# ریاضی تجربی
# سراسری ۹۱

**نام پاسخ‌دهنده: حسین حاجیلو**

**۱۲۶- گزینه‌ی« ۴»**

فرض کنید که $f(a)=t$ (*)، بنابراین از معادله‌ی $g(f(a))=۵$، نتیجه می‌شود که $g(t)=۵$، همچنین با توجه به اینکه زوج مرتب (۶,۵)، عضو تابع g است پس $g(۶)=۵$، نتیجه آنکه:

$$\begin{cases} g(t)=۵ \\ g(۶)=۵\end{cases} \xrightarrow{g \text{ یک به یک است}} t=۶ \xrightarrow{(*)} f(a)=۶ \quad (**)$$

$$f(x)=x+\sqrt{x} \xrightarrow{(**)} a+\sqrt{a}=۶$$

که با امتحان گزینه‌ها، تساوی اخیر فقط به ازای $a=۴$ برقرار است.

*(ریاضی ۳، فصل۲-تابع)*

**۱۲۷- گزینه‌ی«۳»**

با توجه به ضابطه‌ی تابع f، نتیجه می‌شود که:

$$f(x)=ab^x; b>۰ \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=ab^۰=a(۱)=a \\ f(-۲)=ab^{-۲}=\frac{a}{b^۲}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=a\\ f(-۲)=\frac{a}{b^۲}\end{cases}$$

اما طبق فرض $\begin{cases} f(۰)=\frac{۳}{۲} \\ f(-۲)=\frac{۳}{۳۲}\end{cases}$، از مقایسه‌ی این دو تساوی با دو تساوی بالا، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a=\frac{۳}{۲} \quad (*) \\ \frac{a}{b^۲}=\frac{۳}{۳۲} \xrightarrow{(*)} \frac{\frac{۳}{۲}}{b^۲}=\frac{۳}{۳۲} \Rightarrow b^۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۳۲}}=۱۶ \end{cases}$$

$$b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm۴ \xrightarrow{b>۰} b=۴ \quad (**)$$

$$(*),(**) \Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}.۴^x \Rightarrow f(\frac{۳}{۲})=\frac{۳}{۲}.۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}(۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}$$

$$=\frac{۳}{۲}.(۲^۳)=\frac{۳}{۲}.(۸)=۱۲$$

*(ریاضی ۲، فصل ۴ – توابع نمایی و لگاریتمی)*

**۱۲۸- گزینه‌ی«۳»**

اگر $x\in[-۱,۱]$، آنگاه: $-۱\le x\le ۱ \Rightarrow -۳\pi \le -۳\pi x \le ۳\pi$

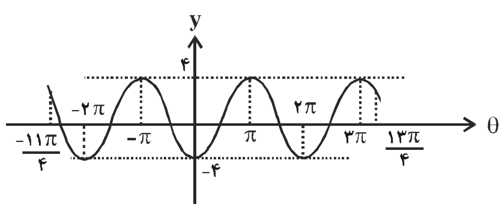
$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴}-۳\pi \le \frac{\pi}{۴}-۳\pi x\le \frac{\pi}{۴}+۳\pi$$

$$\Rightarrow \frac{-۱۱\pi}{۴}\le\frac{\pi}{۴}-۳\pi x\le\frac{۱۳\pi}{۴}$$

حال با در نظر گرفتن $\theta=\frac{\pi}{۴}-۳\pi x$، ضابطه‌ی تابع مفروض سؤال، به صورت زیر درمی‌آید:

$$y=-۴\cos\theta;\ \frac{-۱۱\pi}{۴}\le\theta\le\frac{۱۳\pi}{۴}$$

که شکل آن به صورت زیر است:




ملاحظه می‌کنید که این تابع در سه نقطه با طول‌های $\theta=-\pi$، $\theta=\pi$ و $\theta=۳\pi$، بیشترین مقدار خود را دارد.

*(ریاضی ۲، فصل۵-مثلثات)*

**۱۲۹- گزینه‌ی«۱»**

ابتدا ماتریس X را به دست می‌آوریم:

$$X+\begin{bmatrix}۳&۴\\۵&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۳\\۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۵&۳\\۲&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳&۴\\۵&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۳&۲\end{bmatrix}$$

از طرفی که می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$، آنگاه با شرط $ad-bc\ne۰$، وارون ماتریس A برابر است با $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$، پس:

$$X=\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۳&۲\end{bmatrix}\Rightarrow X^{-۱}=\frac{۱}{۲\times۲-(-۱)\times(-۳)}\begin{bmatrix}۲&۱\\۳&۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۲&۱\\۳&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{-۱}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۳&۲\end{bmatrix}$$

*(ریاضی ۲،فصل ۶- ماتریس)*

**۱۳۰- گزینه‌ی«۴»**

**در صفحه‌ی ۲۷ کتاب درسی آمار و مدل‌سازی، ۴ روش به عنوان روش‌های جمع‌آوری داده مطرح شده است:**

**۱- استفاده از داده‌های از پیش تهیه شده**

**۲- از طریق پرسش‌نامه: مستقیماً از اشخاص (شفاهی، مصاحبه)، پرسش‌نامه‌ی کتبی**

**۳- از طریق مشاهده و ثبت وقایع**

**۴- از طریق انجام آزمایش**

**در صفحه‌های ۲۸ و ۲۹ همان کتاب، نکاتی در مورد طراحی پرسش‌نامه‌ها آورده شده است؛ یکی از این نکات که در انتهای صفحه‌ی ۲۸ به آن اشاره شده، آن است که " از سؤالات هدایت‌کننده استفاده نکنید".**

*(آمار و مدلسازی ، فصل ۲- جامعه و نمونه)*

**۱۳۱- گزینه‌ی«۲»**

**اگر میانگین این داده‌ها را با $\bar{x}$ نشان دهیم، با توجه به گزینه‌ها $۱۲۳ < \bar{x} < ۱۲۵$ پس میانگین تخمینی را $\bar{X} = ۱۲۴$ در نظر می‌گیریم، به طوری‌که $\bar{a} = \bar{x} - \bar{X}$، داریم:**

| x | ۱۱۰ | ۱۱۶ | ۱۲۲ | ۱۲۸ | ۱۳۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = x - \bar{X}$ | $-۱۴$ | $-۸$ | $-۲$ | ۴ | ۱۰ |
| f | ۵ | ۸ | ۱۵ | ۱۲ | ۱۰ |

**از طرفی:**

$$\bar{a} = \frac{\sum f_i a_i}{\sum f_i} = \frac{۵(-۱۴) + ۸(-۸) + ۱۵(-۲) + ۱۲(۴) + ۱۰(۱۰)}{۵ + ۸ + ۱۵ + ۱۲ + ۱۰}$$

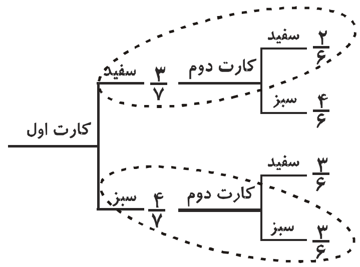
$$= \frac{-۷۰ - ۶۴ - ۳۰ + ۴۸ + ۱۰۰}{۵۰} = \frac{-۱۶}{۵۰} = -۰/۳۲ \qquad (*)$$

$$\bar{a} = \bar{x} - \bar{X} \xrightarrow{(*)} -۰/۳۲ = \bar{x} - ۱۲۴ \Rightarrow \bar{x} = ۱۲۴ - ۰/۳۲$$
$$\Rightarrow \bar{x} = ۱۲۳/۶۸$$

*(آمار و مدلسازی ، فصل ۶- شاخص‌های مرکزی)*

**۱۳۲- گزینه‌ی«۳»**

**با استفاده از نمودار درختی، مساله را حل می‌کنیم:**




**پس احتمال همرنگ بودن دو کارت انتخاب شده، برابر است با:**

$$P = \frac{۳}{۷} \times \frac{۲}{۶} + \frac{۴}{۷} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۷} + \frac{۲}{۷} \Rightarrow P = \frac{۳}{۷}$$

*(ریاضی ۳، فصل ۱ — پدیده‌های تصادفی و احتمال)*

**۱۳۳- گزینه‌ی«۱»**

**ابتدا ضابطه‌ی gof را به دست می‌آوریم:**

$$\begin{cases} f(x) = x^۲ + ۳x \\ g(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۲ \end{cases} \Rightarrow (gof)(x) = g(f(x)) = -\frac{۱}{۲}f(x) + ۲$$

$$\Rightarrow (gof)(x) = -\frac{۱}{۲}(x^۲ + ۳x) + ۲$$

$$\Rightarrow (gof)(x) = -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲$$

**برای به دست آوردن مجموعه‌ی نقاطی که نمودار تابع gof بالای محور xها قرار می‌گیرد، باید نامعادله‌ی $(gof)(x) > ۰$ را حل کنیم:**

$$(gof)(x) > ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۲ > ۰ \xrightarrow{\times(-۲)} x^۲ + ۳x - ۴ < ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x+۴) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۴ \Rightarrow x \in (-۴, ۱)$$

*(ریاضی ۳، فصل۲ — تابع)*

**۱۳۴- گزینه‌ی«۴»**

**راه حل اول:**

$$L = \lim_{x \to ۰} \frac{\cos x - \cos ۲x}{x^۲} = \lim_{x \to ۰} \frac{(۱ - \cos ۲x) - (۱ - \cos x)}{x^۲}$$

**با استفاده از اتحاد $۱ - \cos\theta = ۲\sin^۲\frac{\theta}{۲}$، حد اخیر را بازنویسی می‌کنیم:**

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2-2\lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x})^2=2(1)^2-2(\frac{1}{2})^2\Rightarrow L=\frac{3}{2}$$

**راه حل دوم:**

**چون ابهام حد از نوع $\frac{0}{0}$ است، از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:**

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}$$

**ابهام حد اخیر نیز از نوع $\frac{0}{0}$است، برای بار دوم از قاعده‌ی هوپیتال استفاده می‌کنیم:**

$$\xrightarrow{H} L=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+4\cos x}{2}=\frac{-1+4}{2}\Rightarrow L=\frac{3}{2}$$

*(ریاضی ۳، فصل ۳ – حد و پیوستگی)*

**۱۳۵- گزینه‌ی«۲»**

**با توجه به صورت سوال، نمودار تابع f از نقطه‌ی (۲،۱) می‌گذرد، به عبارت دیگر $f(2)=1$، داریم:**

$$f(x)=\frac{ax+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}\xrightarrow{f(2)=1}\frac{2a+1+\sqrt{16+9}}{6-2}=1$$

$$\Rightarrow\frac{2a+6}{4}=1\Rightarrow 2a+6=4\Rightarrow 2a=-2\Rightarrow a=-1$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-x+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}$$

**حال حاصل $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:**

$$L=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1+\sqrt{4x^2+9}}{3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1+2|x|}{3x-2}$$

**اگر $x\to+\infty$، آنگاه $x>0$ و در نتیجه $|x|=x$، داریم:**

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1+2x}{3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$$

*(ریاضی ۳، فصل۳ – حد و پیوستگی)*

**۱۳۶- گزینه‌ی«۱»**

**اگر تابع f بر مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته باشد در نقطه‌ی $x=2$ نیز پیوسته است، یعنی:**

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax-5 & ; x>2\\ ax-1 & ; x\le 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+ax-5)=4+2a-5=2a-1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)=\lim_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)=\lim_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1$$

**ملاحظه می‌شود که به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی a، تابع f در $x=2$ پیوسته است (شرط $\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$ برقرار است)، همچنین هر دو ضابطه، در همه‌ی نقاط تعریف خود پیوسته هستند، بنابراین به ازای هر مقدار حقیقی a، تابع f بر مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.**

*(ریاضی ۳، فصل ۳ – حد و پیوستگی)*

**۱۳۷- گزینه‌ی«۴»**

$$y=\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}\Rightarrow y'=\frac{(1-\cos^2 x)'(2-\sin^2 x)-(2-\sin^2 x)'(1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(2\sin x\cos x)(2-\sin^2 x)-(-2\sin x\cos x)(1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{2\sin x\cos x(2-\sin^2 x+1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{2\sin x\cos x(3-(\sin^2 x+\cos^2 x))}{(2-\sin^2 x)^2}$$

**با استفاده از دو اتحاد مثلثاتی $\begin{cases}2\sin x\cos x=\sin 2x\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$، می‌توان نوشت:**

$$y'=\frac{(\sin 2x)(3-1)}{(2-\sin^2 x)^2}\Rightarrow y'=\frac{2\sin 2x}{(2-\sin^2 x)^2}$$

**پس مقدار $y'$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$، برابر است با:**

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{(2-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)^2}=\frac{2\times 1}{(2-\frac{1}{2})^2}=\frac{2}{(\frac{3}{2})^2}=\frac{8}{9}$$

*(ریاضی ۳، فصل ۴ – مشتق)*

**۱۳۸- گزینه‌ی«۳»**

**اگر متغیر تصادفی X برابر با تعداد موش‌های سفید انتخاب شده از میان ۶ موش سفید و ۴ موش سیاه باشد، آنگاه X می‌تواند مقادیر صفر، یک و دو را بپذیرد و داریم:**

$$P(X=x)=\frac{\binom{۶}{x}\binom{۴}{۲-x}}{\binom{۱۰}{۲}}=\frac{\binom{۶}{x}\binom{۴}{۲-x}}{۴۵}$$

**توجه کنید که:**

$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{۲!(۱۰-۲)!}=\frac{۱۰!}{۲!۸!}=\frac{۸!\times۹\times۱۰}{۲!۸!}=\frac{۹\times۱۰}{۲!}=\frac{۹۰}{۲}=۴۵$$

$$\Rightarrow\begin{cases}P(X=۰)=\dfrac{\binom{۶}{۰}\binom{۴}{۲}}{۴۵}=\dfrac{۱\times۶}{۴۵}=\dfrac{۶}{۴۵}\\ P(X=۱)=\dfrac{\binom{۶}{۱}\binom{۴}{۱}}{۴۵}=\dfrac{۶\times۴}{۴۵}=\dfrac{۲۴}{۴۵}\\ P(X=۲)=\dfrac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۰}}{۴۵}=\dfrac{۱۵\times۱}{۴۵}=\dfrac{۱۵}{۴۵}\end{cases}$$

**با توجه به مقادیر به دست آمده در بالا، بیشترین مقدار در توزیع احتمال متغیر تصادفی $X$، برابر است با:**

$$P(X=۱)=\frac{۲۴}{۴۵}=\frac{۸}{۱۵}$$

*(ریاضی عمومی، فصل ۱ — احتمال)*

**۱۳۹- گزینه‌ی«۲»**

**ابتدا توجه کنید که در هر بار پرتاب هر تاس، احتمال زوج آمدن عدد رو شده برابر $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$ است.**

**سه حالت مطلوب امکان‌پذیر است که با توجه به مستقل بودن پرتاب تاس‌ها از هم، می‌توان نوشت:**

**۱) در پرتاب اول، هر دو تاس زوج بیایند:** $P_۱=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

**۲)در پرتاب دوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:**

$$P_۲=\underbrace{(۱-\overset{\overset{\text{هر دو زوج}}{\uparrow}}{\frac{۱}{۴}})}_{\text{پرتاب اول}}\ \underbrace{(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})}_{\text{پرتاب دوم}}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۱۶}$$

**۳) در پرتاب سوم، برای اولین بار هر دو تاس زوج بیایند:**

$$P_۳=\underbrace{(۱-\overset{\overset{\text{هر دو زوج}}{\uparrow}}{\frac{۱}{۴}})}_{\text{پرتاب اول}}\ \underbrace{(۱-\overset{\overset{\text{هر دو زوج}}{\uparrow}}{\frac{۱}{۴}})}_{\text{پرتاب دوم}}\ \underbrace{(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})}_{\text{پرتاب سوم}}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۶۴}$$

**چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:**

$$\Rightarrow \text{احتمال موردنظر}: P=P_۱+P_۲+P_۳$$

$$=\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۱۶}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۶}{۶۴}+\frac{۱۲}{۶۴}+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۶+۱۲+۹}{۶۴}=\frac{۳۷}{۶۴}$$

*(ریاضی عمومی، فصل ۱ — احتمال)*

**۱۴۰- گزینه‌ی«۱»**

**می‌دانیم اگر مختصات نقطه‌ی $(\alpha,\beta)$ در معادله‌ی یک تابع صدق کند، مختصات نقطه‌ی $(\beta,\alpha)$ در معادله‌ی وارون آن صدق می‌کند.**

**مختصات نقطه‌ی $(۰,۰)$ در معادله‌ی تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ صدق می‌کند، پس مختصات نقطه‌ی $(۰,۰)$ باید در معادله‌ی وارون آن نیز صدق کند، با توجه به این مطلب، گزینه‌های «۲» و «۴» حذف می‌شوند.**

**مختصات نقطه‌ی $(۱,\frac{۱}{۲})$ در معادله‌ی تابع $y=\frac{x}{۱+|x|}$ صدق می‌کند، پس مختصات نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲},۱)$ باید در معادله‌ی وارون آن نیز صدق کند، با توجه این مطلب گزینه‌ی «۳» نیز حذف می‌شود.**

**بنابراین تنها گزینه‌ی «۱» باقی می‌ماند، یعنی ضابطه‌ی وارون تابع به معادله‌ی $y=\frac{x}{۱+|x|}$، به صورت $y=\frac{x}{۱-|x|};|x|<۱$ است.**

*(ریاضی عمومی، فصل ۲ — توابع و معادلات)*

**۱۴۱- گزینه‌ی«۳»**

**راه حل اول: به ازای هر عدد طبیعی $n$، داریم:**

$$۴n^۲-۴n+۱<۴n^۲-۳n+۱<۴n^۲$$

$$\Rightarrow(۲n-۱)^۲<۴n^۲-۳n+۱<(۲n)^۲$$

$$\Rightarrow ۲n-۱<\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}<۲n\Rightarrow[\sqrt{۴n^۲-۳n+۱}]=۲n-۱$$

**از طرفی به ازای هر عدد طبیعی $n$ که $n>۲$، داریم:**

$$n^۲-۴n+۴<n^۲-۲n<n^۲-۲n+۱$$

$$\Rightarrow(n-۲)^۲<n^۲-۲n<(n-۱)^۲$$

$$\Rightarrow n-۲<\sqrt{n^۲-۲n}<n-۱\Rightarrow[\sqrt{n^۲-۲n}]=n-۲$$

پس برای هر عدد طبیعی n که $n>2$، می توان نوشت:

$$[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]=(2n-1)-2(n-2)=3$$

راه حل دوم:

حاصل عبارت را به ازای یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ محاسبه کنید:

$$n=3$$
$$\Rightarrow [\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]=[\sqrt{28}]-2[\sqrt{3}]$$
$$=5-2\times 1=3$$

$$\text{توجه}:\begin{cases}25<28<36\Rightarrow 5<\sqrt{28}<6\Rightarrow[\sqrt{28}]=5\\ 1<3<4\Rightarrow 1<\sqrt{3}<2\Rightarrow[\sqrt{3}]=1\end{cases}$$

*(ریاضی عمومی، فصل۲ – توابع و معادلات)*

**۱۴۲- گزینه‌ی«۲»**

می‌دانیم که اگر $a>1$، آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$ ، پس در گزینه‌ی «۱»، دنباله‌ی $\{(\frac{3}{2})^n\}$ همگرا نیست و این گزینه حذف می‌شود.

در گزینه‌ی «۳» سه جمله‌ی ابتدایی دنباله را می‌نویسیم:

$$U_n=[\frac{(-1)^n}{n}]\Rightarrow U_1=[\frac{-1}{1}]=-1\ ,\ U_2=[\frac{1}{2}]=0\ ,\ U_3=[\frac{-1}{3}]=-1$$

از آنجا که $\begin{cases}U_1<U_2\\U_2>U_3\end{cases}$، دنباله‌ی $\{[\frac{(-1)^n}{n}]\}$ نه صعودی، نه نزولی است و گزینه ی «۳» نیز حذف می‌شود.

در گزینه‌ی «۴»، داریم:

$$U_n=\frac{2n+1}{n}=\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}\Rightarrow U_n=2+\frac{1}{n}$$

با افزایش $n$، مقدار $\frac{1}{n}$ و در نتیجه $(2+\frac{1}{n})$ کاهش می‌یابد، پس دنباله‌ی $\{\frac{2n+1}{n}\}$ نزولی است و گزینه‌ی «۴» نیز حذف می‌شود.

*(ریاضی عمومی، فصل۲ – توابع و معادلات)*

**۱۴۳- گزینه‌ی«۳»**

$$f(t)=Ae^{kt}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=Ae^{0}=A\\f(20)=Ae^{20k}\end{cases}$$

از طرفی با توجه به فرض سوال $\begin{cases}f(0)=800\\f(20)=3200\end{cases}$، با مقایسه این دو مقدار، با دو مقداری که در بالا به دست آوردیم، می‌توان گفت:

$$\begin{cases}A=800\quad(*)\\Ak^{20k}=3200\xrightarrow{(*)}800e^{20k}=3200\end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{20k}=\frac{3200}{800}\Rightarrow e^{20k}=4\quad(**)$$

$$(*)\Rightarrow f(t)=800e^{kt}\Rightarrow f(30)=800e^{30k}$$

$$\Rightarrow f(30)=800(e^{20k})^{\frac{3}{2}}\xrightarrow{(**)}f(30)=800(4)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f(30)=800(2^2)^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f(30)=800\times 8=6400$$

*(ریاضی عمومی ، فصل ۲- توابع و معادلات)*

**۱۴۴- گزینه‌ی«۲»**

راه حل اول:

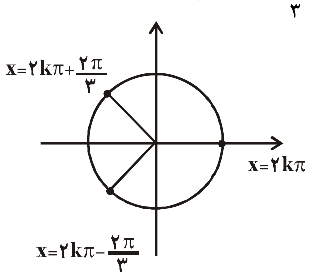
ابتدا توجه کنید که $\begin{cases}\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x\end{cases}$، پس می‌توان معادلـه‌ی موردنظر سوال را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow(1-\cos^2 x)-\cos^2 x=-\cos x$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0\Rightarrow(\cos x-1)(2\cos x+1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x-1=0\Rightarrow\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi\\ 2\cos x+1=0\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

در دایره‌ی مثلثاتی، موقعیت انتهای کمان‌های $2k\pi$ ، $2k\pi-\frac{2\pi}{3}$ و $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ را مشخص می‌کنیم ملاحظه می‌شود که انتهای این سه کمان، دایره مثلثاتی را به سه کمان هم اندازه تقسیم کرده‌اند، پس اجتماع این سه کمان به صورت $x=\frac{2k\pi}{3}$ است.




راه حل دوم:

می‌دانیم $\begin{cases}\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=-\cos x\\ \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x\end{cases}$، پس می‌توان معادله‌ی موردنظر سوال را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x)\Rightarrow -\cos 2x=-\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\cos x$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi\pm x\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+x\Rightarrow x=2k\pi\\ 2x=2k\pi-x\Rightarrow 3x=2k\pi\Rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

از آنجا که با قرار دادن اعداد صحیح مضرب ۳ در $\frac{2k\pi}{3}$، کمان‌های $2k\pi$ حاصل می‌شوند، می‌توان گفت که $x=2k\pi$، زیرمجموعه‌ی $x=\frac{2k\pi}{3}$ است و مجموعه‌ی جواب معادله‌ی به صورت $x=\frac{2k\pi}{3}$ است.

*(ریاضی عمومی، فصل۲ — توابع و معادلات)*

**۱۴۵- گزینه‌ی«۱»**

**برای تشخیص اینکه تابع در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی و تقعر نمودار آن رو به بالا یا رو به پایین است، مشتق اول و مشتق دوم آن را یافته، تعیین علامت می کنیم.**

$$y=-x^4+4x^3-3\Rightarrow y'=-4x^3+12x^2\Rightarrow y'=4x^2(-x+3)$$

$$y'=-4x^3+12x^2\Rightarrow y''=-12x^2+24x\Rightarrow y''=12x(-x+2)$$

**حال $y'$ و $y''$ را در یک جدول، تعیین علامت می‌کنیم:**

| x | $-\infty$ | 0 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | + | 0 | + | | + | 0 | − | |
| $y''$ | − | 0 | + | 0 | − | | − | |
| y | | | | | | | | |

**با توجه به جدول و گزینه‌ها، در بازه‌ی $(2,3)$، تابع صعودی و تقعر نمودار آن رو به پایین است.**

*(ریاضی عمومی، فصل۴ — کاربردهای مشتق)*

**۱۴۶- گزینه‌ی«۴»**

$$y=\frac{x^3}{x^2+1}\Rightarrow y'=\frac{(x^3)'(x^2+1)-(x^2+1)'(x^3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2}\Rightarrow y'=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

**از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که مقدار مشتق تابع موردنظر در $x=0$ برابر صفر است (خط مماس بر نمودار تابع در $x=0$ افقی است) که این شرط تنها در گزینه‌ی «۴» برقرار است.**

*(ریاضی عمومی، فصل۴ — کاربردهای مشتق)*

**۱۴۷- گزینه‌ی«۴»**

$$f(x)=\frac{x+3}{2x+1}\quad,\quad g(x)=\frac{2x-1}{x+2}$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+3}{2g(x)+1}=\frac{\frac{2x-1}{x+2}+3}{2(\frac{2x-1}{x+2})+1}$$

$$=\frac{\frac{(2x-1)+3(x+2)}{x+2}}{\frac{2(2x-1)+(x+2)}{x+2}}=\frac{\frac{5x+1}{x+2}}{\frac{5x}{x+2}}=\frac{5x+1}{5x}$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=\frac{5x+1}{5x}\Rightarrow$$ ریشه‌ی مخرج: $x=0$ (مجانب قائم)

$$\lim_{x\to\infty}(fog)(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{5x}=1\Rightarrow y=1$$ (مجانب افقی)

$\Rightarrow$ نقطه‌ی برخورد مجانب‌های fog : $(0,1)$

*((ریاضی عمومی، فصل۴ — کاربردهای مشتق)*

**۱۴۸- گزینه‌ی«۲»**

**معادله‌ی این دایره را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می گیریم. طبق فرض، این دایره از سه نقطه‌ی $(0,0)$، $(-2,4)$ و $(2,1)$ می گذرد، پس مختصات آن‌ها در معادله‌ی دایره صدق می‌کند:**

$$(0,0)\Rightarrow (0)^2+(0)^2+a(0)+b(0)+c=0\Rightarrow c=0$$

$$(-2,4)\Rightarrow (-2)^2+4^2+a(-2)+b(4)+c=0$$
$$\Rightarrow 20-2a+4b=0\quad (*)$$

$$(2,1)\Rightarrow 2^2+1^2+a(2)+b(1)+c=0\Rightarrow 5+2a+b=0\qquad (**)$$

$$(*)\,,\,(**)\Rightarrow +\begin{cases}20-2a+4b=0\\5+2a+b=0\end{cases}$$
$$25+5b=0\Rightarrow b=-5\xrightarrow{(**)}a=0$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی دایره}: x^2+y^2-5y=0\Rightarrow x^2+(y-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}\Rightarrow R^2=\frac{25}{4}\Rightarrow R=\frac{5}{2}=2/5$$

*(ریاضی عمومی، فصل۵ — هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه‌ی دوم)*

**۱۴۹- گزینه‌ی«۱»**

می‌دانیم که در هر هذلولی (یا بیضی)، طول وتری که از کانون گذشته و بر محور کانونی عمود است (وتر کانونی) برابر با $\frac{2b^2}{a}$ است.

$$x^2-3y^2-2x=2 \Rightarrow (x^2-2x)-3y^2=2$$

$$\Rightarrow ((x-1)^2-1)-3y^2=2 \Rightarrow (x-1)^2-3y^2=3$$

$$\xrightarrow{\div 3} \frac{(x-1)^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3} \\ b^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{طول وتر کانونی} = \frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

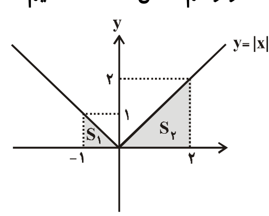
*(ریاضی عمومی، فصل۵ – هندسه مختصاتی و منحنی‌های درجه‌ی دوم)*

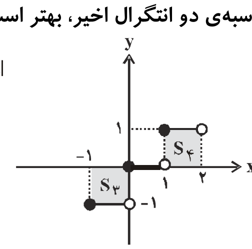
**۱۵۰- گزینه‌ی«۳»**

$$f(x)=|x|-[x]$$

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{-1}^{2}(|x|-[x])dx=\int_{-1}^{2}|x|dx-\int_{-1}^{2}[x]dx \quad (*)$$

برای محاسبه‌ی دو انتگرال اخیر، بهتر است از رسم شکل استفاده کنیم:




$$\int_{-1}^{2}|x|dx=S_1+S_2=\frac{1\times 1}{2}+\frac{2\times 2}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\int_{-1}^{2}[x]dx=-S_3+S_4=-1\times 1+1\times 1=0$$

$$(*) \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x)dx=\frac{5}{2}-0=\frac{5}{2}$$

*(ریاضی عمومی،فصل ۶- انتگرال)*

**۱۵۱- گزینه‌ی«۲»**

$$\frac{5x^2-3x}{\sqrt{x}}=\frac{5x^2-3x}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{5x^2}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}}=5x^{2-\frac{1}{2}}-3x^{1-\frac{1}{2}}=5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}$$

از طرفی می‌دانیم که اگر $n\neq -1$، آنگاه $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$،

پس:

$$\int \frac{5x^2-3X}{\sqrt{x}}dx=\int (5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}})dx=\int 5x^{\frac{3}{2}}dx-\int 3x^{\frac{1}{2}}dx$$

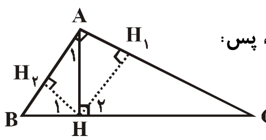
$$=5\int x^{\frac{3}{2}}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx=5\times\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}-3\times\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=5\times\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-3\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=2x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=2x^2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+C=(x-1)(2x\sqrt{x})+C \Rightarrow f(x)=x-1$$

*(ریاضی عمومی،فصل ۶- انتگرال)*

**۱۵۲- گزینه‌ی«۲»**




طبق فرض سؤال در مثلث ABC، $\hat{A}=90^\circ$، پس:

$$\hat{B}+\hat{C}=90^\circ \Rightarrow \hat{C}=90^\circ-\hat{B}$$

هم‌چنین AH ارتفاع وارد بر وتر است، پس در مثلث قائم الزاویه‌ی HBA می‌توان نوشت:

$$\hat{A}_1=90^\circ-\hat{B} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{\hat{H}_1=\hat{A}=90^\circ} H\overset{\Delta}{B}A \sim A\overset{\Delta}{B}C & \text{(تساوی زاویه‌ها)} \\ \xrightarrow{\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ} H\overset{\Delta}{B}A \sim H\overset{\Delta}{A}C & \text{(تساوی زاویه‌ها)} \end{cases}$$

$$\text{طبق فرض}: \frac{S(A\overset{\Delta}{B}C)}{S(H\overset{\Delta}{B}A)}=\frac{6/76}{1} \Rightarrow \frac{S(A\overset{\Delta}{B}C)-S(H\overset{\Delta}{B}A)}{S(H\overset{\Delta}{B}A)}=\frac{6/67-1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{S(H\overset{\Delta}{A}C)}{S(H\overset{\Delta}{B}A)}=\frac{5/76}{1} \quad (*)$$

می‌دانیم که نسبت مساحت های دو مثلث متشابه، برابر با مجذور نسبت تشابه آن‌ها است از آنجا که $H\overset{\Delta}{B}A \sim H\overset{\Delta}{A}C$ اگر نسبت تشابه به این دو مثلث را k بنامیم از تساوی (*)، نتیجه می‌شود:

$$k^2=5/76 \Rightarrow k^2=(2/4)^2=2/4$$

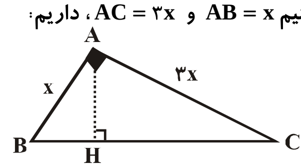
هم‌چنین در دو مثلث متشابه HBA و HAC، $HH_1$ و $HH_2$ ارتفاع‌های وارد بر وتر هستند و می‌دانیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث متشابه، برابر با نسبت تشابه است، داریم:

$$\frac{HH_1}{HH_2}=k \Rightarrow \frac{HH_1}{HH_2}=2/4 \Rightarrow \frac{HH_1}{HH_2}=\frac{12}{5} \Rightarrow \frac{HH_2}{HH_1}=\frac{5}{12}$$

*(هندسه ۱،فصل ۳-تشابه)*

**۱۵۳- گزینه‌ی«۳»**

از آنجا که طبق فرض سؤال، طول اضلاع‌قائمه‌ی مثلث به نسبت ۱ و ۳ هستند، در شکل زیر فرض می‌کنیم $AB = x$ و $AC = ۳x$، داریم:




$$S(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{۱}{۲}AB.AC \Rightarrow ۶۰ = \frac{۱}{۲}(x)(۳x) \Rightarrow ۴۰ = x^۲ \quad (*)$$

از طرفی:

$$\text{فیثاغورس}: BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC^۲ = x^۲ + ۹x^۲ = ۱۰x^۲$$

$$\xrightarrow{(*)} BC^۲ = ۱۰ \times ۴۰ = ۴۰۰ \Rightarrow BC = ۲۰$$

$$S(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{۱}{۲}AH.BC \Rightarrow ۶۰ = \frac{۱}{۲}AH \times ۲۰ \Rightarrow AH = ۶$$

*(هندسه ۱،فصل۲- مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس)*

**۱۵۴- گزینه‌ی«۳»**

می‌دانیم اگر بزرگترین مکعب ممکن در داخل یک کره قرار بگیرید (مکعب در کره محاط باشد)، آنگاه طول قطر کره، با طول قطر مکعب برابر است.

همچنین، می‌دانیم که طول قطر مکعبی به طول یال $a$ برابر با $\sqrt{۳}a$ است.

با توجه به توضیحات بالا، اگر طول یال مکعب موردنظر را $a$ در نظر بگیریم از آنجا که طول قطر کره‌ی محیط بر آن برابر ۶ است، داریم:

$$\sqrt{۳}a = ۶ \Rightarrow a = \frac{۶}{\sqrt{۳}} \quad (*)$$

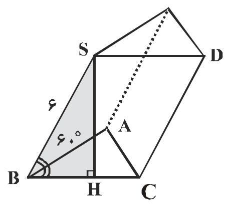
از طرفی می‌دانیم که سطح کل مکعبی به طول یال $a$، برابر با $۶a^۲$ است، داریم:

$$\text{سطح کل مکعب} = ۶a^۲ \overset{(*)}{=} ۶(\frac{۶}{\sqrt{۳}})^۲ = ۶(\frac{۳۶}{۳}) = ۷۲$$

*(هندسه ۱،فصل۴- شکل‌های فضایی)*

**۱۵۵- گزینه‌ی«۴»**

با توجه به فرض، طول هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $ABC$ که قاعده‌ی منشور است، برابر $a = ۴$ است، پس مساحت آن برابر می‌شود با:




$$S(A\overset{\Delta}{B}C) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲ = ۴\sqrt{۳}$$

از طرفی طول هر یال جانبی برابر ۶ است، پس $SB = ۶$، از رأس $S$، ارتفاع $SH$ را بر قاعده رسم می‌کنیم، طبق فرض سؤال $S\hat{B}H = ۶۰^\circ$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $SBH$، می‌توان نوشت:

$$\sin(S\hat{B}H) = \frac{SH}{SB} \Rightarrow \sin ۶۰^\circ = \frac{SH}{۶} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{SH}{۶}$$

$$\Rightarrow SH = ۳\sqrt{۳}$$

$$\text{حجم استوانه}: V = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$= S(A\overset{\Delta}{B}C) \times SH$$

$$= (۴\sqrt{۳})(۳\sqrt{۳}) = ۱۲ \times ۳ = ۳۶$$

*(هندسه ۱،فصل ۴-شکل‌های فضایی)*