

فصل چهارم

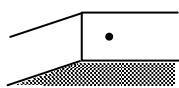
هندسه در فضا

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

www.mathtower.org

✓ هندسه در فضا

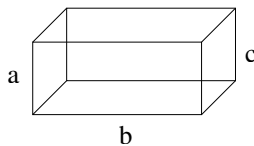
فضایی که در آن زندگی می‌کنیم مدلی از فضای سه بعدی است. فضای سه بعدی یکی از مفهومی‌های نخستین (تعریف نشده) می‌باشد. فضا مجموعه‌ای از بی‌نهایت نقطه



می‌باشد، خط و صفحه نیز که به ترتیب دارای یک بعد و دو بعد می‌باشند هر یک زیرمجموعه‌ای از فضا می‌باشند. کلاس درس نمودی از یک فضای سه بعدی است.

✓ حالت‌های مختلف دو خط در فضا

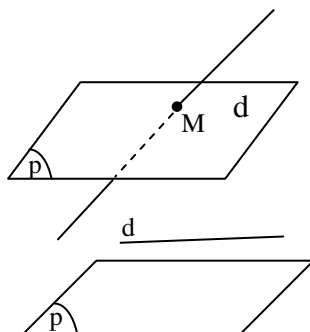
هر دو خط در فضا یکی از سه حالت زیر را دارند :



الف- دو خط که در یک صفحه بوده و در یک نقطه مشترک باشند، خط‌های متقاطع نامیده می‌شوند. مانند دو خط a و b

ب- دو خط متمایز که در یک صفحه بوده و نقطه مشترک نداشته باشند، خط‌های موازی گفته می‌شوند. مانند دو خط a و c

ج- دو خط متمایز که در یک صفحه نبوده و موازی و متقاطع نیز نباشند را متنافر گویند. مانند دو خط b و c
تذکر : دو خط در یک صفحه، موازی نامیده می‌شوند اگر هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند.



✓ حالت‌های مختلف یک خط و یک صفحه در فضا

خط و صفحه در فضا سه حالت زیر را دارند :

الف- خط و صفحه یک نقطه مشترک داشته باشند. در این صورت آنها را متقاطع گویند.

ب- خط و صفحه هیچ نقطه مشترکی ندارند. در این صورت خط و صفحه را موازی گویند.



ج- تمام نقاط خط روی صفحه باشند. در این صورت خط بر صفحه منطبق است.

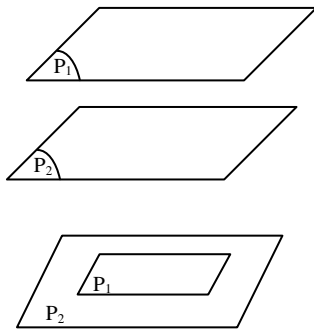
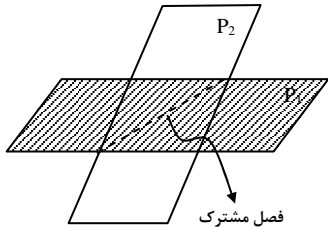
تذکر : انطباق خط بر صفحه در برخی از کتب درسی را حالتی از موازی بودن خط و صفحه می‌گیرند و موازی خط و صفحه را به صورت زیر تعریف می‌کنند.

خط و صفحه را موازی گویند هرگاه هیچ نقطه مشترک نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند.

✓ حالات‌های مختلف دو صفحه در فضا

خط و صفحه در فضا سه حالت زیر را دارند :

- الف- دو صفحه در یک خط مشترک باشند در این صورت آنها را متقاطع گویند. خط مشترک بین دو صفحه متقاطع را فصل مشترک آن دو صفحه می‌گویند.
- ب- دو صفحه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند در این صورت آنها را موازی گویند.



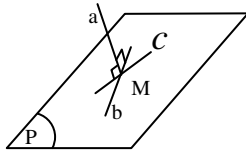
ج- تمام نقاط دو صفحه مشترک است در این صورت آنها را منطبق گویند.

تذکر : انطباق دو صفحه در برخی از کتب درسی را حالتی از موازی بودن دو صفحه می‌گیرند و موازی دو صفحه را به صورت زیر تعریف می‌کنند.

دو صفحه را موازی گویند اگر یکدیگر را قطع نکنند یا بر هم منطبق باشند.

✓ تعامد خط و صفحه

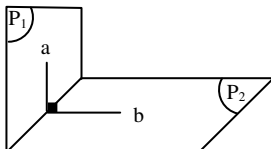
تعریف : یک خط را بر یک صفحه عمود گویند هرگاه بر هر دو خط متقاطع از آن عمود باشد.



$$\left. \begin{array}{l} a \perp b \\ a \perp c \\ b, c \subset P \end{array} \right\} \rightarrow a \perp P$$

تعریف : دو صفحه را عمود بر هم می‌نامند هرگاه خطی در یکی از صفحه‌ها وجود داشته باشد که بر صفحه دیگر عمود باشد.

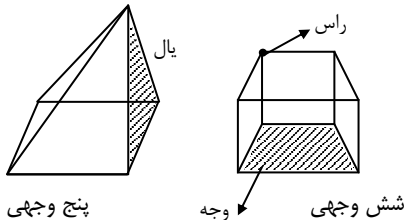
$$a \perp b \rightarrow P_1 \perp P_2$$



تمرین ۱- آیا دو صفحه ی عمود بر یک صفحه لزوماً موازیند؟ چرا؟

✓ چند وجهی

تعریف: بخشی از فضا که از همه طرف به یک چندضلعی مسطح محدود باشد، جسمی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی می‌گویند.



در یک چندوجهی هر کدام از چندضلعی‌ها را یک وجه و ضلع‌های این وجه‌ها را یال و رأس‌های این وجه‌ها را رأس گویند.

منظور از مساحت جانبی یک چند وجهی مجموع مساحت‌های وجوه کناری آن و منظور از مساحت کل چندوجهی مساحت‌های تمام وجوه است.

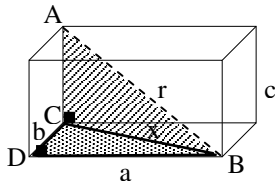
مجموع مساحت‌های وجوه کناری = مساحت جانبی

مجموع مساحت کل وجوه = مساحت کل

✓ مکعب مستطیل

تعریف: هر شش وجهی که همه وجوه آن مستطیل باشند را مکعب مستطیل می‌نامند.

در هر مکعب مستطیل وجوه‌های روبرو مستطیل‌های موازی و همنهشت هستند همچنین وجوه‌های مجاور صفحه‌های عمود بر هم هستند.



تعریف: در هر مکعب مستطیل پاره‌خطی که دو رأس غیرواقع بر یک وجه را به هم وصل می‌کند را قطر مکعب مستطیل می‌نامند مانند پاره خط AB

قضیه: در هر مکعب مستطیل مربع قطر با مجموع مربعات سه بعد آن برابر است.

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

اثبات: کافی است رابطه فیثاغورس را در مثلث‌های قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ و $\triangle BCD$ بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC: r^2 = x^2 + c^2 \\ \Delta BCD: x^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right\} \rightarrow r^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

تمرین ۲- اگر طول یال‌های مکعب مستطیلی ۵ و ۳ و ۲ باشند طول قطر آن را به دست آورید.

✓ مکعب

هر مکعب مستطیل را که طول یالهای آن برابر باشند را مکعب می‌نامند.

نتیجه: طول قطر هر مکعب به طول یال a برابر $a\sqrt{3}$ است.

اثبات: چون سه بعد هر مکعب مساویند پس

$$a=b=c \rightarrow r^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \rightarrow r = a\sqrt{3}$$

تمرین ۳- اگر طول یال مکعبی را دو برابر کنیم، طول قطر آن چه تغییری می‌کند؟

نتیجه: مساحت جانبی مکعب به طول یال a برابر $4a^2$ و مساحت کل آن $6a^2$ است.

✓ حجم و واحد اندازه‌گیری آن

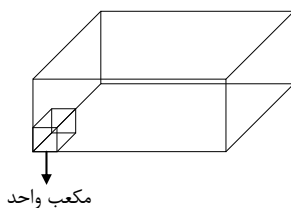
تعریف: مقدار فضایی که یک جسم اشغال می‌کند را حجم آن جسم می‌نامند.

واحد اندازه‌گیری حجم عبارت است از حجم مکعبی است که طول یال آن یک واحد طول

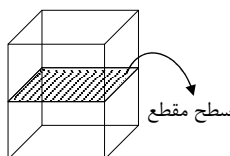
باشد این مکعب را مکعب واحد نیز می‌گویند.

برای مثال اگر طول یال مکعب واحد ۱ سانتی‌متر باشد حجم آنرا ۱ سانتی‌متر مکعب

می‌نامند.



تعریف: سطح مقطع یک جسم، شکلی است که از برخورد آن جسم با یک صفحه حاصل می‌شود.

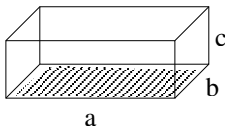


✓ اصول حجم اجسام

۱- حجم هر جسم یک عدد حقیقی مثبت است.

۲- اگر یک جسم از بخش‌های مجزایی تشکیل شده باشد حجم آن برابر مجموع حجم‌های آن بخش‌ها است.

$$v = v_1 + v_2$$



۳- حجم مکعب مستطیل برابر حاصل ضرب طول و عرض و ارتفاع آن است.

$$v = abc$$

نتیجه ۱: حجم مکعب مستطیل با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن برابر است.

$$v = sh$$

نتیجه ۲: حجم مکعب با توان سوم طول یال آن برابر است.

$$v = a^3$$

۴- اگر دو جسم روی یک سطح واقع باشند، در صورتی که هر صفحه موازی قاعده‌ها دو جسم را قطع و سطح مقطع‌های با مساحت برابر پدید آورد آن دو جسم حجم‌های برابر دارند. (اصل کاوالیری در حجم)

تمرین

۴- طول یال مکعبی را ۲ برابر کرده‌ایم تعیین کنید که

الف- مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟

ب- حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۵- حجم مکعب مستطیلی را حساب کنید که طول ابعاد آن $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{6}$ سانتی‌متر باشند.

۶- اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{6}$ باشند، مساحت جانبی، مساحت کل و حجم آن را به دست آورید.

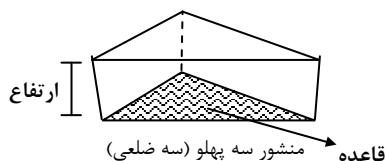
✓ منشور

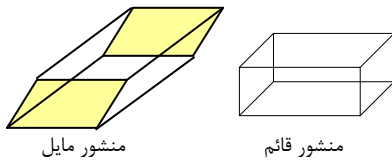
تعریف: هر چند وجهی که دو وجه روبروی آن موازی و همنهشت باشند و وجوه دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند را منشور می‌نامند.

دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه موازی قرار می‌گیرند قاعده‌های منشور نام

دارند. ارتفاع منشور

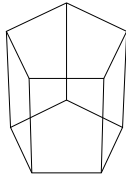
پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود باشد.





منشور مایل

منشور قائم

منشور منتظم
(پنج ضلعی)

اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند آن را یک منشور قائم و اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌ها عمود نباشند آن را منشور مایل می‌نامند.

نتیجه : مکعب مستطیل یک منشور چهار پهلوی قائم است.

اگر قاعده‌های یک منشور قائم چند ضلعی منتظم باشند آن را منشور منتظم نامند.

مساحت جانبی منشور با حاصل ضرب محیط قاعده در ارتفاع آن برابر است.

$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی}$$

$$S_{\text{ج}} = Ph$$

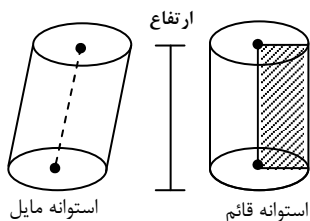
حجم منشور با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن برابر است.

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم منشور}$$

$$v = Sh$$

تمرین ۷- قاعده یک منشور قائم شش ضلعی منتظمی به طول ضلع ۱۰ سانتی‌متر می‌باشد. اگر ارتفاع منشور $18\sqrt{3}$ سانتی‌متر است، مساحت جانبی، مساحت کل و حجم منشور را محاسبه کنید.

☑ استوانه



استوانه مایل

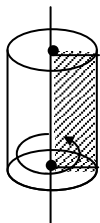
استوانه قائم

تعریف : هر جسم با مقطع‌های عرضی موازی و دایره‌ای شکل با شعاع یکسان را استوانه می‌نامند. این دو دایره را قاعده پاره‌خطی که بر هر دو قاعده عمود باشد ارتفاع استوانه می‌نامند.

پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده استوانه را به هم وصل می‌کند را محور استوانه می‌نامند. اگر محور استوانه بر قاعده‌ها عمود باشد، استوانه را قائم و در غیراین صورت آن را مایل می‌نامند.

نتیجه ۱ : در استوانه قائم، محور استوانه با ارتفاع آن هم اندازه است.

نتیجه ۲ : استوانه قائم جسمی است که از دوران یک مستطیل حول یکی از اضلاع آن پدید می‌آید.



مساحت جانبی با حاصل ضرب محیط قاعده در ارتفاع آن برابر است.

$$S = Ph = 2\pi r h$$

مساحت کل استوانه با مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده آن برابر است پس

مساحت دو قاعده + مساحت جانبی $S =$

$$S = 2\pi rh + 2(\pi r^2) \\ = 2\pi r(h + r)$$

حجم استوانه با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن برابر است.

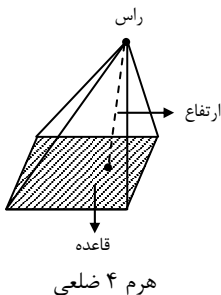
$$v = Sh = \pi r^2 h$$

r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه می‌باشد.

تمرین

- ۸- مساحت جانبی، مساحت کل و حجم استوانه‌ای را حساب کنید که ارتفاع آن ۵ و شعاع قاعده آن ۱۰ سانتی‌متر باشد.
- ۹- هرگاه قاعده‌های یک منشور و یک استوانه که هر دو با ارتفاع ۷ سانتی‌متر هستند روی یک سطح قرار گرفته باشند و هر صفحه موازی با قاعده‌های آنها سطح مقطع‌هایی با مساحت برابر ایجاد می‌کند.
- الف- اگر مساحت قاعده منشور ۱۰ سانتی‌متر باشد حجم آن چقدر است.
- ب- حجم استوانه را به دست آورید.
- ۱۰- حجم استوانه‌ای را برحسب لیتر به دست آورید که شعاع قاعده آن ۵۰ cm و ارتفاع آن ۱۰۰ cm باشد.
- توجه کنید که لیتر واحد اندازه‌گیری حجم مایعات می‌باشد و هر لیتر برابر ۱۰۰۰ سانتی‌متر مکعب است.

هرم



تعریف: هر جسم محدود به یک چندضلعی و چند مثلث جانبی را هرم گویند. هر هرم یک چندوجهی است که همهٔ وجوه آن به جز یکی در یک رأس مشترکند این رأس مشترک را رأس هرم می‌نامند. وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد قاعده هرم نامیده می‌شود. ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعده آن عمود می‌شود. اگر قاعدهٔ یک هرم، چند ضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد هرم را منتظم می‌نامند.

مساحت جانبی هرم با مجموع مساحت‌های مثلث‌های کناری و مساحت کل هرم با مجموع مساحت جانبی و مساحت قاعده آن برابر است.

حجم هرم با یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن برابر است.

$$v = \frac{1}{3} Sh$$

تمرین ۱۱- قاعده هرمی به شکل مربع به ضلع ۵ سانتی‌متر است اگر ارتفاع هرم ۹ سانتی‌متر باشد حجم آن را به دست آورید.

☑ مخروط

تعریف: هر جسم که دارای تنها یک قاعده مدور باشد را مخروط می‌نامند.

دایره‌ای که مخروط روی آن واقع است را قاعده مخروط و رأس مقابل آن را رأس

مخروط می‌نامند.

پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره قاعده وصل می‌کند محور مخروط نام دارد.

اگر محور مخروط بر قاعده عمود باشد مخروط را قائم و در غیراین صورت آن را مایل گویند.

در مخروط قائم محور مخروط با ارتفاع آن هم اندازه است.

مخروط قائم را می‌توان از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع آن به دست آورد.

با توجه به شکل مقابل واضح است که $r^2 + h^2 = L^2$ و وتر AB از مثلث AOB را مولد مخروط می‌نامند.

حجم مخروط با یک سوم حاصل ضرب قاعده در ارتفاع آن برابر است

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (r \text{ شعاع قاعده و } h \text{ ارتفاع مخروط})$$

ثابت می‌شود که در مخروط قائم مساحت سطح خمیده (مساحت جانبی) مخروط با حاصل ضرب محیط قاعده در نصف مولد

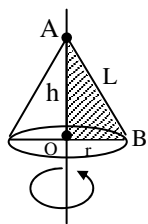
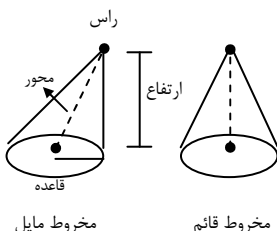
آن برابر است.

$$S = (\pi r) \left(\frac{L}{2} \right) = \pi r L$$

لذا مساحت کل مخروط را می‌توان به صورت زیر تعیین کرد.

$$S = \text{مساحت قاعده} + \text{مساحت سطح خمیده}$$

$$S = \pi r L + \pi r^2 = \pi r (L + r)$$



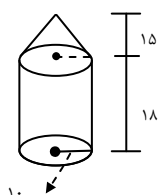
تمرین

۱۲- حجم مخروطی به ارتفاع ۱۲ متر و شعاع قاعده ۱۰ متر را به دست آورید.

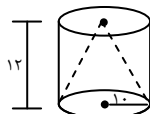
۱۳- مساحت قاعده مخروطی 9π و حجم آن 54π است ارتفاع مخروط را تعیین کنید.

۱۴- مساحت جانبی، مساحت کل و حجم مخروطی را حساب کنید که طول مولد آن ۱۰ و طول ارتفاع آن ۸ سانتی متر باشد.

۱۵- حجم جسم مقابل را به دست آورید.



۱۶- با توجه به شکل مقابل حجم ناحیه بین استوانه و مخروط را محاسبه کنید.



۱۷- اگر شعاع قاعده ی یک استوانه را دو برابر و ارتفاع آن را سه برابر کنیم، حجم استوانه چند برابر می شود.

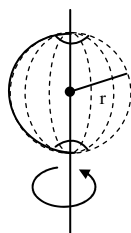
☑ کره

تعریف: هر جسم که از دوران یک نیم دایره حول

قطر آن به دست آید را کره می نامند.

نتیجه: کره مجموعه نقاطی از فضا است که از یک نقطه

ثابت به نام مرکز به یک فاصله ثابت به نام شعاع می باشند.



ثابت می شود مساحت کره به شعاع r برابر $4\pi r^2$ و حجم آن برابر $\frac{4}{3}\pi r^3$ می باشد.

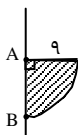
$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

تمرین

۱۸- حجم و مساحت کره‌ای را محاسبه کنید که شعاع آن ۶ سانتی‌متر باشد.

۱۹- اگر شعاع کره‌ای دو برابر شود حجم آن چند برابر می‌شود.



۲۰- اگر شکل مقابل حول خط AB دوران داده شود،

الف- نام جسم حاصل را بنویسید.

ب- حجم آن را محاسبه کنید.

۲۱- مساحت کره‌ای $\frac{37}{68}$ سانتی‌متر مربع است ، حجم این کره چقدر است؟

۲۲- کره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر درون یک مکعب محاط شده است.

الف- مساحت و حجم کره را به دست آورید.

ب- حجم ناحیه محصور بین کره و مکعب را حساب کنید.

موفق باشید. جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان اهواز و باوی

www.mathtower.org