wikiAzmoon

wikiazmoon.ir

تهیه و تنظیم : میثم حمزه‌لویی

دیفرانسیل و ریاضی‌پایه سراسری ۹۱

۱۰۱- گزینه‌ی «۳» عبارت درجه‌ی دوم ax^2+bx+c همواره منفی است هرگاه: $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$. بنابراین برای این که عبارت درجه‌ی دوم $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ همواره منفی باشد باید:

$$\begin{cases} x^2 \text{ ضریب } <0 \Rightarrow (a-1)<0 \Rightarrow a<1 \qquad (1) \\ \Delta<0 \Rightarrow (a-1)^2-4(a-1)<0 \Rightarrow (a-1)(a-1-4)<0 \\ \Rightarrow (a-1)(a-5)<0 \Rightarrow 1<a<5 \qquad (2) \end{cases}$$

از آن جا که اشتراک (۱) و (۲) تهی است بنابراین این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد. پس مقداری برای a یافت نمی‌شود.

(ریاضی۲، توابع خاص و حل نامعادله)

۱۰۲- گزینه‌ی «۴» می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin(3\pi+\theta)=\sin(2\pi+\pi+\theta)=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

(مضارب صحیح 2π را برای sin می‌توان حذف کرد)

پس کسر داده شده به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\theta+\pi)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}+\frac{\cot\theta}{2}$$

از آنجا که مسأله مقدار $\tan\theta$ را داده، با کمک رابطه‌ی $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ خواهیم داشت: $\cot\theta=\frac{1}{0/2}=5$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{\cot\theta}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$$

(ریاضی۲، مثلثات)

۱۰۳- گزینه‌ی «۱»

از رابطه‌ی $\log a\times b=\log a+\log b$ داریم:

$$k=\log_3^{9A^2}=\log_3^9+\log_3^{A^2}=\log_3^{3^2}+\log_3^{A^2}$$

حالا با کمک رابطه‌ی $\log a^n=n\log a$ خواهیم داشت:

$$k=2\log_3^3+2\log_3^A \xlongequal{\log_3^3=1} 2+2\log_3^A$$

از آنجا که $A=3^a$، مقدار k برابر است با:

$$k=2+2\log_3^{3^a}=2+2a\log_3^3=2+2a$$

(ریاضی۲، لگاریتم)

۱۰۴- گزینه‌ی «۳»

تعداد حالت‌های انتخاب سه رقم از پنج رقم داده شده برابر است با:

$$\binom{5}{3}=10$$

حال با سه رقم موجود، (با توجه به این که رقم‌ها متمایزند) تنها در یک حالت رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان است. پس تعداد حالات مطلوب، برابر است با: $10\times1=10$ = تعداد حالات مطلوب

(ریاضی۲، آنالیز ترکیبی)

۱۰۵- گزینه‌ی «۲»

چون: $(1+\sqrt{2})^2=1+2+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$

پس با توجه به تساوی داده شده خواهیم داشت:

$$(1+\sqrt{2})^{2n}=99+b\sqrt{2}\Rightarrow((1+\sqrt{2})^2)^n=99+b\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow(3+2\sqrt{2})^n=99+b\sqrt{2}\qquad(*)$$

ازتساوی (*) می‌توان نتیجه گرفت که $(3-2\sqrt{2})^n=99-b\sqrt{2}$ (**)، زیرا در بسط‌های (*) و (**) جملات فرد (جملاتی که عدد $2\sqrt{2}-$ توان زوج دارد) کاملاً یکسانند و جملات زوج (جملاتی که عدد $2\sqrt{2}-$ توان فرد دارد) قرینه‌ی یکدیگرند پس نتیجه‌گیری درست است. دقت کنید در حالتی که $(-2\sqrt{2})$ توان فرد دارد رادیکال حذف نمی‌شود.

حال برای محاسبه‌ی b کافیست طرفین عبارت‌های (*) و (**) را در هم ضرب کنیم: (در ضرب عبارت‌ها از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.)

$$\begin{cases}(3+2\sqrt{2})^n = 99+b\sqrt{2}\\ (3-2\sqrt{2})^n = 99-b\sqrt{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{ضرب}}(9-8)^n=(99)^2-2b^2$$

$$\Rightarrow 1 = 9801-2b^2 \Rightarrow 2b^2 = 9800 \Rightarrow b^2 = 4900 \Rightarrow b = 70$$

(حسابان، محاسبات جبری)

۱۰۶- گزینه‌ی «۲»

با توجه به داده‌های مسأله:

$$\begin{cases}f(g(x)) = \dfrac{x}{x-3}\\ g(x) = 2x-1\end{cases}\Rightarrow f(2x-1) = \dfrac{x}{x-3}\quad (*)$$

حالا برای محاسبه‌ی $f(3)$ کافی است $(2x-1)$ را برابر ۳ قرار داده، x را بیابیم و در عبارت $(*)$ جای‌گذاری کنیم: $2x-1 = 3 \Rightarrow x = 2$

$$\xrightarrow{(*)} f(3) = \frac{2}{2-3} = -2$$

(حسابان، تابع)

۱۰۷- گزینه‌ی «۱»

با کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$A = \frac{\sin^2 7x - \sin^2 2x}{\sin 5x}$$

$$= \frac{(\sin 7x - \sin 2x)(\sin 7x + \sin 2x)}{\sin 5x}$$

حالا با کمک روابط $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

و $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

داریم:

$$A = \frac{(2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{9x}{2})(2\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{5x}{2})}{\sin 5x}$$

$$= \frac{(2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{5x}{2})(2\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{9x}{2})}{\sin 5x}$$

از آنجا که $2\sin x\cos x = \sin 2x$ داریم: $A = \dfrac{\sin 5x \sin 9x}{\sin 5x}$

$$= \sin 9x \overset{x=\frac{\pi}{54}}{=\!=\!=} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

راه حل دوم: اگر از رابطه‌ی $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$A = \frac{\sin^2 7x - \sin^2 2x}{\sin 5x} = \frac{\frac{1-\cos 14x}{2} - \frac{1-\cos 4x}{2}}{\sin 5x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x)}{\sin 5x}$$

حال از رابطه‌ی $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ استفاده کرده و کسر را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A = \frac{\frac{1}{2}(-2\sin 9x\sin(-5x))}{\sin 5x} = \frac{\sin 9x \sin 5x}{\sin 5x} = \sin 9x$$

از آنجا که $x = \frac{\pi}{54}$ است، حاصل عبارت برابر است با:

$$A = \sin 9(\frac{\pi}{54}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

(حسابان، مثلثات)

۱۰۸- گزینه‌ی «۴»

چون $f+g$ و $f-g$ در $x_\circ$ پیوسته هستند بنابراین مجموع و تفاضل آن‌ها نیز در $x_\circ$ پیوسته است. یعنی:

در $x_\circ$ پیوسته: $y = (f+g)+(f-g) = 2f \Rightarrow f$ **: در $x_\circ$ پیوسته**

در $x_\circ$ پیوسته: $y = (f+g)-(f-g) = 2g \Rightarrow g$ **: در $x_\circ$ پیوسته**

پس f و g در $x_\circ$ پیوسته‌اند.

(حسابان، حد و پیوستگی)

۱۰۹- گزینه‌ی «۲»

برای این که دو منحنی بر هم مماس باشند باید معادله‌ی تلاقی آن‌ها ریشه‌ی مکرر بدهد. بنابراین:

$$\begin{cases}g(x) = ax^2 + 4x\\ f(x) = x^2 + 1\end{cases}\Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow ax^2 + 4x = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow (a-1)x^2 + 4x - 1 = 0 \quad (*)$$

چون عبارت درجه‌ی دوم حاصل شد برای داشتن ریشه‌ی مکرر (مضاعف) باید $\Delta = 0$ باشد در نتیجه:

$$\xrightarrow{(*)} \Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4(a-1)(-1) = 0 \Rightarrow 16 + 4a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 12 + 4a = 0 \Rightarrow a = -3$$

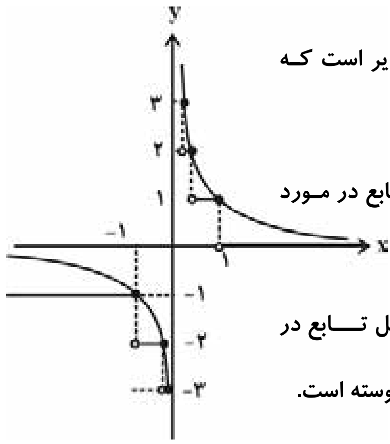
(حسابان، محاسبات جبری)

۱۱۰- گزینه‌ی« ۴»

راه حل اول:

تابع $[f]$ در بازه‌ای مشتق‌پذیر است که در آن بازه پیوسته باشد.

می‌توان با رسم شکل تابع در مورد پیوستگی بحث کرد.



با توجه به شکل تابع در فاصله‌های $x>1, x<-1$ پیوسته است.

راه حل دوم: این تابع در بازه‌ای پیوسته است که خروجی براکت تنها یک مقدار داشته باشد.

حال با توجه به ضابطه‌ی $y=[\frac{1}{x}]$ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ی «۱»: چون $x=0$ در این بازه ریشه‌ی مخرج کسر عبارت داخل براکت است پس تابع در این فاصله ناپیوسته است.

گزینه‌ی «۲»:

$-1<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<-1 \Rightarrow$ $[\frac{1}{x}]$ بی‌شمار خروجی دارد پس تابع در این فاصله ناپیوسته است.

گزینه‌ی «۳»: $x\geq 1 \Rightarrow 0<\frac{1}{x}\leq 1 \Rightarrow [\frac{1}{x}]=1$ یا 0 $\Rightarrow$ تابع در این فاصله ناپیوسته است

گزینه‌ی «۴»: $x<-1 \Rightarrow 0>\frac{1}{x}>-1 \Rightarrow [\frac{1}{x}]=-1$ $\Rightarrow$ تابع در این فاصله پیوسته است

(دیفرانسیل، مشتق)

۱۱۱- گزینه‌ی«۲ »

فرض کنیم $\sin^{-1}x=\alpha$ باشد (با توجه به برد تابع $y=\sin^{-1}x$، α در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ تغییر می‌کند)

در نتیجه $x=\sin\alpha$. بنابراین:

$$\cos(\sin^{-1}x)=\cos\alpha \quad (*)$$

$$x=\sin\alpha \quad (**)$$

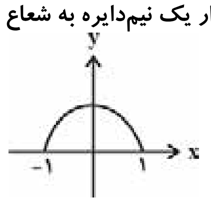
حال با کمک رابطه‌ی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ داریم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \xrightarrow{(**),(*)} x^2+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-x^2$$

$$\xrightarrow{\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \cos\alpha=\sqrt{1-x^2} \xrightarrow{(*)} \cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}$$

پس تابع $y=\cos(\sin^{-1}x)$ همان تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ است که نمودار آن نمودار یک نیم‌دایره به شعاع ۱ است. زیرا:

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2}\geq 0 \\ y^2=1-x^2 \Rightarrow y^2+x^2=1 \end{cases} \Rightarrow$$



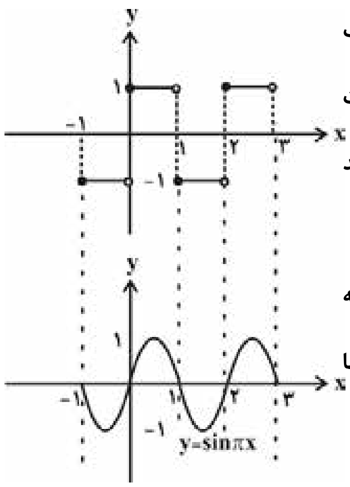
(حسابان، مثلثات)

۱۱۲- گزینه‌ی« ۱»

به نمودار تابع $y=(-1)^{[x]}$ توجه کنید:

چون در تساوی $(-1)^{[x]}f(x)=|f(x)|$ طرف راست تساوی همواره نامنفی است پس برای برقرار بودن تساوی، باید طرف چپ نامنفی باشد.

پس باید f طوری انتخاب شود که در هر زیر فاصله به طول یک با تابع $y=(-1)^{[x]}$ هم‌علامت باشد.



بنابراین در گزینه‌ی «۱» داریم:همان طور که در شکل بالا می‌بینید در هر زیر فاصله مقادیر دو تابع با هم، هم‌علامت هستند. بنابراین $f(x)=\sin\pi x$ قابل قبول است.

(حسابان، تابع)

۱۱۳- گزینه‌ی«۴ »

ابتدا عدد همگرایی دنباله (L) را می‌یابیم:

$$a_n=\frac{2n+8}{3n+4}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8}{3n+4}=\frac{2}{3}$$

فاصله‌ی نقاط دنباله‌ی $\{a_n\}$ از نقطه‌ی همگرایی آن (L) کم‌تر از ۰/۰۴ است یعنی:

$$|a_n-L|<0/04 \Rightarrow |\frac{2n+8}{3n+4}-\frac{2}{3}|<\frac{4}{100}$$

$$\Rightarrow |\frac{6n+24-6n-8}{3(3n+4)}|<\frac{4}{100} \Rightarrow |\frac{16}{9n+12}|<\frac{4}{100}$$

چون $n\in N$ داخل قدرمطلق همواره مثبت است بنابراین:

$$\frac{16}{9n+12} < \frac{4}{100} \Rightarrow 9n+12 > 400 \Rightarrow 9n > 388$$
$$\Rightarrow n > \frac{388}{9} = 43/00 \Rightarrow n \ge 44$$

پس کم‌ترین مقدار n_0 برابر ۴۴ است.

(دیفرانسیل، دنباله و سری)

۱۱۴- گزینه‌ی «۱»

از آنجا که $S_n - S_{n-1} = a_n$ است جمله‌ی عمومی قابل محاسبه است:

$$S_n = S_{n-1} - (\frac{1}{3})^{n-1}$$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = -(\frac{1}{3})^{n-1} \Rightarrow a_n = -(\frac{1}{3})^{n-1} \quad (n>1)$$

اما برای محاسبه‌ی $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، نیاز به جمله‌ی اول هم داریم

بنابراین رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} -(\frac{1}{3})^{n-1} = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{3})^{n-1}$$
$$= 1 - \frac{(\frac{1}{3})^{2-1}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید که مجموع جملات $\sum_{n=k}^{\infty} a(r)^{n-1}$ از رابطه‌ی $\frac{a(r)^{k-1}}{1-r}$ به دست می‌آید.

(دیفرانسیل، دنباله و سری)

۱۱۵- گزینه‌ی «۱»

دامنه: $|x-1| < 2$

(چون طرفین نامعادله نامنفی هستند می‌توانیم به توان ۲ برسانیم)

$$\Rightarrow (x-1)^2 < 4 (*)$$

از طرفی با مربع کامل کردن ضابطه‌ی f داریم:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$$

بنابراین در (*) چون، $(x-1)^2 < 4$ و در نتیجه $(x-1)^2 - 4 < 0$ است.

بنابراین تابع $f(x) = (x-1)^2 - 4$ همواره منفی است.

(حسابان، تابع)

۱۱۶- گزینه‌ی «۱»

تابع f در بازه‌ی $[-1,1]$ شرایط قضیه‌ی رول را دارد هرگاه:

(۱) در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته باشد:

چون هر یک از ضابطه‌های f چند جمله‌ای و در دامنه‌ی خود پیوسته‌اند پس تنها باید شرط پیوستگی در $x = 0$ (نقطه‌ی مرزی) را بنویسیم:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + cx) = 0 = f(0) \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ax+b) = b \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} b = 0$$

(۲) در بازه‌ی $(-1,1)$ مشتق‌پذیر باشد:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, -1 \le x < 0 \\ x^2 + cx, 0 \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} a, -1 < x < 0 \\ 2x + c, 0 \le x < 1 \end{cases}$$

برای مشتق‌پذیر بودن f در بازه‌ی $(-1,1)$ باید مشتق‌های راست و چپ در $x = 0$ برابر باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_-(0) = a \\ f'_+(0) = 2(0) + c \end{cases} \Rightarrow a = c$$

(۳) $f(-1) = f(1)$ باشد:

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b \\ f(1) = 1 + c \end{cases} \Rightarrow -a + b = 1 + c$$

$$\xrightarrow[a=c]{b=0} -a + 0 = 1 + a \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

(دیفرانسیل، کاربرد مشتق)

۱۱۷- گزینه‌ی «۴»

با کمک فرمول مشتق تابع مرکب، مشتق fog را در $x = 2$ می‌نویسیم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow (fog)'(2) = g'(2)f'(g(2))$$

چون $g(2) = \frac{1}{4}\sqrt{5(2) - 9} = \frac{1}{4}$ بنابراین:

$$(fog)'(2) = g'(2)f'(\frac{1}{4}) \quad (*)$$

با مشتق‌گیری از توابع f و g خواهیم داشت:

$$f(x) = \sin^2 \pi x \Rightarrow f'(x) = 2\pi \sin \pi x \cos \pi x$$
$$\Rightarrow f'(\frac{1}{4}) = 2\pi \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{4} = \pi$$

$$g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{5x - 9} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2\sqrt{5x-9}} \Rightarrow g'(2) = \frac{5}{8}$$

بنابراین از (*) و مقادیر به دست آمده، حاصل مشتق را می‌یابیم:

$$(fog)'(2) = \frac{5}{8} \times \pi = \frac{5\pi}{8}$$

(دیفرانسیل، مشتق)

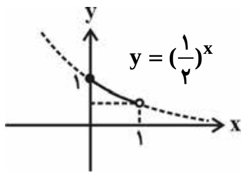
۱۱۸- گزینه‌ی« ۲»

ابتدا تابع $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

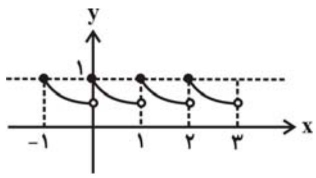
$$\begin{cases} f(x) = [x] - x \\ g(x) = ۲^x \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = ۲^{[x]-x}$$

از آنجا که تابع $y = x - [x]$ و در نتیجه $y = [x] - x$ توابعی متناوب با دوره‌ی تناوب یک هستند تابع gof هم تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب یک است بنابراین برای رسم نمودار gof کافی است نمودار را در یک دوره‌ی تناوب رسم کنیم و سپس آن را به بازه‌های دیگر تعمیم دهیم.

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow gof(x) = ۲^{-x} = (\frac{۱}{۲})^x \Rightarrow$$



بنابراین نمودار تابع در R به صورت زیر است.



با توجه به نمودار، تابع در نقاط صحیح دارای ماکزیمم نسبی است ولی می‌نیمم نسبی ندارد.

(دیفرانسیل، کاربرد مشتق)

۱۱۹- گزینه‌ی« ۴»

راه حل اول: از تابع $y = \frac{۳a + x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}$ مشتق می‌گیریم و نقطه‌ی می‌نیمم را می‌یابیم:

$$y = \frac{۳a + x}{\sqrt[۴]{a^۳x}} = \frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}}(\frac{۳a + x}{\sqrt[۴]{x}})$$

$$\Rightarrow y' = \frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}} \times \frac{\sqrt[۴]{x} - \frac{۱}{۴\sqrt[۴]{x^۳}}(۳a + x)}{\sqrt[۴]{x^۲}}$$

اگر در صورت، مخرج مشترک بگیریم:

$$\Rightarrow y' = \frac{۱}{\sqrt[۴]{a^۳}} \times \frac{۴x - (۳a + x)}{۴\sqrt[۴]{x^۵}} = \frac{۳(x - a)}{۴\sqrt[۴]{x^۵}} = ۰ \Rightarrow x = a$$

چون a مثبت است پس در همسایگی $x = a$ مخرج مثبت است و جدول تعیین علامت مشتق در همسایگی a به صورت زیر است:

		a
y'	−	+
	↘	↗

$\Rightarrow$ طول نقطه‌ی می‌نیمم تابع است : $x = a$

با قرار دادن $x = a$ در تابع مقدار می‌نیمم را می‌یابیم:

$$y(a) = \frac{۳a + a}{\sqrt[۴]{a^۳ - a}} = \frac{۴a}{a} = ۴$$

راه حل دوم: چون a و x مثبت هستند:

$$y = \frac{۳a + x}{\sqrt[۴]{a^۳x}} = \frac{۳a}{\sqrt[۴]{a^۳x}} + \frac{x}{\sqrt[۴]{a^۳x}}$$

$$= ۳\sqrt[۴]{\frac{a^۴}{a^۳x}} + \sqrt[۴]{\frac{x^۴}{a^۳x}} = ۳\sqrt[۴]{\frac{a}{x}} + \sqrt[۴]{(\frac{x}{a})^۳}$$

با فرض $\sqrt[۴]{\frac{x}{a}} = t \ge ۰$ داریم: (عبارت با فرجه‌ی زوج منفی نمی‌شود.)

$$y = \frac{۳}{t} + t^۳$$

می‌نیمم این عبارت، همان می‌نیمم عبارت داده شده است بنابراین:

$$y' = \frac{-۳}{t^۲} + ۳t^۲ = ۰ \Rightarrow t^۴ = ۱ \xrightarrow{t \ge ۰} t = ۱$$

$\Rightarrow y(۱) = ۳ + ۱ = ۴$: می‌نیمم

(دیفرانسیل، کاربرد مشتق)

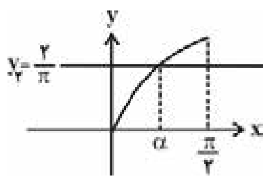
۱۲۰- گزینه‌ی« ۴»

برای بررسی جهت تقعر تابع، باید مشتق دوم بگیریم:

$$y = \sin x + \frac{x^۲}{\pi} \Rightarrow y' = \cos x + \frac{۲x}{\pi} \Rightarrow y'' = -\sin x + \frac{۲}{\pi} = ۰$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{۲}{\pi}$$

با رسم نمودارهای $y_۱ = \sin x$ و $y_۲ = \frac{۲}{\pi}$ در یک دستگاه مختصات در بازه‌ی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ داریم:



نمودارها یک نقطه‌ی تقاطع دارند پس در یک نقطه جهت تقعر تابع عوض می‌شود. بنابراین:

$$\Rightarrow \begin{cases} [۰, \alpha) : \frac{۲}{\pi} > \sin x \Rightarrow \frac{۲}{\pi} - \sin x > ۰ \Rightarrow y'' > ۰ \Rightarrow \text{تقعر رو به بالا} \\ (\alpha, \frac{\pi}{۲}] : \frac{۲}{\pi} < \sin x \Rightarrow \frac{۲}{\pi} - \sin x < ۰ \Rightarrow y'' < ۰ \Rightarrow \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$$

بنابراین تقعر تابع y در بازه‌ی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ ابتدا رو به بالا سپس رو به پایین است.

(دیفرانسیل، کاربرد مشتق)

۱۲۱- گزینه‌ی« ۱»

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan\pi x}{2x-\sqrt{x}}=\frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1-\tan\pi x}{2x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{-\pi(1+\tan^2\pi x)}{2-\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{-\pi(1+\tan^2\frac{\pi}{4})}{2-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}}=\frac{-2\pi}{1}=-2\pi$$

(دیفرانسیل، کاربرد مشتق)

۱۲۲- گزینه‌ی« ۳»

نمودار تابع f مجانب افقی خود را در نقطه‌ای به طول $x=0$ قطع کرده، بنابراین چون $f(0)=2$ است پس خط $y=2$ مجانب افقی تابع است.

بنابراین:
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a=2$$

همچنین با توجه به شکل، نمودار f در سمت راست محور yها بر محور xها مماس است. بنابراین معادله‌ی تلاقی تابع f با خط $y=0$ (محور xها) ریشه‌ی مکرر می‌دهد:

$$f(x)=\frac{2x^2+bx+2}{x^2+1}=0\Rightarrow 2x^2+bx+2=0$$

برای این‌که معادله‌ی فوق ریشه‌ی مکرر (در اینجا مضاعف) بدهد باید $\Delta=0$ باشد. بنابراین:
$$\Delta=0\Rightarrow b^2-4(2)2=0$$

$$\Rightarrow b^2=16\Rightarrow b=\pm4$$

چون منحنی در سمت راست محور yها بر محور xها مماس شده، باید ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد. بنابراین $b=-4$ قابل قبول است زیرا به ازای آن:
$$2x^2+bx+2=0\Rightarrow 2x^2-4x+2=0$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2=0\Rightarrow x=1>0$$

(دیفرانسیل، کاربرد مشتق)

۱۲۳- گزینه‌ی« ۴»

$$f(x)=\int_1^x\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\text{شیب خط مماس}: m=f'(x)=1\times\frac{1}{1+x^2}\xrightarrow{x=1}m=\frac{1}{2}\\ f(1)=\int_1^1\frac{dt}{1+t^2}=0\Rightarrow A(1,0):\text{نقطه‌ی تماس}\end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی خط مماس برابر است با:

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-0=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow 2y=x-1$$

یادآوری: $\int_a^a f(x)dx=0$

(دیفرانسیل، انتگرال)

۱۲۴- گزینه‌ی« ۴»

مساحت ناحیه‌ی محدود به منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$، محور xها و دو خط $x=\frac{-\pi}{3}$ و $x=\frac{\pi}{3}$ برابر است با:

(دقت کنید که f در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$ مثبت است.)

$$S=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

حال حاصل هر یک از انتگرال‌ها را جداگانه می‌یابیم:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\tan^2 x)dx=\tan x\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}\qquad(*)$$

اما در مورد $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ چون تابع $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ تابعی فرد است بنابراین حاصل انتگرال فوق صفر است. در نتیجه:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x}dx\overset{(*)}{=\!=}2\sqrt{3}$$

یادآوری (۱): اگر f فرد باشد. $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

یادآوری (۲): $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

(دیفرانسیل، انتگرال)