}$ و $\overset{\Delta}{OMK}$ قائم‌الزاویه هستند پس

$$\left.\begin{array}{l} MH = MK \\ \text{مشترک} \quad OM = OM \end{array}\right\} \to \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK} \to \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

(وتر و یک ضلع)

***

☑ چندضلعی منتظم

تعریف : هر چند ضلعی را منتظم گویند، هرگاه تمام اضلاع آن برابر و تمام زاویه‌های آن نیز برابر باشند.

مثلاً : مثلث متساوی‌الاضلاع که سه ضلعی منتظم و مربع که چهارضلعی منتظم است.

نتیجه : اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$ درجه است.

***

تمرین

۱۷- طول قطر مربعی به ضلع a را حساب کنید

۱۸- اندازه ی هر زاویه داخلی یک ۱۰ ضلعی منتظم را به دست آورید.

۱۹- الف- ثابت کنید که مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

ب- طول ارتفاع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را حساب کنید که طول ضلع آن ۱۰ cm باشد.

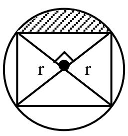
نتیجه : اندازه ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

۲۰- ثابت کنید که هر شش ضلعی منتظم به طول ضلع a توسط قطرهای آن به شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع α تبدیل می‌شود.

۲۱- الف- ثابت کنید که مساحت هر شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

ب ـ مساحت یک شش ضلعی منتظم را حساب کنید که طول ضلع آن ۱۰ cm باشد.

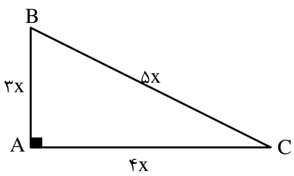
۲۲- مطابق شکل مقابل مربعی در دایره‌ای به شعاع r محاط شده است.



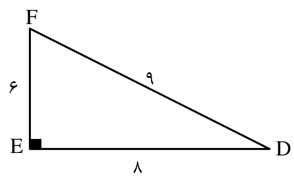
الف – اندازه ضلع مربع را برحسب r به دست آورید.

ب – مساحت قسمت رنگی را برحسب r به دست آورید.

۲۳- کدامیک از مثلث‌های زیر قائم الزاویه است، زاویه قائمه آن را پیدا کنید.

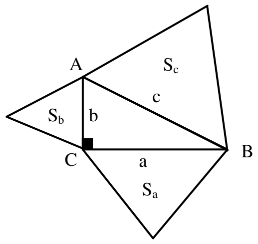


(الف)

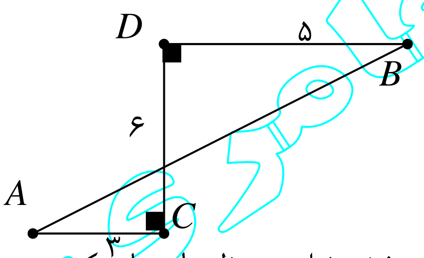


(ب)

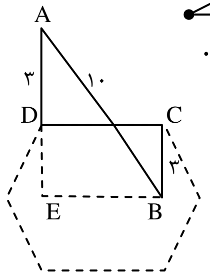
۲۴- مطابق شکل روی هر ضلع مثلث قائم الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث متساوی الاضلاعی ساخته شده است، چه رابطه‌ای بین مساحت‌های این سه مثلث وجود دارد.



۲۵- با توجه به شکل مقابل اندازه ی پاره خط AB را تعیین کنید.

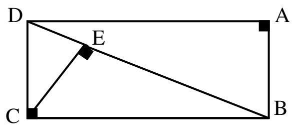


۲۶- با توجه به شکل مقابل مساحت شش ضلعی منتظم را حساب کنید.



$AB = ۱۰$
$AD = ۵$
$BC = ۳$

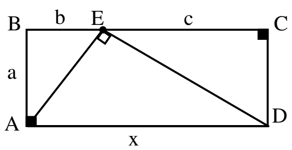
۲۷- در شکل مقابل ثابت کنید که



$$AD^۲ - AB^۲ = BE^۲ - DE^۲$$

۲۸- نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ باشد طول وتر آن چقدر است؟

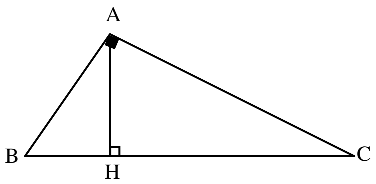
۲۹- با توجه به شکل مقابل ثابت کنید که



الف - $x^۲ = ۲a^۲ + b^۲ + c^۲$

ب - $a^{۲} = bc$

۳۰- با توجه به شکل مقابل ثابت کنید که



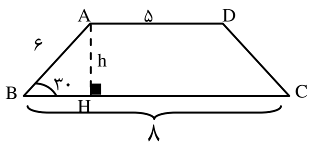
الف - $AH^{۲} = BH.CH$

ب - $AB^{۲} = BH.BC$

***

پاسخ تمرین‌های فصل ۲

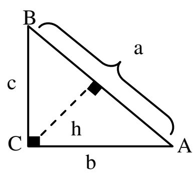
-۱



$\overset{\Delta}{ABH}: h = \frac{AB}{۲} = ۳$

$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(۵+۸)\times ۳ = ۱۹/۵$ واحد سطح

-۲



$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{۲}bc \\ S = \frac{۱}{۲}ah \end{array}\right\} \rightarrow \frac{۱}{۲}bc = \frac{۱}{۲}ah \rightarrow bc = ah$$

-۳

	قاعده	ارتفاع	مساحت
مثلث اول	a	h	$S_{۱}$
مثلث دوم	b	k	$S_{۲}$

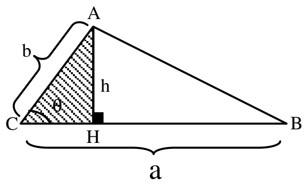
الف- $a = b$

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\cancel{a}h}{\frac{۱}{۲}\cancel{b}k}=\frac{h}{k}$$

ب- $h=k$

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{\frac{۱}{۲}a\cancel{h}}{\frac{۱}{۲}b\cancel{k}}=\frac{a}{b}$$

۴-



$$\overset{\Delta}{ACH}:\operatorname{Sin}\theta=\frac{AH}{AC}$$

$$\operatorname{Sin}\theta=\frac{h}{b}\rightarrow h=b\operatorname{Sin}\theta$$

$$S=\frac{۱}{۲}ah=\frac{۱}{۲}a\,(b\operatorname{Sin}\theta)=\frac{۱}{۲}ab\operatorname{Sin}\theta$$

۵- الف)

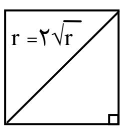
$$S=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۶\times \operatorname{Sin}۶۰=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱۵}{۲}\sqrt{۳}$$ واحد سطح

ب)

$$\operatorname{Sin}۱۵۰=\operatorname{Sin}(\pi-۳۰)=\operatorname{Sin}۳۰=\frac{۱}{۲}$$

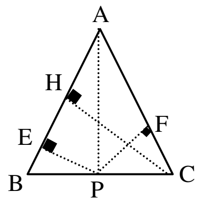
$$S=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times \operatorname{Sin}(۱۵۰)=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times\frac{۱}{۲}=۶$$ واحد سطح

۶-



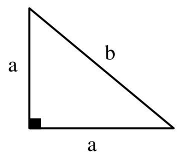
$$S=\frac{۱}{۲}r^۲=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۷})^۲=۴\times ۷=۲۸$$ واحد سطح

۷-



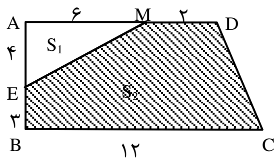
$$AB = AC$$
$$S_t = S_{ABP} + S_{ACP}$$
$$\frac{۱}{۲}CH.AB = \frac{۱}{۲}PE.AB + \frac{۱}{۲}PF.\overset{AB}{\cancel{AC}}$$
$$\frac{۱}{۲}CH.A\cancel{B} = \frac{۱}{۲}A\cancel{B}\,(PE+PF)$$
$$CH = PE + PF$$

۸-



$$S = \frac{۱}{۲}a^{۲} = ۴۰ \rightarrow a^{۲} = ۸۰ \rightarrow a = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

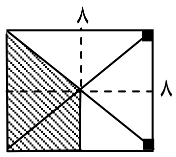
۹- الف)



$$S_۲ = S_t - S_۱$$

واحد سطح $S_۲ = \frac{۱}{۲}(۸+۱۲)(۷) - \frac{۱}{۲}(۴)(۶) = ۷۰ - ۱۲ = ۵۸$

ب)



واحد سطح $S = (\frac{S_t}{۸}) \times ۳ = \frac{۸ \times \cancel{۸}}{\cancel{۸}} \times ۳ = ۲۴$

۱۰ -

۱۱-

۱۲ -

۱۳- قطر دایره $d = ۱۰$ و شعاع دایره $۵ = r = \frac{d}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$

واحد سطح $S = \pi r^{۲} = \pi (۵)^{۲} = ۲۵\pi$ مساحت

واحد طول $P = ۲\pi r = ۲\pi(۵) = ۱۰\pi$ محیط

۱۴- الف) نصف مساحت دایره - مساحت لوزی = S

$$S=\frac{۱}{۲}(۲۰+۳۰)(۱۰)-\frac{۱}{۲}\pi(۱۰)^۲$$
$$=۲۵۰-۵۰\pi \text{cm}^۲$$

ب)

$$S=\frac{\text{مساحت مربع} - \text{مساحت دایره}}{۴}=\frac{(۲۰)^۲-\pi(۱۰)^۲}{۴}$$
$$=\frac{۴۰۰-۱۰۰\pi}{۴}=۱۰۰-۲۵\pi \ \text{cm}^۲$$

ج)

$$S=\frac{\text{مساحت ربع دایره} - \text{مساحت مربع}}{۲}=\frac{\frac{۱}{۴}\pi r^۲-\frac{۱}{۲}r^۲}{۲}=\frac{۱}{۸}\pi r^۲-\frac{۱}{۴}r^۲$$
$$S=\frac{۱}{۸}\pi(۴)^۲-\frac{۱}{۴}(۴)^۲=۲\pi-۴ \quad cm^۲$$

د)

$$S=\frac{\text{مساحت نیم دایره}}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\pi r^۲}{۲}=\frac{۱}{۴}\pi r^۲=\frac{۱}{۴}\pi(۱۰)^۲=۲۵\pi$$

هـ)

S = مساحت ربع دایره - مساحت مثلث

$$S=\frac{۱}{۴}\pi r^۲-\frac{۱}{۲}r^۲=\frac{۱}{۴}\pi(۱۰)^۲-\frac{۱}{۲}(۱۰)^۲=۲۵\pi-۵۰ \ \text{cm}^۲$$

و)

S = ۲(مساحت ربع دایره) - مساحت مربع

$$S=۲(\frac{۱}{۴}\pi r^۲)-r^۲=\frac{۱}{۲}\pi(۱۰)^۲-۱۰^۲=۵۰\pi-۱۰۰ \ \text{cm}^۲$$

ز)

S = مساحت ربع دایره - مساحت ذوزنقه

$$S=\frac{۱}{۲}(۵+۷)(۵)-\frac{۱}{۴}\pi(۵)^{۲}$$
$$=۳۰-\frac{۲۵}{۴}\pi=\frac{۱۲۰-۲۵\pi}{۴}\,cm^{۲}$$

ح) S = مساحت نیم دایره $=\frac{۱}{۲}\pi r^{۲}=\frac{۱}{۲}\pi(۱۵)^{۲}=\frac{۲۲۵}{۲}\pi\ \ cm^{۲}$

ط) $S=\dfrac{\text{مساحت دایره بزرگ} - \text{مساحت دایره‌کوچک}}{۴}$

$$S=\frac{\pi(۱۲)^{۲}-\pi(۶)^{۲}}{۴}=\frac{۱۴۴\pi-۳۶\pi}{۴}=۳۶\pi-۹\pi=۲۷\pi\ \ cm^{۲}$$

ی)

S = (مساحت مستطیل + مساحت ذوزنقه) − مساحت دایره

$$S=[(۱۸\times۳۶)+\frac{۱}{۲}(۳۶+۴۸)(۱۸)]-\pi(۱۸)^{۲}$$
$$=(۶۴۸+۷۵۶)-۳۲۴\pi$$
$$=۱۴۰۴-۳۲۴\pi\ \ cm^{۲}$$

۱۵- طول ضلع مثلث = a مساحت

S = مساحت نیم دایره + مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع

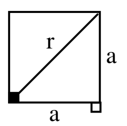
$$=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}-\frac{۱}{۲}\pi(\frac{a}{۲})^{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times(۲۰)^{۲}-\frac{۱}{۲}\pi(\frac{۲۰}{۲})^{۲}=۱۰۰\sqrt{۳}-۵۰\pi\ cm^{۲}$$

محیط نیم دایره + طول دو ضلع مثلث = P محیط

$$P=۲a+۲\pi(\frac{a}{۲})=۲(۲۰)+\pi(۲۰)=۴۰+۲۰\pi\ \ cm^{۲}$$

۱۶ :

۱۷-



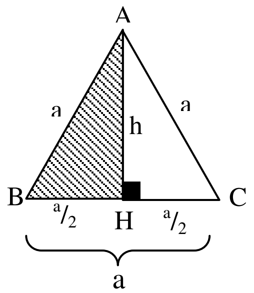
$$r^{۲}=a^{۲}+a^{۲}=۲a^{۲}$$
$$r=\sqrt{۲}a$$

۱۸–

$$n=۱۰$$

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}=\frac{(۱۰-۲)(۱۸۰)}{۱۰}=۱۴۴^\circ$$

۱۹– در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع وارد بر هر ضلع میانه وارد بر آن نیز می‌باشد پس



الف)

$$BC=a\to BH=HC=\frac{a}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABH}:(\frac{a}{۲})^۲+h^۲=a^۲$$

$$h^۲=a^۲-\frac{a^۲}{۴}=\frac{۳a^۲}{۴}$$

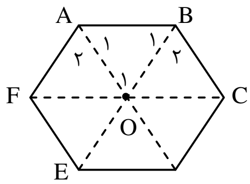
$$h=\sqrt{\frac{۳a^۲}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$ اندازه ارتفاع

$$S=\frac{۱}{۲}ah=\frac{۱}{۲}a\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

ب)

$$h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۰=۵\sqrt{۳}\,cm$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۰)^۲=۲۵\sqrt{۳}\,cm^۲$$



۲۰– بدیهی است که هر قطر شش ضلعی منتظم محور تقارن آن است پس BC نیمساز زاویه B است. از طرفی اندازه هر زاویه شش ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{۶}=۴\times ۳۰=۱۲۰^\circ$ پس $\hat{B}_۱=۶۰^\circ$

به همین ترتیب نشان داده می‌شود که $\hat{A}_۱=۶۰^\circ$ پس $\hat{O}_۱=۶۰^\circ$ یعنی مثلث AOB سه زاویه مساوی دارد لذا متساوی الاضلاع است.

۲۱– الف) طبق تمرین قبل واضح است که هر شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a تشکیل شده است پس

$$S = ۶ \times S_{\overset{\Delta}{AOB}} = ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^{۲}$$

ب) $S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(۱۰)^{۲} = ۱۵۰\sqrt{۳}\ cm^{۲}$

۲۲- الف) $a^{۲} = r^{۲} + r^{۲} = ۲r^{۲}$

$a = \sqrt{۲}r$

ب) $S = \frac{\text{مساحت دایره} - \text{مساحت مربع}}{۴} = \frac{\pi r^{۲} - a^{۲}}{۴} = \frac{\pi r^{۲} - (\sqrt{۲}r)^{۲}}{۴}$

$= \frac{\pi r^{۲} - ۲r^{۲}}{۴} = \frac{\pi - ۲}{۴} r^{۲}$

۲۳- با استفاده ازخاصیت عکس نقیض قضیه فیثاغورس اگر در یک مثلث رابطه $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$ برقرار نباشد آن مثلث قائم الزاویه نیست.

الف) $(۵X)^{۲} = (۳X)^{۲} + (۴X)^{۲}$

$۲۵X^{۲} = ۹X^{۲} + ۱۶X^{۲}$

$۲۵X^{۲} = ۲۵X^{۲} \rightarrow$ مثلث ABC قائم الزاویه است

ب) $۹^{۲} = ۶^{۲} + ۸^{۲}$

$۸۱ = ۳۶ + ۶۴$

$۸۱ = ۱۰۰ \rightarrow$ مثلث DEF قائم الزاویه نیست

۲۴-

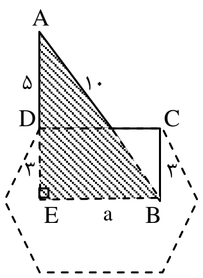
$\rightarrow c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$ مثلث ABC قائم الزاویه است

$\times \xrightarrow{\text{دو طرف}\ \frac{\sqrt{۳}}{۴}} \frac{\sqrt{۳}}{۴} c^{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۴} b^{۲}$

$\rightarrow S_c = S_a + S_b$

۲۵ -

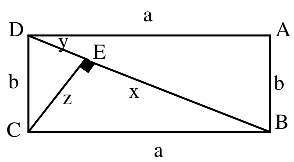
۲۶- $\overset{\Delta}{AEB}: a^{۲} + ۸^{۲} = ۱۰^{۲} \rightarrow a^{۲} = ۳۶ \rightarrow a = ۶$



$S=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times ۳۶=۵۴\sqrt{۳}$ واحد سطح

-۲۷

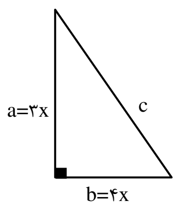
حکم : $a^{۲}-b^{۲}=x^{۲}-y^{۲}$



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{BEC}:a^{۲}=x^{۲}+z^{۲}\\ \overset{\Delta}{DEC}:b^{۲}=y^{۲}+z^{۲}\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow a^{۲}-b^{۲}=(x^{۲}+z^{۲})-(y^{۲}+z^{۲})=x^{۲}-y^{۲}$$

-۲۸



$S=۲۷$

$\frac{۱}{۲}(۲x)(۳x)=۲۷$

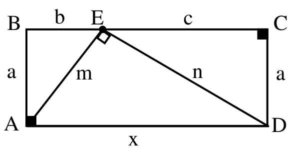
$۳x^{۲}=۲۷\rightarrow x^{۲}=۹\rightarrow x=۳$

$a=۲x=۲(۳)=۶$

$b=۳x=۳(۳)=۹$

$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}=۳۶+۸۱=۱۲۷\rightarrow c=\sqrt{۱۲۷}$

-۲۹ الف)



$\overset{\Delta}{ABE}:m^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$

$\overset{\Delta}{CDE}:n^{۲}=a^{۲}+c^{۲}$

$\overset{\Delta}{ADE}:x^{۲}=m^{۲}+n^{۲}$

$x^{۲}=(a^{۲}+b^{۲})+(a^{۲}+c^{۲})$

$x^{۲}=۲a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}$

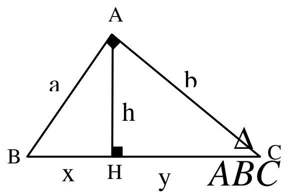
ب- $x=b+c\rightarrow x^{۲}=(b+c)^{۲}\rightarrow x^{۲}=b^{۲}+۲bc+c^{۲}$

$x^۲ = ۲a^۲ + b^۲ + c^۲$ با توجه به تمرین الف

$$۲a^۲ + b^۲ + c^۲ = b^۲ + ۲bc + c^۲$$

$$۲a^۲ = ۲bc \Rightarrow a^۲ = bc$$

-۳۰



الف)

$$\overset{\Delta}{ABH}: a^۲ = x^۲ + h^۲$$

$$\overset{\Delta}{ACH}: b^۲ = y^۲ + h^۲$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \rightarrow a^۲ + b^۲ = (x+y)^۲$$

$$\rightarrow (x^۲ + h^۲) + (y^۲ + h^۲) = x^۲ + ۲xy + y^۲$$

$$\rightarrow ۲h^۲ = ۲xy \rightarrow h^۲ = xy \rightarrow AH^۲ = BH.CH$$

ب)

$$\overset{\Delta}{ABH}: a^۲ = x^۲ + h^۲$$

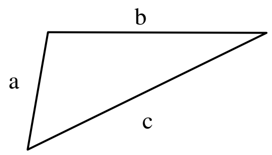
$a^۲ = x^۲ + xy$ طبق تمرین الف

$$a^۲ = x(x+y)$$

$$AB^۲ = BH.BC$$

***

کار تحقیقی : اگر اندازه سه ضلع مثلث معلوم باشد ابتدا محیط مثلث یعنی $a+b+c$ را به دست آورده و نصف آن را به دست می‌آوریم.



نصف محیط $P = \dfrac{a+b+c}{۲}$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

این رابطه به عنوان دستور Heron در تعیین مساحت اراضی موارد استعمال فراوان دارد.

مثال ۱- مساحت مثلث را که اندازه ضلع‌های آن ۷ و ۵ و ۶ سانتی‌متر است و ارتفاع‌های نظیر این ضلعها را حساب کنید.

$$P=\frac{۷+۵+۶}{۲}=۹$$

$$S=\sqrt{۹(۹-۷)(۹-۶)(۹-۵)}=۶\sqrt{۶}\,cm^{۲}$$

$$S=\frac{۱}{۲}ah_a \rightarrow ۶\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}(۷)\,h_a \rightarrow h_a=\frac{۱۲\sqrt{۶}}{۷}$$

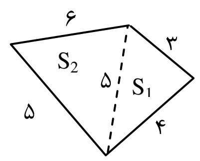
$$S=\frac{۱}{۲}bh_b \rightarrow ۶\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}(۵)\,h_b \rightarrow h_b=\frac{۱۲\sqrt{۶}}{۵}$$

$$S=\frac{۱}{۲}ch_c \rightarrow ۶\sqrt{۶}=\frac{۱}{۲}(۶)\,h_c \rightarrow h_c=۲\sqrt{۶}$$

نتیجه :

$$h_a=\frac{۲}{a}\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال ۲- مساحت شکل مقابل را حساب کنید.



$$P_۱=\frac{۳+۴+۵}{۲}=۶$$

$$S_۱=\sqrt{۶(۶-۳)(۶-۴)(۶-۵)}=\sqrt{۶\times۳\times۲\times۱}=۶$$

$$P_۲=\frac{۶+۵+۵}{۲}=۸$$

$$S_۲=\sqrt{۸(۸-۶)(۸-۵)(۸-۵)}=\sqrt{۸\times۲\times۳\times۳}=۱۲$$

$$S_t=S_۱+S_۲=۶+۱۲=۱۸ \text{ واحد سطح}$$

مثال ۳- با استفاده از دستور Heron مساحت و ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را حساب کنید.

$$\mathrm{P}=\frac{a+a+a}{۲}=\frac{۳a}{۲}\rightarrow \mathrm{S}=\sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{۳a}{۲}-a)^{۳}}=\frac{\sqrt{۳}\,a^{۲}}{۴}$$

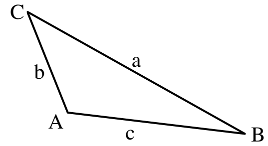
$$\mathrm{S}=\frac{۱}{۲}ah_a \rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\frac{۱}{۲}a\,h_a \rightarrow h_a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

***

☑ جهت مطالعه

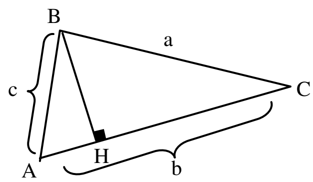
قضیه (قضیه کسینوس‌ها) : در هر مثلث مربع هر ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب همین دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها برابر است.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



اثبات : حالت الف- اگر زاویه $\hat{A}$ حاده باشد

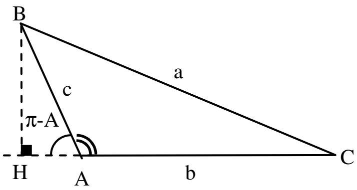
$$\overset{\Delta}{ABH}: c^2 = BH^2 + AH^2$$
$$\overset{\Delta}{BCH}: a^2 = BH^2 + CH^2$$
$$\to a^2 = BH^2 + (b - AH)^2$$
$$\to a^2 = \underbrace{BH^2 + AH^2}_{c^2} + b^2 - 2b.AH$$
$$\to a^2 = c^2 + b^2 - 2b.AH$$
$$\to a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



$$\cos A = \frac{AH}{c} \to AH = c\cos\hat{A}$$

حالت ب- اگر زاویه $\hat{A}$ منفرجه باشد

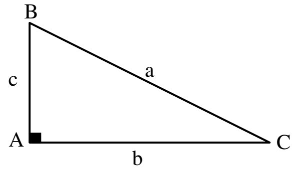
$$\overset{\Delta}{ABH}: c^2 = BH^2 + AH^2$$
$$\overset{\Delta}{BCH}: a^2 = BH^2 + CH^2$$
$$\to a^2 = BH^2 + (b + AH)^2$$
$$\to a^2 = \underbrace{BH^2 + AH^2}_{c^2} + b^2 + 2b.AH$$
$$\to a^2 = c^2 + b^2 + 2b.AH$$
$$\to a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



در مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$: $\cos(\pi - A) = \frac{AH}{c} \to -\cos A = \frac{AH}{c} \to AH = -c\cos A$

حالت ج- اگر زاویه $\hat{A}$ قائم باشد آنگاه $CosA=0$ و لذا قضیه فیثاغورس به دست می‌آید که حالت خاصی از قضیه کسینوس‌ها است.

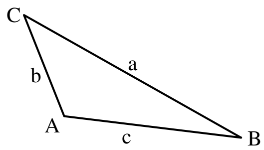
$$a^2=b^2+c^2$$



☑ جهت مطالعه

قضیه (قضیه سینوس‌ها) : در هر مثلث نسبت های اندازه ی هر ضلع بر سینوس زاویه ی مقابل به آن ضلع مساویند . یعنی : $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

اثبات:



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\xrightarrow{\times\frac{2}{abc}}\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

☑ نکته

مساحت چند ضعلی منتظم با معلوم بودن اندازه ی ضلع آن

اگر اندازه ی ضلع یک n منتظم برابر a باشد. در این صورت مساحت آن به صورت زیر است.

$$S = \frac{na^{۲}}{۴}\cot\frac{\pi}{n}$$

برای مثال مساحت شش ضلعی منتظم به کمک این فرمول به شکل زیر است.

$$S = \frac{na^{۲}}{۴}\cot\frac{\pi}{n} \rightarrow S = \frac{۶a^{۲}}{۴}\cot\frac{\pi}{۶} = \frac{۳a^{۲}}{۲}\times\sqrt{۳} = \frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}$$

***