مرحله ی اول دوازدهمین دوره ی المپیاد ریاضی ایران

آبان ماه ۱۳۷۳

۱. فرض کنیم a، b و c اعدادی حقیقی باشند که

$$9a+11b+29c=0$$

ثابت کنید $ax^3+bx+c=0$ در $[0,2]$ یک ریشه دارد.

۲. اگر a و b اعداد طبیعی [با خاصیت] a>b [بوده]، n یک عدد طبیعی باشد طوری که $\frac{a+n}{b}$ و $\frac{b+n}{a}$ اعداد طبیعی باشند و d=(a,b)، ثابت کنید

$$2d \le (n+1)\sqrt{a-b}$$

۳. روی مربع ABCD نقاط K و N روی AB و AD به ترتیب داده شده اند به ترتیب به طوری که

$$AK\times AN=2BK\times DN$$

اضلاع CK و CN قطر BD را در نقاط L و M قطع میکنند. ثابت کنید نقاط K، L، M، N و A روی یک دایره هستند.

۴. تعداد سی وسه عدد طبیعی داده شده است که عوامل اول آن ها فقط از اعداد ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تشکیل شده است. ثابت کنید حاصلضرب حداقل دو تای آن ها مربع کامل است.

۵. یک نقطه ی p درون یک n^2 ضلعی محدب قرار دارد. از هر رأس به نقطه ی p وصل کرده و ادامه می دهیم تا یکی از اضلاع را قطع کند. ثابت کنید یک ضلع وجود دارد که هیچ یک از این خطوط آن را قطع نمی کند. (قطع کردن امتداد اضلاع مورد نظر نیست).

۶. صفحه ی P و نقطه ی M روی آن و دو نقطه ی A و B در یک طرف آن مفروض اند. از نقطه ی M خطی در صفحه ی P رسم کنید که از A و B به یک فاصله باشد.