فصل سوم

پاره خط های متناسب در مثلث

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی
شهرستان باوی

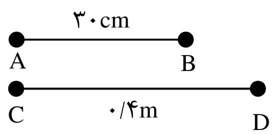
www.mathtower.org

☑ نسبت و تناسب

تعریف : نسبت دو کمیت کسری است که صورت و مخرج آن اندازه‌های آن دو کمیت برحسب یک واحد باشند.

مثلاً : کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت a بر b گویند هرگاه b و a برحسب یک واحد باشند.

مثال : نسبت اندازه پاره خط AB بر پاره خط CD را با توجه به شکل مقابل بنویسید.



$$\frac{AB}{CD}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$$

نتیجه : نسبت دو کمیت یک عدد حقیقی است و به واحد اندازه‌گیری آنها بستگی ندارد.

بیان تساوی دو نسبت را تناسب گویند.

مثلاً : تساوی دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و b و $d \neq ۰$ را یک تناسب گویند.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

در یک تناسب مانند تناسب فوق جملات d و a را طرفین (جملات کناری) و c و b را وسطین (جملات میانی) می‌نامند.

جملات میانی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ جملات کناری

☑خاصیت اصلی تناسب

در هر تناسب حاصل ضرب دو جمله ی کناری با حاصل ضرب دو جمله ی میانی آن برابر است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow ad=bc$$

اثبات : چون b و $d\neq ۰$ پس $bd\neq ۰$ حال کافی است دو طرف تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$bd\left(\frac{a}{b}\right)=bd\left(\frac{c}{d}\right)\rightarrow ad=bc$$

☑ خواص دیگر تناسب

۱- در یک تناسب می‌توان جای دو جمله میانی و یا دو جمله کناری را عوض کرد و تناسب جدیدی به دست آورد. (a و b و c و $d \neq 0$)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{جابجایی جملات میانی}}\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{جابجایی جملات کناری}}\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow[\text{جابجایی جملات کناری}]{\text{جابجایی جملات میانی}}\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

نتیجه : در یک تناسب می‌توان هر دو نسبت را معکوس کرد و تناسب جدید به دست آورد. (a و b و c و $d \neq 0$)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۲- در یک تناسب از ترکیب نسبت در صورت (یا در مخرج) تناسبی جدید به وجود می‌آید. (b و $d \neq 0$)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

۳- نسبت مجموع صورتها به مجموع مخرجها برابر هر یک از نسبت‌های تناسب است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\rightarrow\frac{a+c}{b+d}=k \qquad (b \text{ و } d\neq 0)$$

توجه : خاصیت ۳ برای چند نسبت مساوی نیز قابل تعمیم است.

تمرین

۱- در هر مورد مقدار مجهول را بیابید

الف) $\frac{x}{۳}=\frac{۹}{۱۰}$ ب) $\frac{y}{y+۲}=\frac{۳}{۴}$

ج) $\frac{z+۱}{z}=\frac{۴}{z}$ د) $\frac{۲a+۱}{۱۸}=\frac{۳۵}{b}=\frac{۵}{۲}$

۲- محیط مستطیلی ۲۱۰ سانتی‌متر و نسبت طول به عرض آن $\frac{۴}{۳}$ است مساحت این مستطیل را به دست آورید.

۳- خواص ۳ و ۲ را ثابت کنید.

☑ واسطه ی هندسی (میانگین هندسی)

تعریف : عدد x را میانگین هندسی بین دو عدد b و a گویند هر گاه $x^۲ = ab$

تمرین

۴- واسطه ی هندسی بین دو عدد ۴t و ۹t را تعیین کنید.

۵- ثابت کنید که واسطه ی هندسی بین دو عدد ناصفر همیشه مثبت است.

۶- ثابت کنید که اگر x واسطه ی هندسی بین b و a باشد $\frac{۱}{x}$ نیز واسطه ی هندسی بین $\frac{۱}{b}$ و $\frac{۱}{a}$ است.

۷- اگر داشته باشیم $\frac{۳}{۴}=\frac{x-۱}{۲۰}=\frac{۲۱}{y+۳}$ واسطه ی هندسی بین y و x را بیابید.

☑ تعمیم واسطه ی هندسی

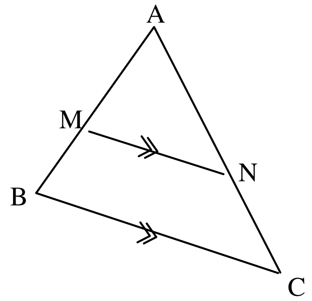
عدد x را واسطه هندسی بین $a_۱$ و $a_۲$ و...و a_n گویند هرگاه $x^n = a_۱ a_۲ ... a_n$

تمرین

۸- واسطه ی هندسی بین اعداد ۱۲ و ۹ و ۲ را بیابید.

☑ رابطه ی تالس و کاربردهایی از آن

قضیه ی ۴۴ (قضیه ی تالس) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند روی آنها پاره خط‌های متناسب بوجود می‌آورد.



فرض : $MN \parallel BC$

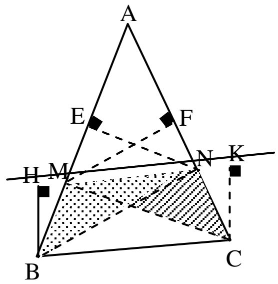
حکم : $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{NC}$

اثبات :

مرحله اول :

نقطه N را به B و همچنین نقطه M را به C وصل می‌کنیم. دو مثلث $\overset{\Delta}{MNB}$ و $\overset{\Delta}{MNC}$ حاصل می‌شود که ارتفاع نظیر ضلع MN در هر دو یکسان است زیرا چهارضلعی BHKC مستطیل می‌باشد و در مستطیل اضلاع روبرو مساویند ($BH = CK$)

لذا طبق آنچه گفته شد داریم :



$$S_{\overset{\Delta}{MNB}}=\frac{۱}{۲}MN.BH=\frac{۱}{۲}MN.CK=S_{\overset{\Delta}{MNC}}$$

مرحله دوم :

از نقطه N بر ضلع AB پاره خط NE را عمود می‌کنیم پس

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}}=\frac{\frac{۱}{۲}AM.NE}{\frac{۱}{۲}MB.NE}=\frac{AM}{MB}$$

مرحله سوم :

از نقطه M بر ضلع AC پاره خط MF را عمود می‌کنیم پس

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}AN.MF}{\frac{۱}{۲}NC.MF}=\frac{AN}{NC}$$

مرحله چهارم :

طبق دو مرحله دوم و سوم داریم

$$\left.\begin{array}{l}\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}}=\frac{AM}{MB}\\ \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}}=\frac{AN}{NC}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{چون } S_{\overset{\Delta}{MNB}}=S_{\overset{\Delta}{MNC}}}\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

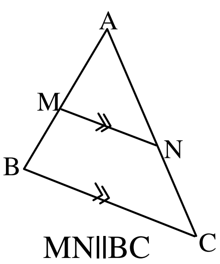
نتیجه : رابطه تالس را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

اثبات : کافی است نسبت را در مخرج ترکیب کنیم

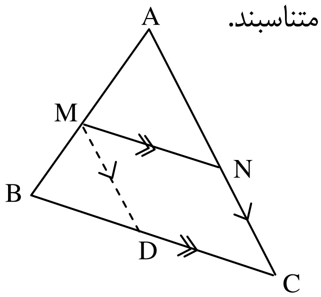
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

توجه : اگر رابطه ی تالس را به صورت $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ بنویسیم می‌گوییم رابطه به صورت جزء به جزء نوشته شده است در حالی که در حالت $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{NC}$ رابطه را جزء به کل گویند.



قضیه ی ۴۵ (قضیه ی کلی تالس) :

اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلث بوجود می‌آورد که اضلاع آن با اضلاع متناظر از مثلث اول متناسبند.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

اثبات : تناسب (۱) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ طبق قضیه تالس بدیهی است از طرفی اگر از نقطه M پاره‌خط MD را موازی AC رسم کنیم با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$MD \parallel AC \rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{BD}{BC} \rightarrow \frac{-BM}{AB} = \frac{-BD}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}}$$

$$\frac{AB - BM}{AB} = \frac{BC - BD}{BC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

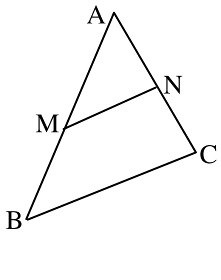
ولی چهارضلعی MNCD متوازی الاضلاع است پس $MN = DC$ و لذا

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \qquad (۲)$$

حال طبق نتایج ۱ و ۲ به دست آمده می‌توان نوشت : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

قضیه ی ۴۶ (عکس قضیه ی تالس) :

اگر خطی دو ضلع مثلثی (یا امتداد آنها) را قطع کند و پاره‌خط‌های متناسب پدید آورد، آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.

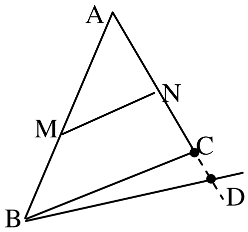


فرض : $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

حکم : $MN \parallel BC$

اثبات : (به کمک برهان خلف) گیریم که MN موازی BC نباشد پس از نقطه B خط BD را چنان رسم می‌کنیم که موازی MN باشد و AC یا امتداد آن را در نقطه D قطع کند. حال طبق قضیه تالس داریم :

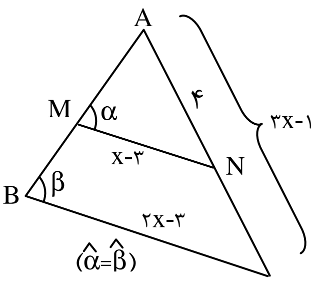
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{ND}\xrightarrow{\text{با مقایسه با فرض}}\frac{AN}{NC}=\frac{AN}{ND}\rightarrow NC=ND$$



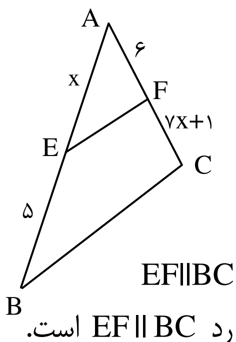
و این وقتی ممکن است که نقـــطه D بر C منطبق باشد پس پاره‌خط BD بر BC منطبق می‌شود و چون MN || BD پس MN || BC

تمرین

۹- در هر مورد مقدار x را به دست آورید.

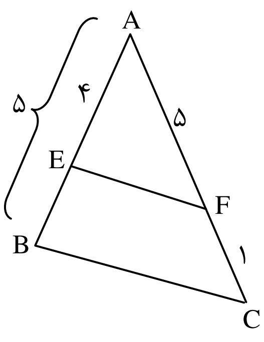


(الف)

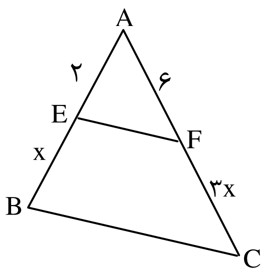


(ب) EF||BC

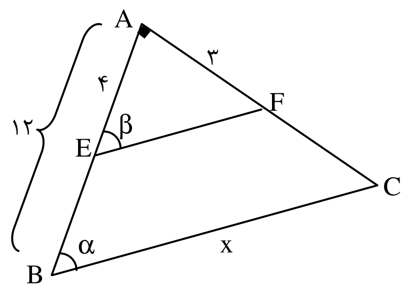
۱۰- در کدام مورد EF || BC است.



(الف)



(ب)

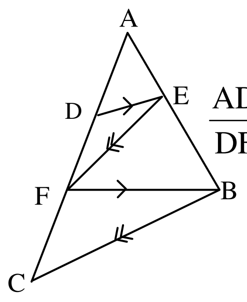


۱۱- مقدار x را به دست آورید $(\hat{\alpha}=\hat{\beta})$

۱۲- ثابت کنید که اگر وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم، پاره خطی بوجود می‌آید که موازی ضلع سوم و برابر نصف آن است.

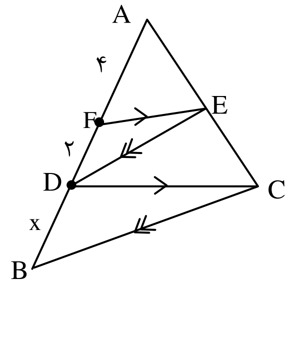
۱۳- ثابت کنید که در یک مثلث اگر از وسط یک ضلع خطی موازی ضلع دیگر رسم شود، این خط از وسط ضلع سوم می‌گذرد.

۱۴- ثابت کنید که اگر وسطهای اضلاع یک چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم چهارضلعی جدیدی به دست می‌آید که
اولاً : متوازی الاضلاع است.
ثانیاً : مساحت آن نصف مساحت چهارضلعی اول است.



۱۵- در شکل مقابل $DE \parallel FB$ و $FE \parallel BC$ ثابت کنید که $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$

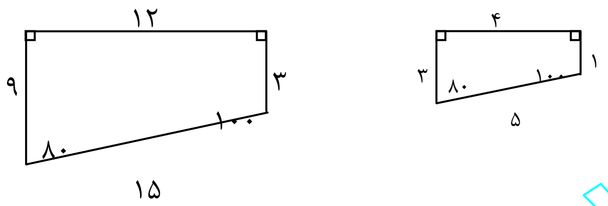
۱۶- با توجه به شکل مقابل اگر $FE \parallel DC$ و $DE \parallel BC$
اولاً : ثابت کنید که $AD^۲ = AF.AB$
ثانیاً : مقدار x را به دست آورید.



☑ تشابه

تعریف : دو چندضلعی را متشابه گویند هرگاه
الف– تعداد اضلاع آنها برابر باشند.
ب– زاویه‌های متناظر آنها مساوی باشند.
ج– اضلاع متناظر آنها متناسب باشند.

مثال ۱ : دو چهارضلعی شکل مقابل متشابهند



مثال ۲ : دو لوزی ممکن است متشابه نباشند زیرا زاویه‌های متناظر آنها ممکن است مساوی نباشند.

نتیجه :
۱– هر شکل با خودش متشابه است.
۲– اگر دو شکل با یک شکل متشابه باشند، خود با هم متشابهند.
۳– هردو شکل همنهشت متشابهند.

مثال ۳ : هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند.
مثال ۴ : هر دو مربع متشابهند.

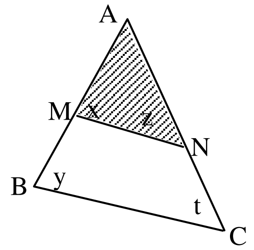
تعریف : نسبت اضلاع متناظر از دو چندضلعی متشابه را نسبت تشابه گویند.

در مثال شماره ۱ نسبت تشابه می‌تواند $۳ = \frac{۱۲}{۴}$ یا $\frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۱۲}$ باشد که می‌نویسند

$$k = \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۱۲} \text{ یا } k = ۳ = \frac{۱۲}{۴}$$

قضیه ۴۷ (قضیه اصلی تشابه) :

اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند مثلثی بوجود می‌آورد که با مثلث اولی متشابه است.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\overset{\Delta}{A}MN \sim \overset{\Delta}{A}BC$

اثبات : شرط اول : برابری تعداد اضلاع دو مثلث که بدیهی است.

شرط دوم : تساوی زاویه‌های متناظر

زاویه $\hat{A}$ در دو مثلث مشترک است پس $\hat{A} = \hat{A}$ از طرفی چون $MN \parallel BC$ پس $\hat{z} = \hat{t}$ و $\hat{x} = \hat{y}$

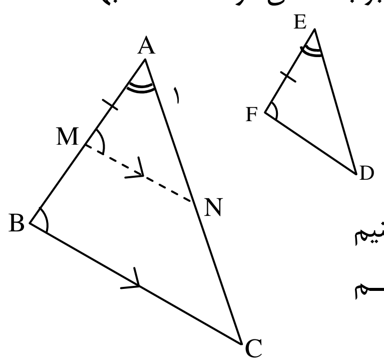
شرط سوم : تناسب اضلاع متناظر

چون $MN \parallel BC$ پس طبق قضیه تالس داریم $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$

☑ قضایای تشابه دو مثلث

قضیه (۴۸-۱) :

اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند آن دو مثلث متشابهند.



فرض : $\hat{A} = \hat{E}$ و $\hat{B} = \hat{F}$

حکم : $\overset{\Delta}{A}BC \sim \overset{\Delta}{E}FD$

اثبات : نقطه M را روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AM = EF$ باشد و از آن پاره‌خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه N قطع کند. پس حال داریم $\hat{B} = \hat{M}_۱$ لذا با توجه به فرض می‌توان نوشت $\hat{F} = \hat{M}_۱$

حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{E}\\ AM=EF\\ \hat{M}_{۱}=\hat{F}\end{array}\right\}\rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\cong \overset{\Delta}{EFD}\rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\sim \overset{\Delta}{EFD}\ (۱)$$

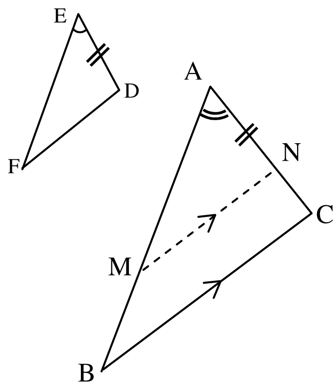
(زضز)

و چون $BC \parallel MN$ پس طبق قضیه اصل تشابه (۲) $\overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{AMN}$

و از نتایج ۱ و ۲ داریم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{EFD}$

قضیه (۴۹-۲)

اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابهند.



فرض : $\hat{A}=\hat{E}$ و $\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AC}$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{EFD}$

اثبات : نقطه N را روی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AN=ED$ سپس از نقطه N خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه M قطع کند بنا بر قضیه تالس $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

حال ضلع مساوی AN یعنی ED را در رابطه فوق جایگزین می‌کنیم پس

$$\frac{AM}{AB}=\frac{ED}{AC}$$

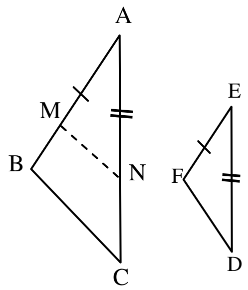
و در مقایسه با فرض داریم $AM=EF$ و در نتیجه دو مثلث EFD و AMN بنا به حالت (ض‌زض) همنهشت هستند یعنی $\overset{\Delta}{AMN}\cong \overset{\Delta}{EFD}\rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\sim \overset{\Delta}{EFD}$ (۱)

(ض‌زض)

از طرفی چون $MN \parallel BC$ پس طبق قضیه اصلی تشابه

$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \quad (۲)$$

و از نتایج (۱) و (۲) داریم : $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EFD}$



قضیه (۵۰-۳):

هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

اثبات : پاره خط AM را به اندازه EF روی AB و پاره خط AN به اندازه ED روی AC جدا کرده آنگاه داریم $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

و طبق عکس قضیه تالس می‌توان نوشت: $MN \parallel BC$

پس طبق قضیه اصلی تشابه $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ و با مقایسه با فرض داریم $MN = FD$ لذا دو مثلث AMN و EFD بنا به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند یعنی

$$\underset{(ض‌ض‌ض)}{\overset{\Delta}{AMN} \cong \overset{\Delta}{EFD}} \rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{EFD} \quad (۱)$$

از طرفی چون $MN \parallel BC$ پس بنا به قضیه اصلی تشابه

$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \quad (۲)$$

و از نتایج (۱) و (۲) داریم : $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EFD}$

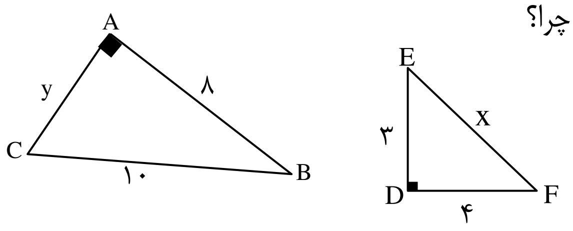
توجه : هنگام نوشتن نسبت اضلاع متناظر از دو شکل متشابه لازم است به دو نکته زیر توجه نمود.

۱- صورت‌ها مربوط به یک شکل و مخرج‌ها مربوط به شکل دیگر باشند.

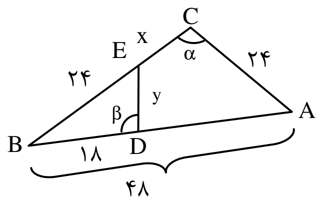
۲- دو ضلع در یک نسبت (کسر) قرار می‌گیرند هرگاه روبرو به زاویه‌های مساوی باشند.

تمرین

۱۷- آیا دو مثلث قائم الزاویه زیر متشابهند؟ چرا؟

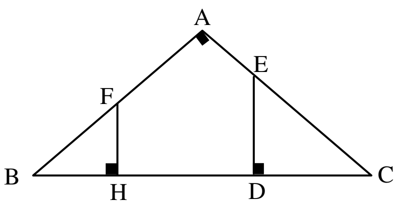


۱۸- در شکل زیر $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ است طول y و x را پیدا کنید.



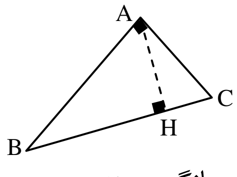
۱۹- ثابت کنید که دو مثلث BHF و CDE متشابهند و نتیجه بگیرید که

$$BH\times DC=FH\times DE$$



۲۰- در شکل مقابل AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ است ثابت کنید

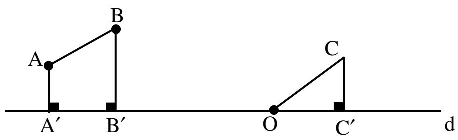
$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}$$



۲۱- ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

۲۲- ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه هر ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب اندازه وتر در اندازه تصویر همان ضلع بر وتر برابر است.

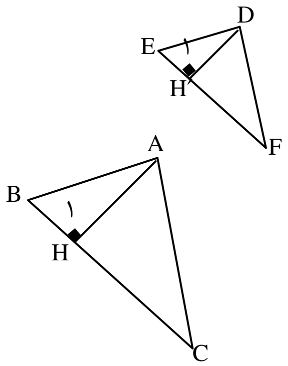
توجه : تصویر پاره خط AB روی خط d پاره خطی است مانند $A'B'$ می‌باشد هرگاه $BB'\perp d$ و $AA'\perp d$ باشد.



۲۳- ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است (قضیه فیثاغورس).

☑ قضایای پاره خطهای متناسب در دو مثلث متشابه

قضیه (۵۱-۱) نسبت ارتفاع‌های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEF} \text{ : فرض} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=k$$

$$\text{حکم : } \frac{AH}{DH'}=k$$

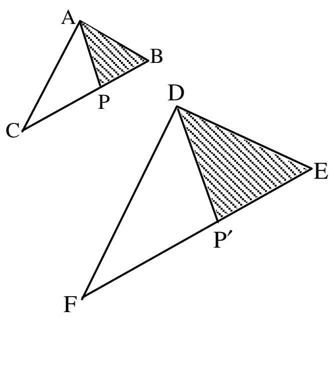
اثبات : چون دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابهند پس $\hat{B}=\hat{E}$

از طرفی $\hat{H}_۱=\hat{H}'_۱=۹۰^\circ$ لذا

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{DEH'}\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\cancel{\frac{BH}{EH'}}=\frac{AH}{DH'}$$

و چون $\frac{AB}{DE}=k$ پس $\frac{AH}{DH'}=k$

قضیه (۵۲-۲) نسبت نیمسازهای متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEF} \text{ : فرض} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=k$$

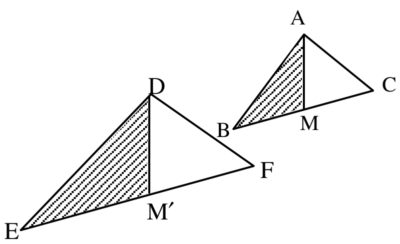
$$\text{حکم : } \frac{AP}{AP'}=k$$

اثبات : چون دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DEF}$ متشابهند
پس $\hat{B}=\hat{E}$ و $\hat{A}=\hat{D}$ از طرفی چون AP و DP'
نیمساز هستند لذا $\hat{A}_۱=\hat{D}_۱$ در نتیجه :

$$\overset{\Delta}{ABP}\sim\overset{\Delta}{DEP'}\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\frac{AP}{DP'}=\cancel{\frac{BP}{EP'}}$$

و چون $\frac{AB}{DE}=k$ پس $\frac{AP}{DP'}=k$

قضیه (۵۳-۳) نسبت میانه‌های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض: $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEF}$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=k$

حکم : $\frac{AM}{DM'}=k$

اثبات : چون دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابهند پس $\hat{B}=\hat{E}$ و $\frac{AB}{DE}=k$ و $\frac{BC}{EF}=k$ از طرفی
چون $BC=۲BM$ و $EF=۲EM'$ پس:

$$\frac{BC}{EF}=\frac{۲BM}{۲EM'}=\frac{BM}{EM'}=k$$

و در نتیجه $\overset{\Delta}{ABM}\sim\overset{\Delta}{DEM'}$

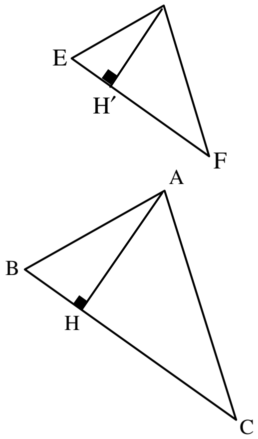
$$\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\cancel{\frac{BM}{EM'}}=\frac{AM}{DM'}$$

و چون $\frac{AB}{DE}=k$ پس $\frac{AM}{DM'}=k$

☑ قضایای محیط و مساحت شکل‌های متشابه

قضیه (۵۴-۱) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با توان دوم نسبت تشابه آنها برابر است.

D



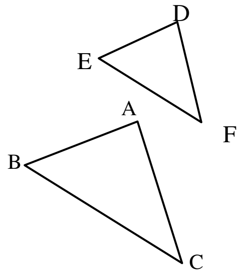
$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$: فرض و $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k$

حکم : $\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}}=k^۲$

اثبات : با توجه به قضیه ۵۱–۱ داریم :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BC.AH}{\frac{۱}{۲}EF.DH'}=\frac{BC}{EF}\cdot\frac{AH}{DH'}=k.k=k^۲$$

قضیه (۵۵–۲) نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آنها برابر است.



$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$: فرض و $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k$

حکم : $\frac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{\overset{\Delta}{DEF}}}=k$

اثبات : با توجه به خواص تناسب داریم

$$\frac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{\overset{\Delta}{DEF}}}=\frac{AB+BC+AC}{DE+EF+DF}=\frac{k(DE)+k(EF)+k(DF)}{DE+EF+DF}$$

$$=\frac{k(DE+EF+DF)}{(DE+EF+DF)}=k$$

تمرین

۲۴– نسبت اضلاع متناظر از دو مثلث متشابه برابر $\frac{۵}{۶}$ می‌باشد.

الف – اگر اندازه یک ضلع از مثلث کوچک ۷/۵ سانتی‌متر باشد، اندازه ضلع متناظر آن را از مثلث بزرگتر به دست آورید.

ب – نسبت میانه‌ها ، ارتفاع و نیمسازهای متناظر از دو مثلث را بنویسید.

ج – نسبت مساحت‌ها و محیط‌های این دو مثلث را بنویسید.

۲۵- نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۸۱}{۲۵}$ است، نسبت محیط‌های این دو مثلث را پیدا کنید.

۲۶- مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. اگر طول ضلع‌های مثلث ABC برابر ۵ و ۸ و ۱۱سانتی‌متر و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر ۶۰ سانتی‌متر باشد. طول ضلع‌های مثلث $A'B'C'$ را به دست آورید.

۲۷- دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند و نسبت مساحت‌های مثلث ABC بر $A'B'C'$ برابر $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد اگر اضلاع مثلث ABC برابر ۶ و ۸ و ۱۰ باشد

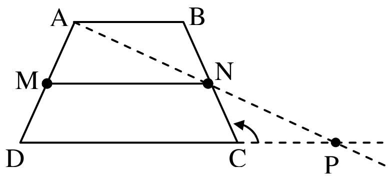
الف – طول اضلاع مثلث $A'B'C'$ را بیابید.

ب – نسبت محیط‌های دو مثلث را به دست آورید.

جهت مطالعه

قضیه : پاره‌خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنها است.

حکم : $MN=\frac{AB+DC}{2}$ و $MN\parallel AB\parallel DC$



اثبات : نقطه A را به N وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا خط AN امتداد قاعده CD را در نقطه P قطع کند. در این صورت مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABN}$ و $\overset{\Delta}{PCN}$ به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند لذا $AB=PC$ و $AN=NP$

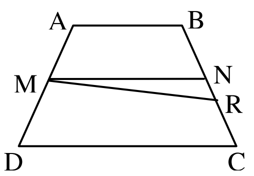
بنابراین MN پاره‌خطی است که وسطهای دو ضلع AD و AP از مثلث ADP را به هم وصل می‌کند پس : $MN\parallel DP$

و چون $AB\parallel DP$ پس $MN\parallel AB\parallel DC$

همچنین

$$MN=\frac{DP}{2}=\frac{PC+DC}{2}\xrightarrow{AB=PC}MN=\frac{AB+DC}{2}$$

قضیه : خطی که از وسط یک ساق ذوزنقه موازی دو قاعده رسم می‌شود از وسط ساق دیگر می‌گذرد و جزئی از آن که در داخل ذوزنقه می‌افتد نصف مجموع دو قاعده است.

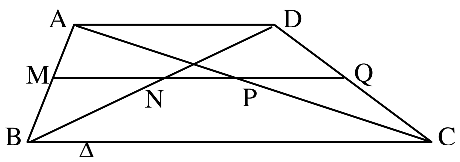


اثبات (به روش برهان خلف) : گیریم که N وسط BC نباشد، نقطه M را به R وسط BC وصل می‌کنیم پس $MR\parallel DC$ از طرفی $MN\parallel DC$ پس باید MR بر MN منطبق باشد در این صورت R بر N منطبق خواهد بود پس N وسط BC است.

لذا $MN=\frac{AB+CD}{2}$

تمرین

ثابت کنید که دو قطر ذوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازه آن مساوی نصف تفاضل دو قاعده است.



حکم : $NP=\frac{BC-AD}{۲}$

حل : با توجه به قضیه‌های قبل داریم

$$\overset{\Delta}{ABC}:(AM=MB \text{ و } MP \parallel BC)\rightarrow MP=\frac{BC}{۲} \text{ و } AP=PC \qquad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ACD}:(AP=PC \text{ و } PQ \parallel AD)\rightarrow PQ=\frac{AD}{۲} \qquad (۲)$$

$$\left.\begin{aligned}\overset{\Delta}{ABD}:(MA=MB \text{ و } MN \parallel AD)\rightarrow MN=\frac{AD}{۲}\\ \overset{\Delta}{ADC}:(PA=PC \text{ و } PQ \parallel AD)\rightarrow PQ=\frac{AD}{۲}\end{aligned}\right\}\rightarrow PQ=MN \qquad (۳)$$

حال با توجه به روابط (۳) و (۲) و (۱) داریم :

$$NP=MP-MN \rightarrow NP=MP-PQ$$

$$\Rightarrow NP=\frac{BC}{۲}-\frac{AD}{۲}=\frac{BC-AD}{۲}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

www.mathtower.org