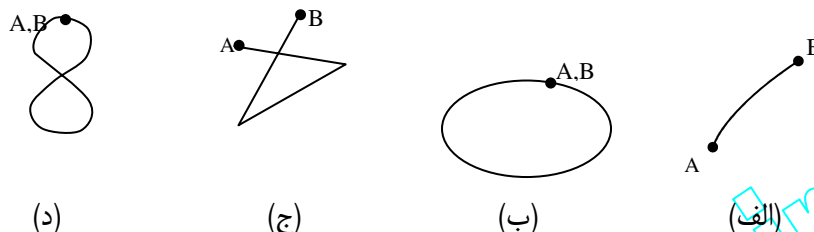


✓ خم مسطح

تعریف : مجموعه‌ای از نقاط را که بتوان بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ و جابه‌جا کردن آن رسم کرد را خم مسطح می‌نامند.
مانند



✓ خم ساده

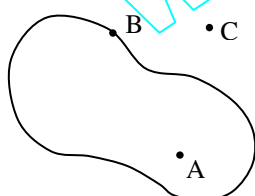
تعریف : یک خم مسطح را ساده می‌نامند هرگاه هیچ یک از نقطه‌های خود را قطع نکند (مگر در حالتی که نقطه‌های ابتدا و انتها روی هم باشند). مانند خم‌های الف و ب

✓ خم بسته

تعریف : اگر نقطه‌های ابتدا و انتهای یک خم بر هم منطبق باشند آن خم را بسته می‌نامند. مانند ب و د

✓ قضیه ی جردن

هر خم ساده ی بسته صفحه را به سه مجموعه ی مجزا تقسیم می‌کند :



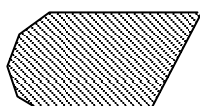
الف (مجموعه ی نقاط درون خم

ب (مجموعه ی نقاط روی خم

ج (مجموعه ی نقاط بیرون خم

این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

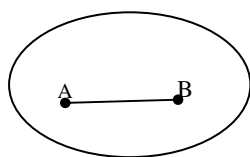
✓ ناحیه



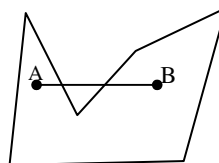
تعریف : اجتماع نقاط یک خم ساده بسته با نقاط درون آن را یک ناحیه می‌نامند.

✓ ناحیه ی محدب و ناحیه ی مقعر

تعریف : اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه دلخواه درون ناحیه‌ای را به هم وصل می‌کند کاملاً درون ناحیه قرار گیرد ناحیه را محدب می‌نامند و در غیر این صورت آن را مقعر (غیر محدب) گویند.



ناحیه محدب



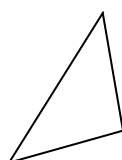
ناحیه مقعر

تمرین ۲۶: یک خم ساده ی بسته رسم کنید که محدب نباشد.

☑ چند ضلعی

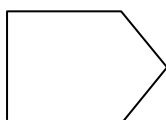
تعریف: هم خم ساده بسته را چند ضلعی می نامند هرگاه از اجتماع حداقل سه پاره خط غیرمنطبق بر یک راستا بوجود آید.

مانند:



سه ضلعی

(د)



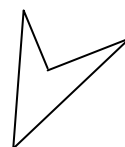
پنج ضلعی

(ج)



چهارضلعی

(ب)

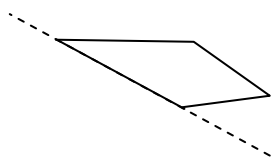


چهارضلعی

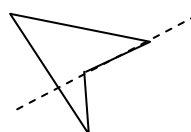
(الف)

☑ چند ضلعی محدب و چند ضلعی مقعر

تعریف: اگر هر ضلع چند ضلعی را امتداد دهیم و چند ضلعی در هر بار در یک طرف امتداد ضلع آن قرار گیرد، چندضلعی را محدب می نامند و در غیر این صورت آن را مقعر (غیر محدب) گویند.



چهارضلعی محدب



چهارضلعی مقعر

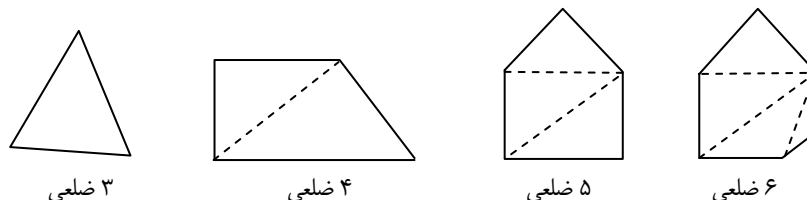
نتیجه: اگر ناحیه ی داخل چند ضلعی محدب باشد چند ضلعی را محدب می نامند و در غیر این صورت مقعر است.

تمرین ۲۷: دو چهار ضلعی رسم کنید که یکی محدب باشد و دیگری محدب نباشد.

☑ مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی محدب

قضیه ۲۰) مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n - 2) \times 180$ درجه است.

اثبات : واضح است که در هر n ضلعی محدب می توان $n - 2$ مثلث به دست آورد (چرا؟) از طرفی مجموع زاویه های n ضلعی برابر مجموع زاویه های داخلی این مثلث ها است اما می دانیم که مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° درجه است پس مجموع زاویه های n ضلعی برابر $(n - 2) \times 180^\circ$ است.

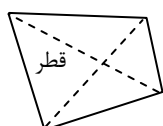


به جدول زیر توجه شود که حالت استقرایی دارد :

چند ضلعی (تعداد اضلاع)	تعداد مثلث ها	مجموع زاویه ها
۳	$3 - 2 = 1$	$1 \times 180^\circ$
۴	$4 - 2 = 2$	$2 \times 180^\circ$
۵	$5 - 2 = 3$	$3 \times 180^\circ$
۶	$6 - 2 = 4$	$4 \times 180^\circ$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$n - 2$	$(n - 2) \times 180^\circ$

✓ قطر چند ضلعی

تعریف : هر پاره خط که دو سر آن دو رأس غیرمجاور یک چندضلعی باشند را قطر چندضلعی می نامند.



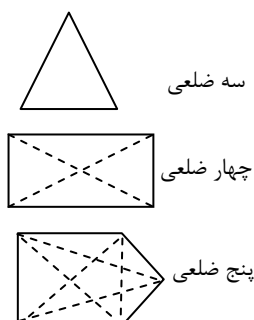
✓ تعداد قطرهای چندضلعی محدب

قضیه (۲۱) هر n ضلعی محدب دارای $\frac{1}{2}n(n - 3)$ قطر است.

اثبات : واضح است که از هر رأس n ضلعی $n - 3$ قطر می گذرد (چرا؟)

و چون n رأس وجود دارد پس تمام قطرهای رسم شده از n رأس $n(n - 3)$ می باشد، اما در این محاسبه هر قطر دو بار شمرده شده است پس تعداد واقعی قطرهای هر n ضلعی محدب برابر

$$\frac{1}{2}n(n - 3) \text{ است.}$$



به جدول زیر توجه شود که حالت استقرایی دارد.

تعداد واقعی قطرها	تعداد قطره‌های رسم شده از تمام رئوس	تعداد قطره‌های رسم شده از یک رأس	چند ضلعی (تعداد اضلاع)
$\frac{1}{2} \times 0 = 0$	$3 \times 0 = 0$	$3 - 3 = 0$	۳
$\frac{1}{2} \times 4 = 2$	$4 \times 1 = 4$	$4 - 3 = 1$	۴
$\frac{1}{2} \times 10 = 5$	$5 \times 2 = 10$	$5 - 3 = 2$	۵
$\frac{1}{2} \times 18 = 9$	$6 \times 3 = 18$	$6 - 3 = 3$	۶
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{1}{2} n(n-3)$	$n(n-3)$	$n-3$	n

تمرین ۲۸- مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک دوازده ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین ۲۹- تعداد قطره‌های یک ۱۵ ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین ۳۰- تعداد قطره‌های یک چندضلعی محدب دو برابر تعداد اضلاع آن است

الف (تعداد اضلاع را بیابید. ب (مجموع زاویه‌های داخلی آن را پیدا کنید.

تمرین ۳۱- مجموع زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی محدب ۵۴۰ درجه است :

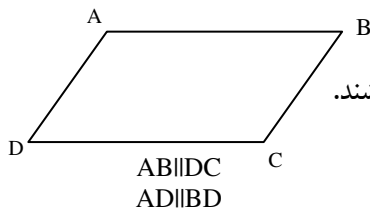
الف (تعداد اضلاع آن را بیابید. ب (تعداد قطره‌های آن را محاسبه کنید.

تمرین ۳۲ : ثابت کنید که مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است.

☑ چهار ضلعی های خاص و خواص آنها

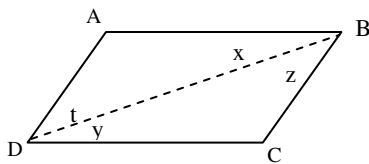
در ادامه به معرفی چهار ضلعی های خاص می پردازیم و خواص آنها را بررسی می کنیم.

☑ متوازی الاضلاع



تعریف : متوازی الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی یکدیگر باشند.

قضیه ۲۲) در هر متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی یکدیگرند.



فرض : $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم : $AB = DC$ و $AD = BC$

اثبات : یکی از قطرهای متوازی الاضلاع (مثلاً BD) را رسم می کنیم آنگاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} = \hat{y} \\ \text{مشترب} \quad BD = BD \\ \hat{z} = \hat{t} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABD \cong \triangle BCD \rightarrow AB = DC \text{ و } AD = BC \quad (\text{ض ز})$$

قضیه ۲۳) اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

فرض : $AB \parallel DC$

حکم : $AD \parallel BC$

اثبات : یکی از قطرهای چهارضلعی (مثلاً BD) را رسم می کنیم آنگاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ \text{مورب} \quad BD \text{ و } AB \parallel DC \\ \text{مشترب} \quad BD = BD \end{array} \right\} \rightarrow \hat{x} = \hat{y} \rightarrow \triangle ABD \cong \triangle BDC \rightarrow \hat{z} = \hat{t} \quad (\text{ض ض})$$

$$\rightarrow AD \parallel BC$$

قضیه ۲۴) اگر در یک چهارضلعی ، اضلاع مقابل دو به دو مساوی باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

فرض : $AB = DC$ و $AD = BC$

حکم : $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

اثبات : یکی از قطره‌های چهارضلعی (مثلاً BD) را رسم می‌کنیم آنگاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} AB=DC \text{ طبق فرض} \\ BD = BD \text{ مشترک} \\ AD = BC \text{ طبق فرض} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABD \cong \triangle BDC \rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \hat{y} \rightarrow AB \parallel DC \\ \hat{z} = \hat{t} \rightarrow AD \parallel BC \end{cases} \quad (\text{ض ض ض})$$

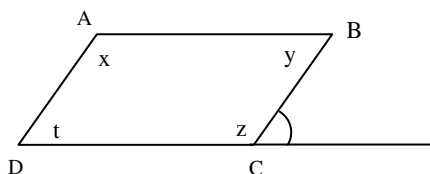
قضیه ۲۵ در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبرو مساویند.

اثبات : یکی از قطره‌های متوازی‌الاضلاع (مثلاً BD) را رسم می‌کنیم آنگاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \\ BD = BD \text{ مشترک} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABD \cong \triangle BCD \rightarrow \hat{A} = \hat{C} \quad (\text{ض ض ض})$$

و به همین ترتیب و با رسم قطر AC ثابت می‌شود که $\hat{B} = \hat{D}$

قضیه ۲۶ اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



فرض : $\hat{x} = \hat{z}$ و $\hat{y} = \hat{t}$

اثبات : می‌دانیم که

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} + \hat{t} = \overbrace{(n-2) \times 180}^4 = 360.$$

همچنین طبق فرض داشتیم که

$$\hat{x} = \hat{z}$$

$$\hat{y} = \hat{t}$$

لذا

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} + \hat{t} = ۳۶۰$$

$$۲\hat{x} + ۲\hat{y} = ۳۶۰$$

$$۲(\hat{x} + \hat{y}) = ۳۶۰ \rightarrow \hat{x} + \hat{y} = ۱۸۰ \quad (۱) \quad -۱$$

حال ضلع BC را از طرف نقطه C امتداد می دهیم آنگاه داریم

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} = \hat{z} \\ \hat{z} = \hat{u} = ۱۸۰ \end{array} \right\} \rightarrow \hat{x} + \hat{u} = ۱۸۰ \quad (۲) \quad -۲$$

$$۱ \text{ و } ۲ \rightarrow \hat{y} = \hat{u} \rightarrow AB \parallel DC$$

و به همین ترتیب ثابت می شود که $AD \parallel BC$

قضیه ۲۷ در هر متوازی الاضلاع ، دو زاویه ی مجاور به هر ضلع مکمل یکدیگرند.

اثبات : ضلع AB را از طرف نقطه B امتداد می دهیم آنگاه

$$\hat{z} + \hat{y} = ۱۸۰^\circ \quad -۱$$

همچنین چون $AD \parallel BC$ و AB مورب

می باشد پس:

$$\hat{x} = \hat{z} \quad -۲$$

$$۱ \text{ و } ۲ \rightarrow \hat{x} + \hat{y} = ۱۸۰^\circ$$

قضیه ۲۸ اگر در یک چهارضلعی زاویه های مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

$$\text{فرض : } \hat{x} + \hat{y} = ۱۸۰^\circ$$

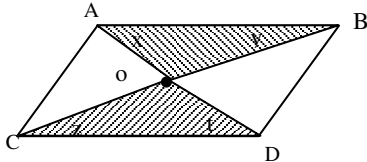
اثبات : ضلع AB را از طرف نقطه B امتداد می دهیم آنگاه داریم

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} + \hat{y} = 180 \\ \hat{y} + \hat{z} = 180 \end{array} \right\} \rightarrow \hat{x} = \hat{z} \rightarrow AD \parallel BC$$

و به همین ترتیب ثابت می شود که $AB \parallel DC$

قضیه ۲۹ در هر متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند.

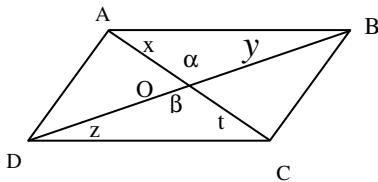
اثبات : قطرهای متوازی الاضلاع را رسم می کنیم آنگاه داریم



$$\left. \begin{array}{l} \text{مورب } AB, AB \parallel DC \rightarrow \hat{x} = \hat{t} \\ AB = DC \\ \text{مورب } BC \text{ و } AB \parallel DC \rightarrow \hat{y} = \hat{z} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \Delta AOB \cong \Delta COD \\ \text{(ض ز ض)} \\ \rightarrow OA = OC \text{ و } OB = OD \end{array}$$

قضیه ۳۰ هر چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف می کنند، متوازی الاضلاع است.

اثبات : قطرهای چهارضلعی را رسم می کنیم آنگاه داریم

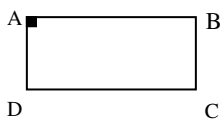


$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \\ \hat{\alpha} = \hat{\beta} \text{ متقابل به رأس} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \Delta AOB \cong \Delta COD \\ \text{(ض ض ض)} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = \hat{t} \rightarrow AB \parallel DC \\ AB = DC \end{array} \right.$$

$$OB = OD$$

و لذا چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

مستطیل ☒

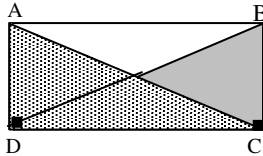


تعریف : مستطیل، متوازی الاضلاعی است که یک زاویه قائمه داشته باشد.

نتیجه : بنابراینکه در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور به هر ضلع مکمل یکدیگر بوده و زاویه های مقابل مساوی همدیگر می باشند پس هر مستطیل چهار زاویه قائمه دارد.

قضیه ۳۱ در هر مستطیل قطرهای مساوی یکدیگرند.

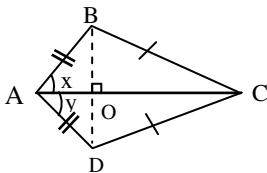
اثبات: قطرهای مستطیل را رسم می کنیم آنگاه داریم :



$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90^\circ \\ DC = DC \text{ مشترک} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC \rightarrow AC = BD \quad (\text{ضضض})$$

☑ **کایت**

تعریف : هر چهارضلعی که از دو مثلث متساوی الساقین هم قاعده تشکیل شده باشد را کایت می نامند.



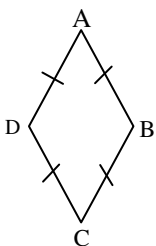
$$AB = AD \text{ و } BC = DC$$

قضیه ۳۲ در هر کایت یکی از قطرهای عمود منصف دیگری است.

اثبات : قطرهای کایت را رسم می کنیم آنگاه داریم :

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ AC = AC \text{ مشترک} \\ BC = DC \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC \rightarrow \hat{x} = \hat{y} \quad (\text{ضضض})$$

یعنی AC نیمساز زاویه $\hat{A}$ است از طرفی می دانیم که در هر مثلث متساوی الساقین نیمساز زاویه رأس بر میانه و ارتفاع وارد بر ضلع مقابل آن منطبق است و لذا AC عمود منصف BD است.

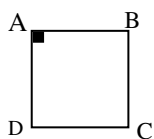


☑ **لوزی**

تعریف : لوزی، متوازی الاضلاعی است که اضلاع آن مساویند.

نتیجه : لوزی نوعی کایت است و لذا قطرهای آن عمود منصف همدیگر هستند.

مربع



تعریف : هر چهار ضلعی که یکی از شرایط زیر را داشته باشد را مربع می نامند.

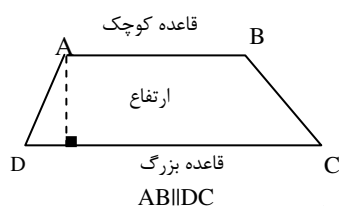
الف: لوزی که یک زاویه قائمه داشته باشد.

ب: مستطیلی که تمام اضلاع آن مساویند.

نتیجه ی ۱ : مربع نوعی مستطیل است و لذا قطرهای آن با هم مساویند.

نتیجه ی ۲ : مربع نوعی لوزی است و لذا قطرهای آن عمودمنصف یکدیگر بوده و نیمساز زاویه های نظیر نیز می باشند.

دوزنقه



تعریف : چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.

در هر دوزنقه دو ضلع موازی را قاعده و پاره خطی که بر هر دو قاعده عمود است را ارتفاع می نامند.

دوزنقه دارای دو نوع مهم است :

۱- دوزنقه ی متساوی الساقین : دوزنقه ای است که دو ضلع ناموازی آن مساویند.

۲- دوزنقه ی قائم الزاویه : دوزنقه ای است که یک زاویه ی قائمه داشته باشد.

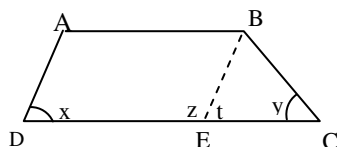
قضیه ی ۳۳ در دوزنقه ی متساوی الساقین، دو زاویه ی مجاور به هر قاعده مساویند.

اثبات : از رأس B خط BE را موازی AD رسم می کنیم، آنگاه داریم $AD = BE$ از

طرفی $AD = BC$ پس $BE = BC$ و لذا $\hat{t} = \hat{y}$

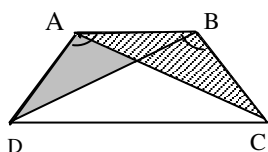
همچنین چون $AD \parallel BC$ و DC مورب می باشد پس $\hat{x} = \hat{t}$ و در نتیجه داریم :

$$\hat{x} = \hat{y}$$



قضیه ی ۳۴ در دوزنقه ی متساوی الساقین دو قطر مساویند.

اثبات : با توجه به شکل مقابل داریم :



$$AD = BC$$

$$\hat{A} = \hat{B} \text{ طبق قضیه قبل}$$

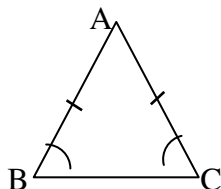
$$AB = AB \text{ مشترک}$$

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{A} = \hat{B} \\ AB = AB \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \rightarrow AC = BD \text{ (ض.ض.)}$$

✓ قضیه ی عکس

تعریف : هرگاه فرض و حکم قضیه‌ای را جابه‌جا کنیم، گزاره ی شرطی جدیدی به دست می آید که اگر درست باشد آن را قضیه ی عکس می‌نامند.

مثلاً : قضیه : در هر مثلث متساوی الساقین زاویه‌های روبرو به اضلاع مساوی با یکدیگر مساویند.



فرض : $AB = AC$

حکم : $\hat{B} = \hat{C}$

قضیه ی عکس : هر مثلث که دو زاویه ی مساوی داشته باشد، متساوی الساقین است.

فرض : $\hat{B} = \hat{C}$

حکم : $AB = AC$

تذکر : عکس یک قضیه ممکن است درست نباشد به عبارت دیگر عکس یک قضیه ممکن است خود قضیه نباشد.

مثال : عکس قضیه ی زیر درست نیست:

قضیه : هر دو زاویه ی متقابل به رأس مساویند.

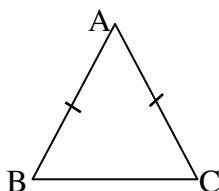
عکس : هر دو زاویه ی مساوی متقابل به رأس هستند.

لذا عکس این قضیه خود قضیه نمی‌باشد.

✓ ویژگی عکس نقیض

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا و نقیض کنیم، گزاره حاصل همواره درست خواهد بود که آن را قضیه عکس نقیض می‌نامند.

بدیهی است که اثبات یک قضیه به معنی اثبات عکس نقیض آن نیز می‌باشد.



$$AB = AC \rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

مثال : قضیه : در هر مثلث متساوی الساقین زاویه‌های روبرو به اضلاع مساوی با یکدیگر مساویند.

قضیه ی عکس نقیض : اگر در مثلثی دو زاویه مساوی نباشند آنگاه آن مثلث متساوی الساقین نیست.

$$\hat{B} \neq \hat{C} \rightarrow AB \neq AC$$

تمرین (۳۲) ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه، میانه ی وارد بر وتر نصف وتر است.

تمرین (۳۳) ثابت کنید که اگر در متوازی الاضلاعی قطرها مساوی باشند آن متوازی الاضلاع، مستطیل است.

پاسخ تمرین های فصل ۱

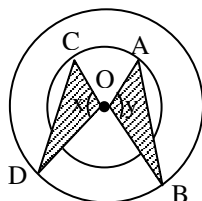
-۱

چهارضلعی ABCD مربع است

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow AB = BC \\ \rightarrow AB = BE \end{array} \right\} \rightarrow BC = BE \rightarrow \text{مثلث BCE متساوی الساقین است}$$

مثلث ABE متساوی الاضلاع است

-۲

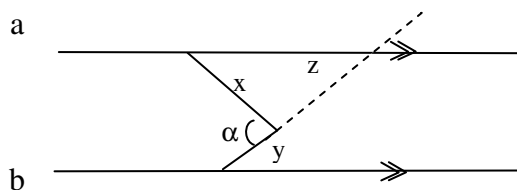


$$\left. \begin{array}{l} OC = OA \text{ شعاع های دایره کوچک} \\ \hat{x} = \hat{y} \text{ متقابل به رأس} \\ OD = OB \text{ شعاع های دایره بزرگ} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD \text{ (ض.ض.)}$$

-۳

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ADE: \hat{A} + \hat{a} + \hat{x} = 180 \\ \triangle ABC: \hat{A} + \hat{a} + \hat{y} = 180 \end{array} \right\} \rightarrow \hat{A} + \hat{a} + \hat{x} = \hat{A} + \hat{a} + \hat{y} \rightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

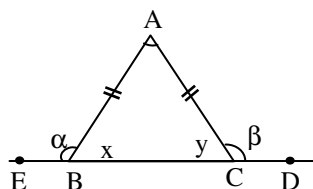
-۴



$$a \parallel b \rightarrow \hat{z} = \hat{y}$$

α زاویه خارجی مثلث می باشد پس

$$\hat{\alpha} = \hat{x} + \hat{z} \rightarrow \hat{\alpha} = \hat{x} + \hat{y}$$



-۵

دو زاویه مساوی
مکمل‌های مساوی دارند
 $AB = AC \rightarrow \hat{x} = \hat{y} \longrightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$

-۶

$$\begin{cases} \hat{x} - \hat{y} = 180 \\ \hat{x} + \hat{y} = 180 \end{cases}$$

$$2x = 360 \rightarrow x = 180$$

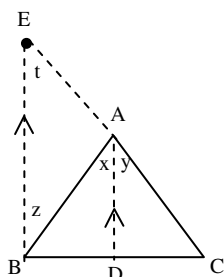
$$\hat{x} + \hat{y} = 180 \rightarrow y = 180 - \hat{x} = 180 - 180 = 0$$

۷- اگر α مکمل x و β مکمل y فرض شوند پس :

$$\hat{x} + \hat{y} = 180 \quad \text{و} \quad \hat{\alpha} + \hat{\beta} = ?$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\alpha} = 180 - \hat{x} \\ \hat{\beta} = 180 - \hat{y} \end{array} \right\} \rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180 - \hat{x} + 180 - \hat{y} = 360 - (x + y) = 360 - 180 = 180$$

-۸



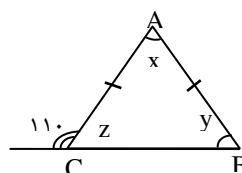
$AD \rightarrow \hat{x} = \hat{y}$ نیمساز زاویه داخلی $\hat{A}$ است

$$AD \parallel BE \rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{x} = \hat{y} \\ \hat{y} = \hat{t} \end{array} \right\} \xrightarrow{\hat{x} = \hat{y}} \hat{z} = \hat{t} \rightarrow AB = AE$$

-۹

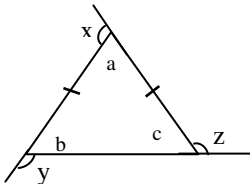
$$\hat{x} + \hat{y} = 110$$

$$AB = AC \rightarrow \hat{y} = \hat{z}$$



$$\Delta ABC: \underbrace{\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}}_{110} = 180^\circ \rightarrow \hat{z} = 70 \rightarrow \hat{y} = 70 \rightarrow x = 110 - 70 = 40$$

۱۰- روش اول



$$\hat{a} + \hat{x} = 180^\circ$$

$$\hat{b} + \hat{y} = 180^\circ$$

$$\hat{c} + \hat{z} = 180^\circ$$

$$+) \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underbrace{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}_{180^\circ} + \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 540^\circ \rightarrow \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 360^\circ$$

روش دوم

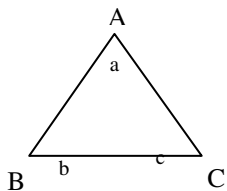
$$\hat{x} = \hat{b} + \hat{c}$$

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{c}$$

$$\hat{z} = \hat{a} + \hat{b}$$

$$+) \underline{\hspace{2cm}}$$

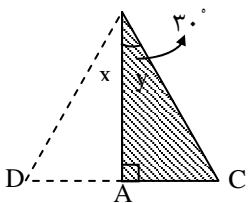
$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 2\hat{a} + 2\hat{b} + 2\hat{c} = 2(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}) = 2(180^\circ) = 360^\circ$$



۱۱-

$$\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = \hat{b} \rightarrow BC = AC \\ \hat{b} = \hat{c} \rightarrow AC = AB \end{cases} \rightarrow BC = AC = AB$$

B



۱۲- یکی از اضلاع زاویه قائمه مثلث (مثلاً ضلع AC) را از طرف رأس زاویه قائمه (یعنی A) به اندازه

خودش امتداد می دهیم تا نقطه D به دست آید. پس (AD = AC)

اگر نقطه D را به رأس B وصل کنیم مثلث BCD به دست می آید که دارای ویژگی های زیر است.

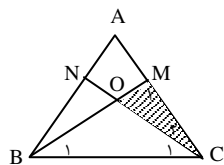
۱- چون $BA \perp DC$ و $AD = AC$ پس AB عمود منصف ضلع BC است لذا

$$BC = BD \text{ و } \hat{x} = \hat{y}$$

$$\text{از طرفی } \hat{y} = 30^\circ \text{ پس } \hat{D}\hat{B}\hat{C} = \hat{x} + \hat{y} = 60^\circ$$

۲- بدیهی است که $\hat{D} = \hat{C} = 60^\circ$ و لذا مثلث BDC سه زاویه مساوی دارد یعنی متساوی الاضلاع است در نتیجه

$$BC = DC \rightarrow BC = 2AC \rightarrow AC = \frac{BC}{2}$$



۱۳- مثلث $\triangle ABE$ متساوی الاضلاع است.

$$\hat{B} = \hat{C} \rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \rightarrow OB = OC$$

$$\hat{O} = 60^\circ \rightarrow \hat{C}_2 = 30^\circ$$

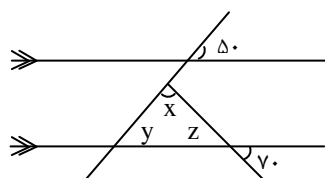
در مثلث متساوی الاضلاع نیمساز هر زاویه ارتفاع ضلع مقابل آن نیز می باشد پس

$$BM \perp AC \rightarrow \hat{M}_1 = 90^\circ$$

در مثلث قائم الزاویه $\triangle OMC$ ضلع روبروی زاویه 30° نصف وتر است پس

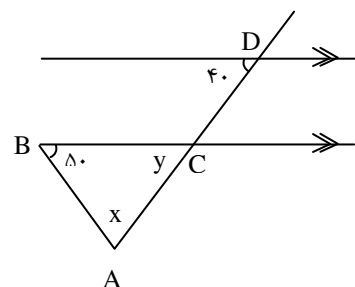
$$OM = \frac{1}{2}OC \rightarrow \frac{OC}{OM} = 2 \xrightarrow{OB=OC} \frac{OB}{OM} = 2$$

و به همین ترتیب در مثلث $\triangle ONB$ داریم $\frac{OC}{ON} = 2$



۱۴- الف-

$$\left. \begin{array}{l} \hat{z} = 70^\circ \\ \hat{y} = 50^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^\circ} \hat{x} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



ب-

$$\hat{y} = 40^\circ \xrightarrow{\hat{x} + \hat{y} + 50^\circ = 180^\circ} x = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$$

$$\hat{x} = \hat{y}$$

۱۵-

$$\hat{x} = \hat{t}$$

$$\hat{y} = 50^\circ \rightarrow \hat{x} = 50^\circ \rightarrow \hat{t} = 50^\circ \rightarrow \hat{z} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

۱۶- طبق تمرین ۱ مثلث BCE متساوی الساقین است پس $\hat{y} = \hat{t}$

از طرفی

$$\left. \begin{array}{l} \hat{m} + \hat{z} = 90 \\ m = 60 \end{array} \right\} \rightarrow \hat{z} = 30$$

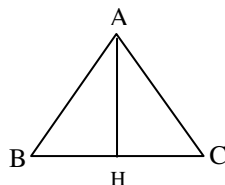
همچنین

$$\hat{y} + \hat{t} + \hat{z} = 180 \rightarrow 2\hat{t} + 30 = 180 \rightarrow t = 75$$

و بالاخره

$$\hat{x} + \hat{t} = 90^\circ \rightarrow \hat{x} = 15$$

۱۷- در مثلث متساوی الساقین میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبقند و لذا هم اندازه می‌باشند پس این گزاره درست نیست.



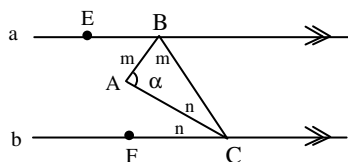
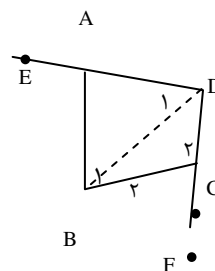
۱۸-

$$\hat{EAB} = \hat{B}_l + \hat{D}_l$$

$$\hat{BCF} = \hat{B}_r + \hat{D}_r$$

+) _____

$$\hat{EAB} + \hat{BCF} = \underbrace{\hat{B}_l + \hat{B}_r}_B + \underbrace{\hat{D}_l + \hat{D}_r}_D = \hat{B} + \hat{D}$$

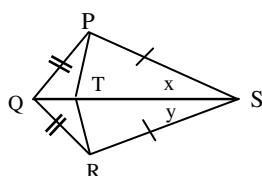


$$\hat{EBC} + \hat{FCB} = 180^\circ \quad -19$$

$$2\hat{m} + 2\hat{n} = 180^\circ$$

$$2(\hat{m} + \hat{n}) = 180^\circ \rightarrow \hat{m} + \hat{n} = 90^\circ$$

$$\hat{\alpha} + \underbrace{\hat{m} + \hat{n}}_{90} = 180^\circ \rightarrow \hat{\alpha} = 90^\circ \quad \text{از طرفی}$$

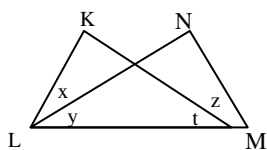


$$PS = RS \quad -20$$

$$\left. \begin{array}{l} PS = RS \\ PQ = RQ \end{array} \right\} \rightarrow \triangle PQS \cong \triangle RQS \rightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

$$QS = QS \quad (\text{ضضض مشترک})$$

$$\left. \begin{array}{l} PS = RS \\ \hat{x} = \hat{y} \\ TS = TS \quad (\text{ضضض مشترک}) \end{array} \right\} \rightarrow \triangle PTS \cong \triangle RTS \rightarrow PT = TR$$



-۲۱

$$\hat{x} = \hat{z}$$

$$\hat{y} = \hat{t}$$

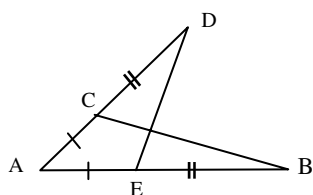
$$+) \text{_____}$$

$$\hat{x} + \hat{y} = \hat{z} + \hat{t} \rightarrow \hat{KLM} = \hat{NML}$$

$$\hat{y} = \hat{t}$$

$$\left. \begin{array}{l} LM = LM \quad (\text{مشترک}) \\ \hat{KLM} = \hat{NML} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle KLM \cong \triangle NML \rightarrow KL = NM$$

(ضضز)



$$AC = AE$$

$$CD = EB$$

$$\underbrace{AC + CD}_{AD} = \underbrace{AE + EB}_{AB} \rightarrow AD = AB$$

-۲۲

$$\left. \begin{array}{l} AD = AB \\ \hat{A} = \hat{A} \quad (\text{مشترک}) \\ AE = AC \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ADE \cong \triangle ABC \rightarrow BC = DE$$

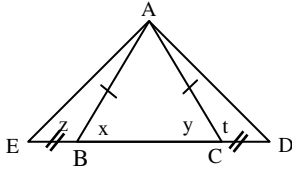
(ضضض)

-۲۳

$$AB = AC \rightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

و چون دو زاویه مساوی مکمل‌های مساوی دارند. پس از طرفی

$$\hat{z} = \hat{t}$$



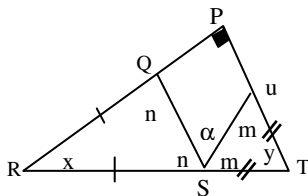
$$AB = AC$$

$$\hat{z} = \hat{t}$$

$$BE = CD$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{z} = \hat{t} \\ BE = CD \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ACD \rightarrow AD = AE \quad (\text{ض.ض.ض})$$

-۲۴



$$\triangle PRT : \hat{x} + \hat{y} = 90^\circ$$

$$\triangle QRS : 2n + x = 180^\circ$$

$$\triangle TUS : 2m + y = 180^\circ$$

$$+) \text{ ————— }$$

$$2m + 2n + \underbrace{x + y}_{90^\circ} = 360^\circ \rightarrow 2(m + n) = 270^\circ \rightarrow m + n = 135^\circ$$

از طرفی طبق اصل زاویه نیم صفحه داریم :

$$\hat{n} + \hat{\alpha} + \hat{m} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{m} + \hat{n} = 135^\circ} \hat{\alpha} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

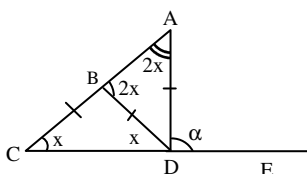
-۲۵

$$BC = BD \rightarrow \hat{BCD} = \hat{x}$$

$\triangle ABD$ زاویه خارجی مثلث BCD است پس

$$\hat{ABD} = 2\hat{x}$$

$$BD = AD \rightarrow \hat{BAD} = 2\hat{x}$$



Δ
 $\hat{\alpha}$ زاویه خارجی مثلث ADC پس

$$\hat{\alpha} = \hat{x} + 2\hat{x} = 3\hat{x}$$

-۲۶

- ۲۷

$$n = ۱۲$$

-۲۸

$$(n-2) \times ۱۸۰ = (۱۲-2) \times ۱۸۰ = ۱۸۰$$

مجموع زاویه‌های داخلی

-۲۹

$$\frac{1}{2}n(n-3) = \frac{1}{2} \times ۱۵(۱۵-3) = \frac{1}{2} \times ۱۵ \times ۱۲ = ۱۵ \times ۶ = ۹۰$$

تعداد قطرها

-۳۰ الف-

$$\frac{1}{2}n(n-3) = 2n \rightarrow \frac{n-3}{2} = 2 \rightarrow n-3 = 4 \rightarrow n = 7$$

$$(n-2) \times ۱۸۰ = (۷-2) \times ۱۸۰ = ۹۰۰^{\circ}$$

ب- مجموع زاویه‌های داخلی

-۳۱

$$(n-2) \times ۱۸۰ = ۵۴۰ \rightarrow n-2 = \frac{۵۴۰}{۱۸۰} = 3 \rightarrow n = 5$$

$$\frac{1}{2}n(n-3) = \frac{1}{2} \times ۵(۵-3) = ۵$$

تعداد قطرها

۳۲ : واضح است که به ازای هر زاویه ی داخلی می توان نوشت:

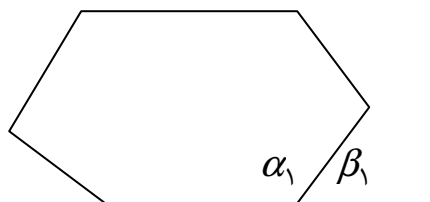
$$\angle \alpha_1 + \angle \beta_1 = 180^\circ$$

$$\angle \alpha_2 + \angle \beta_2 = 180^\circ$$

$$\angle \alpha_3 + \angle \beta_3 = 180^\circ$$

.....

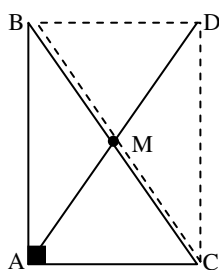
$$\angle \alpha_n + \angle \beta_n = 180^\circ$$



$$\underbrace{\angle \alpha_1 + \angle \alpha_2 + \dots + \angle \alpha_n}_{(n-2)180^\circ} + \underbrace{\angle \beta_1 + \angle \beta_2 + \dots + \angle \beta_n}_{180^\circ n} = 180^\circ n$$

$$\rightarrow \angle \beta_1 + \angle \beta_2 + \dots + \angle \beta_n = 180^\circ n - 180^\circ n + 2(180^\circ)$$

$$\rightarrow \angle \beta_1 + \angle \beta_2 + \dots + \angle \beta_n = 360^\circ$$



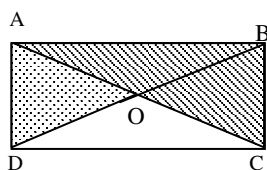
۳۳- میانه AM را از طرف نقطه M به اندازه خودش امتداد می دهیم تا نقطه D به دست آید سپس نقطه D را به نقاط B و C وصل می کنیم چهارضلعی به دست آمده متوازی الاضلاع است چون قطره های آن یکدیگر را نصف می کنند ($AM = MD$ و $BM = MC$) ولی چون این متوازی الاضلاع یک زاویه قائمه

($\hat{A} = 90^\circ$) دارد پس مستطیل است. لذا قطره های آن مساویند یعنی

$$AD = BC$$

$$2AM = BC \rightarrow AM = \frac{BC}{2}$$

۳۴- با توجه به شکل مقابل داریم



$$AD = BC$$

$$AB = AB \text{ مشترک}$$

$$AC = BD$$

$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \\ AB = AB \text{ مشترک} \\ AC = BD \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \rightarrow \hat{A} = \hat{B} \text{ (ض ض ض)}$$

از طرفی می دانیم که در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور به هر ضلع مکمل یکدیگرند پس

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$$

یعنی چهار ضلعی مستطیل است.
