Subject:
Year. Month. Date. ( )

ریاضی عمومی

رابطه و تابع:

رابطه: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. هر زیر مجموعه از $A\times B$ را یک رابطه از A به B

می‌گوییم. بنابراین R یک رابطه از A به B است هرگاه $R\subseteq A\times B$.

* فرض کنید $A=\{1,2\}$ ، $B=\{a,b\}$ در این صورت کدامیک از گزاره‌های زیر یک رابطه است؟ از A به B

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

$R_1=\{(1,a),(2,a),(2,b)\}\subseteq A\times B$ — R_1 یک رابطه از A به B می‌باشد

$R_2=\{(1,b),(a,2)\}\nsubseteq A\times B$ — R_2 یک رابطه از A به B نمی‌باشد

$R_3=\{(1,b)\}\subseteq A\times B$ — R_3 یک رابطه از A به B می‌باشد

* فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ در این صورت رابطه " $<$ " از A به B را بدست آورید.

$<=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B \text{ و } a<b\}$

$=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\}\subseteq A\times B$

$>=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B \text{ و } a>b\}$

$=\{(2,1),(3,1),(3,2)\}\subseteq A\times B$

وارون رابطه: وارون یک رابطه یعنی جای مؤلفه‌های یک زوج مرتب را عوض کنیم و با نماد R^{-1}

نمایش می‌دهیم. فرض کنید R یک رابطه از A به B باشد. وارون R را با R^{-1} نشان می‌دهیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $R^{-1}=\{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$

* فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{a,b\}$ در این صورت وارون رابطه زیر را بدست آورید: $R=\{(1,a),(2,b),(1,b)\}$

$R^{-1}=\{(a,1),(b,2),(b,1)\}$

تابع: فرض کنید x و y دو مجموعه و F یک رابطه از x به y باشد. گوییم F یک تابع از x به y است هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) بازای هر $x\in X$ وجود دارد $y\in Y$ به طوریکه $(x,y)\in F$

۲) اگر $(x,y)\in F$ و $(x,z)\in F$ آنگاه $z=y$.

قرارداد:

۱) هرگاه F یک تابع از x به y باشد آنرا با نماد $F:X\to Y$ نشان می‌دهیم

۲) اگر F یک تابع از X به Y باشد بجای $(x,y)\in F$ می‌نویسیم $y=F(x)$ ، تساوی اخیر را ضابطه تابع F می‌نامیم.

* فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b,c,d\}$ و F یک تابع از A به B باشد در این صورت کدامیک از رابطه‌های زیر تابع می‌باشد؟

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date ( )

۱) $F=\{(1,a),(2,b),(2,c)\}$ × شرط ۱ برقرار نیست.

۲) $F=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$ ✓ شرط ۱ و ۲ برقرار است

۳) $F=\{(1,a),(2,\alpha)\}$ × شرط ۱ برقرار نیست

۴) $F=\{(1,a),(2,b),(3,c),(2,b)\}$ ✓ شرط ۱ و ۲ برقرار است

۵) $F=\{(1,a),(2,b)\}$ × شرط ۱ برقرار نیست

انواع توابع:

توابع چند جمله ای - کسری - رادیکالی با فرجه زوج - رادیکالی با فرجه فرد.

[۱] توابع چند جمله ای: $\boxed{D=\mathbb{R}}$

$$F(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x + a_0 \quad | \quad a_i\in R \ , \ 0\leqslant i\leqslant n \ , \ a_n\neq 0$$

$F(x)$ را یک چند جمله ای از درجه n می نامیم.

دامنه یک تابع چند جمله ای مجموعه اعداد حقیقی می باشد. [دامنه یعنی مجموعه مقادیر مجاز x می باشد]

[۲] توابع کسری (گویا):

$$f(x)=\frac{P(x)}{q(x)} \qquad D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

خارج قسمت دو تابع چند جمله ای را یک تابع کسری یا گویا می‌گوییم. فرض کنید $F(x)=\frac{P(x)}{q(x)}$ که در آن

$P(x)$ و $q(x)$ دو تابع چند جمله ای اند. چون کسر زمانی تعریف می شود که مخرج آن مخالف صفر باشد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بنابراین دامنه تابع گویا یعنی مقادیر مجاز x از فرمول زیر بدست می‌آید.

$F(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$

* دامنه توابع زیر را بدست آورید.

1) $F(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $x^2 - 1 = 0$

$\Delta = 4 > 0$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ $D_F = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

2) $F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2-x-20} = 0$

$x^2 - x - 20 = 0$ $a = 1$ $b = -1$ $c = -20$

$\Delta = b^2 - 4ac = 81 > 0$

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -4 \end{cases}$ $D_F = \mathbb{R} - \{-4, 5\}$

$\boxed{3}$ توابع رادیکالی با فرجه فرد:

اعداد زوج $= 2k$

اعداد فرد $= 2k \pm 1$

با توجه به این که زیر تابع رادیکالی با فرجه فرد می‌تواند اعداد $+$ ، $-$ و 0 قرار بگیرد

$(0)^3 = 0$ ، $(-)^3 = -$ ، $(+)^3 = +$

لذا دامنه تابع رادیکالی با فرجه فرد از فرمول زیر بدست می‌آید.

$f(x) = \sqrt[2k+1]{h(x)}$

$D_F =$ دامنه عبارت زیر رادیکال $\Rightarrow D_F = D_h$

* دامنه توابع زیر را بدست آورید:

1) $F(x) = \sqrt[7]{\frac{1}{x-1}}$ $D_F = D_{\frac{1}{x-1}} = \mathbb{R} - \{1\}$

2) $F(x) = \sqrt[99]{\frac{x^2-2x+4}{x^2-6x+9}}$ $D_F = D_{\frac{x^2-2x+4}{x^2-6x+9}} = \mathbb{R} - \{3\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x^2-6x+9=0 \qquad a=1 \quad b=-6 \qquad c=9$

$\Delta = b^2-4ac \rightarrow \Delta=0$

$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2(1)}=\frac{6}{2}=3$

$\boxed{4}$ تابع رادیکالی با فرجه زوج:

$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)} \qquad \sqrt[2k]{+,0}$

چون یک رادیکال با فرجه زوج زمانی تعریف می‌شود که عبارت زیر رادیکال + و ۰ باشد.

بنابراین برای تعیین دامنه تابع رادیکالی با فرجه زوج باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر

قرار داده تا مقادیر مجاز x بدست آید.

$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)} \qquad D_f =$ عبارت زیر رادیکال ≥ 0

$= \{x \mid g(x) \geq 0\}$

* دامنه توابع زیر را بدست آورید:

1) $f(x)=\sqrt{2x-6}$

$2x-6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq \frac{6}{2} \Rightarrow x \geq 3$

$D_f=\{x \mid 2x-6 \geq 0\}=\{x \mid x \geq 3\}=[3,+\infty)$

2) $f(x)=\sqrt[4]{\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}}$

$\frac{x^2-3x}{-x^2+2x+3} \geq 0 \qquad \begin{cases} x^2-3x=0 \\ -x^2+2x+3=0 \end{cases}$

$x^2-3x=0$

$\Delta=b^2-4ac=9>0 \qquad x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=0 \end{cases}$

$-x^2+2x+3=0 \quad a=-1 \quad b=2 \quad c=3$

$\Delta = b^2-4ac = 16 > 0$

$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

		-1		0		3	
x^2-3x	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$-x^2+2x+3$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}$	$-$	$\emptyset$	$+$	0	$-$	$\emptyset$	$-$
≥ 0	////		ج		///		///

$D_f = (-1, 0]$

تعریف : فرض کنید f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند توابع جدید $f+g$ و $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$

2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$

3. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$

* فرض کنید تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{4-x}$ در این صورت ضابطه و دامنه توابع $f \pm g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید؟

$f(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$

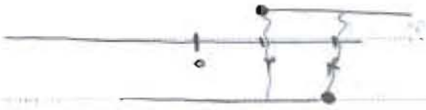
$D_f = \{x \mid x-2 \geq 0\} = \{x \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$

$D_g = \{x \mid 4-x \geq 0\} = \{x \mid 4 \geq x\} = (-\infty, 4]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = \sqrt{x-2} \pm \sqrt{4-x}$

$x \in D_f \cap D_g = [2, 4]$



$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \sqrt{x-2} \times \sqrt{4-x}$

$x \in D_f \cap D_g = [2, 4]$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x}}$

$x \in (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$

$x \in [2, 4] - \{4\} = [2, 4)$

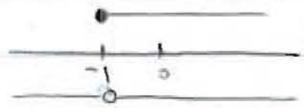
* فرض کنید تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ ، ضابطه و دامنه توابع $f \pm g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را حساب کنید؟

$D_f = \{x \mid x+1 \geq 0\} = \{x \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty)$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = \sqrt{x+1} \pm \frac{2x+1}{x+1}$

$x \in D_f \cap D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$



$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = \sqrt{x+1} \times \frac{2x+1}{x+1}$

$x \in D_f \cap D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}}$

$x \in (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) - \{2\}$

Subject :

Year .　　Month .　　Date .　( )

* دامنه توابع زیر را بدست آورید.

1. $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$　　$x^2+2x \geq 0$　　$x^2+2x=0$　　$a=1$　$b=2$　$c=0$

$\Delta=b^2-4ac=4>0 \Rightarrow x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases}$

	-2		0	
x^2+2x	+	0 −	0	+
$\sqrt{x^2+2x}\geq 0$	+ ق	−	0	+ ق

$D_f=(-\infty,-2) \cup [0,+\infty)$

2. $f(x)=\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$x+1\geq 0 \rightarrow x\geq -1$

$4-x^2>0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

	-2		2	
$4-x^2$	+	0 −	0	+
$4-x^2>0$	////	ق		////

$D_f=\left([-1,+\infty)\right) \cap \left((-2,2)\right)=[-1,2)$

3. $f(x)=\frac{4x^2-9}{2x-3}$

$2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$　　$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

4. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-x}}$

$x^2-x=0$　　$a=1$　$b=-1$　$c=0$

$\Delta=b^2-4ac=1>0$

$x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=1 \end{cases}$

$D_f=D_{\frac{1}{x^2-x}}=\mathbb{R}-\{0,1\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\checkmark$ 5. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x\sqrt{x^2-9}}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2-9} \geq 0 \Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$

		-3		$+3$	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2-9 \geq 0$	ج	0		0	ج

$D_F = \mathbb{R} - \{0\} \cap (-\infty, -3] \cup [+3, +\infty) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

$\checkmark$ 6. $F(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x}$

$\sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$x = 0$

$D_F = \{x \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty) \cap \mathbb{R} - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$

تعریف 8 دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ را مساوی اند که دوشرط زیر برقرار باشد:

1) $D_F = D_g$

2) $(x \in D_F = D_g)$ $\quad f(x) = g(x)$

* کدامیک از توابع داده شده برابرند؟

1) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x}{x}$ $\qquad g(x) = 2x+5$

$D_F = \mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$ $\qquad$ $F(x) \neq g(x) \Leftarrow$ چون شرط 1 برقرار نیست

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2. $f(x)=\frac{۲x-۴}{۲x-۴}$ $g(x)=1$

$۲x-۴=0 \rightarrow ۲x=۴ \rightarrow x=۲$ $D_f=\mathbb{R}-\{۲\} \neq D_g=\mathbb{R}$

3. $f(x)=\frac{(۲x+۵)(x^۲+1)}{(x^۲+1)}$ $g(x)=۲x+۵$

$x^۲+1=0$ $a=1$ $b=0$ $c=1$

$\Delta=-۴$ $\Delta<0$ ریشه حقیقی ندارد $D_f=\mathbb{R}-\{\}=\mathbb{R}$

$D_g=\mathbb{R}$

$D_f=D_g$ شرط (۱) برقرار است ✓

$f(x)=\frac{(۲x+۵)\cancel{(x^۲+1)}}{\cancel{(x^۲+1)}}=۲x+۵=g(x)$ شرط (۲) برقرار است ✓

$\Leftarrow f(x)=g(x)$

ترکیب توابع:

$(fog)(x)=f(g(x))$ $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$(gof)(x)=g(f(x))$ $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

$(fof)(x)=f(f(x))$

$(gog)(x)=g(g(x))$

* فرض کنید $f(x)=\frac{x}{x-۲}$, $g(x)=\frac{1}{x}$ دامنه و ضابطه fog , gof

و fof و gog را بیابید.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{1}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-2x}{x}} = \frac{x}{x(1-2x)} = \frac{1}{1-2x}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{2\}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid x \in \mathbb{R} - \{\tfrac{1}{2}\}\} = \mathbb{R} - \{0, \tfrac{1}{2}\}$$

- $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow \frac{1}{x} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x-2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\frac{x}{x-2}} = \frac{x-2}{x}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{1\} \mid \frac{x}{x-2} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

- $\frac{x}{x-2} \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \frac{x}{x-2} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$

$D_g=\mathbb{R}$ $\qquad$ $D_F=[0,+\infty)$

* توابع $F(x)=\sqrt{2x}$ و $g(x)=x^2+1$ در این صورت Fog ، goF و دامنه آنها را تعیین کنید.

$(fog)(x)=f(g(x))=F(x^2+1)=\sqrt{2(x^2+1)}$

$D_{Fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_F\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+1\in[0,+\infty)\}=\mathbb{R}$

$(gof)(x)=g(F(x))=g(\sqrt{2x})=(\sqrt{2x})^2+1=2x+1$

$D_{goF}=\{x\in D_F \mid F(x)\in D_g\}=\{x\in[0,+\infty) \mid \sqrt{2x}\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$

* برای توابع F و g هر یک از موارد زیر توابع مرکب goF و Fog را با دامنه اش تعیین کنید.

$D_F=\mathbb{R}-\{0\}$ $\qquad$ $D_g=\mathbb{R}-\{\}=\mathbb{R}$

$\checkmark$ 1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$

$D_F=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\qquad$ $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{x+1}{x}$

$D_F=[1,+\infty)$ $\qquad$ $D_g=\mathbb{R}$

$\checkmark$ 3) $F(x)=\sqrt{x-1}$ $\qquad$ $g(x)=3-x$

$\boxed{1}$ $Fog(x)=F(g(x))=F\left(\dfrac{3}{x^2+1}\right)=\dfrac{1}{\frac{3}{x^2+1}}=\dfrac{x^2+1}{3}$

$D_{Fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_F\}=\left\{x\in\mathbb{R} \mid \dfrac{3}{x^2+1}\in\mathbb{R}-\{0\}\right\}=\mathbb{R}$

$\dfrac{3}{x^2+1}\in\mathbb{R}-\{0\}\Rightarrow\dfrac{3}{x^2+1}\neq 0\Rightarrow 3\neq 0\Rightarrow D=\mathbb{R}$

$goF(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{(\frac{1}{x})^2+1}=\dfrac{3}{\frac{1}{x^2}+1}=\dfrac{3}{\frac{1+x^2}{x^2}}=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$

$D_{goF}=\{x\in D_F \mid F(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}-\{0\} \mid \dfrac{1}{x}\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}-\{0\}$

$\boxed{2}$ $fog(x)=f(g(x))=f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\dfrac{\frac{x+1}{x}+1}{\frac{x+1}{x}+2}=\dfrac{\frac{2x+1}{x}}{\frac{3x+1}{x}}=\dfrac{2x^2+x}{3x^2+x}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R}-\{0\} \mid \frac{3}{x^2+1}\in \mathbb{R}-\{2\}\}=\mathbb{R}-\{0,2$

$gof(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\dfrac{\frac{x+1}{x+2}+1}{\frac{x+1}{x+2}}=\dfrac{\frac{2x+3}{x+2}}{\frac{x+1}{x+2}}=\dfrac{(2x+3)(x+2)}{(x+2)(x+1)}$

$=\dfrac{2x+3}{x+1}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in \mathbb{R}-\{-2\} \mid \frac{x+1}{x+2}\in \mathbb{R}-\{0\}\}$
$=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

$\boxed{3}$ $fog(x)=f(g(x))=f(3-x)=\sqrt{3-x-1}=\sqrt{2-x}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R} \mid 3-x\in[1,+\infty)\}=(-\infty,2]$ *

$3-x\in[1,+\infty)=3-x\geq 1 \Rightarrow -x\geq -2 \quad x\leq 2 \Rightarrow x\in(-\infty,2]$

$gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x-1})=3-\sqrt{x-1}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[1,+\infty) \mid \sqrt{x-1}\in \mathbb{R}\}=[1,+\infty)$

$*\ \{x\in \mathbb{R} \mid 3-x\in[1,+\infty)\}=\{x\in \mathbb{R} \mid (-\infty,2]\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

توابع خاص :

۱- تابع ثابت $f(x)=c$

۲- تابع همانی $f(x)=x$

۳- تابع قدر مطلق $F(x)=|x|$

۴- تابع فاکتوریل $f(n)=n!$

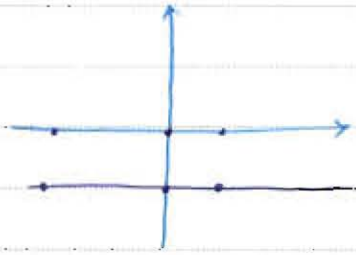
۵- تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$

تعریف : اگر برد تابع F یک مجموعه یک‌عضوی باشد آنگاه F را تابع ثابت می‌نامیم و آن را با $F(x)=c$ نشان می‌دهیم. (c عدد ثابت) $F: \mathbb{R} \longrightarrow \{c\}$

$y=f(x)=-2$

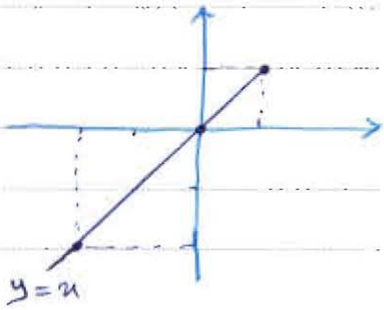
$F(0)=-2$ $F(1)=-2$ $F(-2)=-2$

* همواره موازی محور xها



تعریف : اگر دامنه و برد تابع F مجموعه اعداد حقیقی باشند و برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $F(x)=x$ آنگاه تابع F را یک تابع همانی می‌نامیم.

$F(0)=0$ $F(1)=1$ $F(-2)=-2$

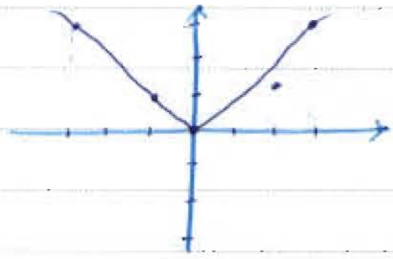


تعریف: تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ با ضابطه $F(x)=|x|$ را تابع قدرمطلق می‌نامیم.

$F(2)=|2|=2$ $\qquad$ $F(3)=|3|=3$

$F(-3)=|-3|=-(-3)=3$ $\qquad$ $F(-1)=|-1|=1$

$F(0)=|0|=0$



$$F(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

تعریف: تابع فاکتوریل تابع مانند $F: W\cup\{0\}\to\mathbb{N}$ با ضابطه $F(n)=n!$ می‌باشد که در آن

$0!=1$

$1!=1$

$2!=2\times 1$

$3!=3\times 2\times 1$

$6!=6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 1$

خواص قدرمطلق:

$|x|=|-x|$

$|xy|=|x|.|y|$

$|x+y|\leq |x|+|y|$

$|x+y|=|(-7)+5|=|-2|=2$ ، $|(-2)+(-3)|=|-5|=5$

$|x|+|y|=|-7|+|5|=7+5=12$ ، $|-2|+|-3|=2+3=5$

$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

$|x|-|y|\leq |x-y|$

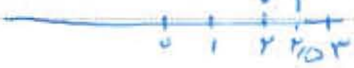
$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ یا $x \geq a$

تعریف: تابع حقیقی $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ با ضابطه تعریف $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح x می‌نامیم.

توجه کنید که برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم و عبارت است از بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x.

$[x] =$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x



$[2/5]=2$

$[3]=3$ $\quad [1/75]=1$

$[-1/5]=-2$ $\quad [0/99]=0$

* تابع $y=[x]$ را در فاصله $-3 \leq x \leq 3$ رسم کنید.

$-3 \leq x < -2 \Rightarrow y=[x]=-3$

$-2 \leq x < -1 \Rightarrow y=[x]=-2$

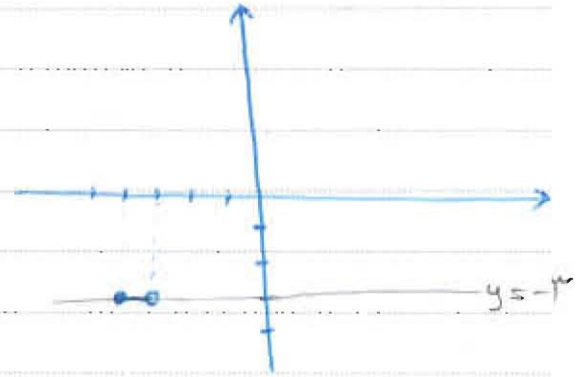
$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y=[x]=-1$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow y=[x]=0$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow y=[x]=1$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow y=[x]=2$

$x=3 \Rightarrow y=[x]=3$



تابع زوج و فرد: تابع $y=f(x)$ را یک تابع زوج می‌نامیم هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم:

1) $-x \in D_f$

2) $\underbrace{f(-x)}_{\text{شروع}} = f(x)$

تابع $y=f(x)$ را یک تابع فرد می‌نامیم هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم:

1) $-x \in D_f$

2) $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{تابع زوج} \\ -f(x) & \text{تابع فرد} \end{cases}$$

* تنها تابعی که هم زوج و هم فرد است را تابع ثابت صفر می‌نامیم. $\star\ f(x)=0$

* تعیین کنید کدامیک از توابع زیر زوج یا فرد است؟

1) $f(x) = 3x^6 + 5x^4 - 2x^2 + 3$

$f(-x) = 3(-x)^6 + 5(-x)^4 - 2(-x)^2 + 3$

$= 3x^6 + 5x^4 - 2x^2 + 3 = \underline{\underline{f(x)}}$ تابع زوج است.

2) $f(x) = 3x^3 - 5x$

$f(-x) = 3(-x)^3 - 5(-x) = -3x^3 + 5x = -(3x^3 + 5x) = \underline{\underline{-f(x)}}$

تابع فرد است.

3) $f(x) = 7x^3 - 6$

$f(-x) = 7(-x)^3 - 6 = -7x^3 - 6 = -(7x^3 + 6)$

این تابع نه زوج است و نه فرد

4) $f(x) = x|x|$

$f(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -(x|x|) = \underline{\underline{-f(x)}}$

تابع فرد است.

✓ 5) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

$-f(x) = \dfrac{(-x)^2+1}{-x} = \dfrac{x^2+1}{-x} = -\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) = \underline{\underline{-f(x)}}$

تابع فرد است

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین : تعیین کنید کدام یک از توابع زیر زوج یا فرد است؟

1) $f(x) = \dfrac{4x^2-5}{2x^3+x}$ $\quad f(-x) = \dfrac{4(-x)^2-5}{2(-x)^3-x} = \dfrac{4x^2-5}{-(2x^3+x)} = -\dfrac{4x^2-5}{2x^3+x}$

$= -f(x)$ تابع فرد است

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^5$ $\quad f(-x) = \sqrt[3]{-x} + -x^5 = -(\sqrt[3]{x} + x^5) = -f(x)$

تابع فرد است

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$ $\quad f(-x) = \dfrac{|-x|}{-x^2+1} = \dfrac{|x|}{x^2+1} = f(x)$ تابع زوج است

4) $f(x) = f(x) = \sqrt{x^2-1}$ $\quad f(-x) = \sqrt{-x^2-1} = \sqrt{x^2-1} = f(x)$

تابع زوج است

تعریف : تابع $f: A \to B$ را یک به یک گوییم هرگاه به ازای هر x_1 و x_2 از دامنه f

داشته باشیم : $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

* کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟

1) $f(x) = 2x^3 - 5$

$f(x_1) = f(x_2) \implies 2(x_1)^3 \cancel{-5} = 2(x_2)^3 \cancel{-5}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\Rightarrow \frac{\cancel{2}x_1^3}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}x_2^3}{\cancel{2}} \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$ تابع یک به یک

۲) $F(x) = \sqrt[3]{x+5}$

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow (\sqrt[3]{(x_1)+5})^3 = (\sqrt[3]{x_2+5})^3 \Rightarrow x_1 \cancel{+5} = x_2 \cancel{+5}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ تابع یک به یک

۳) $F(x) = \frac{|x|-3}{4}$

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow \cancel{4}\left(\frac{|x_1|-3}{\cancel{4}}\right) = \cancel{4}\left(\frac{|x_2|-3}{\cancel{4}}\right) \Rightarrow |x_1| \cancel{-3} = |x_2| \cancel{-3}$

$|x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$ تابع یک به یک نیست

۴) $F(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-3}{x_1+1} = \frac{2x_2-3}{x_2+1} \Rightarrow$

$2x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 \cancel{-3} = 2x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2 \cancel{-3} \Rightarrow 2x_1 + 3x_1 = 2x_2 + 3x_2$

$\Rightarrow \frac{\cancel{5}x_1}{\cancel{5}} = \frac{\cancel{5}x_2}{\cancel{5}} \Rightarrow x_1 = x_2$ تابع یک به یک

تمرین: کدامیک از توابع زیر زوج یا فرد است؟

۱) $F(x) = x^2 + |x| - 2$

$F(-x) = -x^2 + |-x| - 2 = x^2 + |x| - 2 = f(x)$ تابع زوج است

۲) $F(x) = x^3 + x$

$F(-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$ تابع فرد است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۳) $F(x) = x\sqrt[3]{x}$

$F(-x) = (-x)(\sqrt[3]{-x}) = (-x)(-\sqrt[3]{x}) = +x\sqrt[3]{x}$ تابع زوج است

۴) $F(x) = |x| - x$

$F(-x) = |-x| - (-x) = -(-|x| - x) \neq F(x)$ تابع نه زوج و نه فرد است

تمرین : یک به یک بودن توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $F(x) = (4 - x)^3$

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow (4 - x_1)^3 = (4 - x_2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{(4-x_1)^3} = \sqrt[3]{(4-x_2)^3}$

$\cancel{4} - x_1 = \cancel{4} - x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

۲) $F(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow \sqrt{9 - x_1^2} = \sqrt{9 - x_2^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \cancel{9} - x_1^2 = \cancel{9} - x_2^2 \Rightarrow \cancel{-}x_1^2 = \cancel{-}x_2^2$

$x_1^2 \neq x_2^2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$ تابع یک به یک نیست

۳) $F(x) = \frac{2x}{x+1}$

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{x_1+1} = \frac{2x_2}{x_2+1} \Rightarrow \cancel{2x_1x_2} + 2x_1 = \cancel{2x_2x_1} + 2x_2$

$\Rightarrow \cancel{2}x_1 = \cancel{2}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ تابع یک به یک است

۴) $F(x) = \frac{3}{x} - 1$

$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow \frac{3}{x_1} \cancel{-1} = \frac{3}{x_2} \cancel{-1} \Rightarrow \frac{3}{x_1} = \frac{3}{x_2} \Rightarrow$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تابع یک به یک است $\Rightarrow 3x_2 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$

تابع وارون: وارون تابع F^{-1}: تابع $F: A \to B$ را در نظر بگیرید و آن را به صورت

مجموعه ای از زوج های مرتب می نویسیم: $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$

رابطه g را به صورت زیر تعریف می کنیم: $g = \{(y, x) \mid y = F(x)\}$

واضح است که اعضای رابطه g از جابه جا کردن مولفه های اول و دوم رابطه F بدست می آیند.

وارون تابع F یا همان g را با F^{-1} نشان می دهیم: $F = \{(x, y) \mid y = F(x)\}$

$F: A \to B$

$F^{-1}: B \to A$

$F^{-1} = \{(y, x) \mid y = F(x)$

ویژگی های وارون تابع:

۱) اگر توابع $g_1: B \to A$ ، $g_2: B \to A$ وارون تابع $F: A \to B$ می باشد

آنگاه $g_1 = g_2$. [وارون تابع در صورت وجود منحصر به فرد است].

۲) اگر تابع F^{-1} وارون تابع F باشد آنگاه F نیز وارون تابع F^{-1} می باشد. $(F^{-1})^{-1} = F$

۳) برای تعیین تابع F^{-1} باید معادله $y = F(x)$ را بر حسب x حل کنیم، یعنی از این معادله مقدار

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

x را برحسب y بدست می‌آوریم. سپس اسم x و y را عوض می‌کنیم y بدست آمده

همان $F^{-1}(x)$ است.

* وارون توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $F(x) = 3x - 1$

$$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow 3x_1 - \cancel{1} = 3x_2 - \cancel{1} \Rightarrow \frac{\cancel{3}x_1}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{3}x_2}{\cancel{3}} \Rightarrow x_1 = x_2$$

تابع یک به یک

$$y = 3x - 1 \Rightarrow y + 1 = 3x \Rightarrow \frac{y+1}{3} = x \xrightarrow[\text{را عوض می‌کنیم}]{\text{اسم } x \text{ و } y} \frac{x+1}{3} = y = F^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow F^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

۲) $F(x) = \sqrt[5]{x^3 - 1}$ یک به یک است

$$y = \sqrt[5]{x^3-1} \Rightarrow (y)^5 = \left(\sqrt[5]{x^3-1}\right)^5 \Rightarrow y^5 = x^3 - 1 \Rightarrow y^5 + 1 = x^3$$

$$\sqrt[3]{y^5+1} = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x^5+1} = y = F^{-1}(x)$$

حد و پیوستگی:

فرض کنید تابع F در تمام نقاط بازه I که شامل a است بجز احتمالاً در a تعریف شده باشد.

گوییم حد تابع $F(x)$ وقتی که x به سمت a میل می‌کند برابر عدد L است هرگاه برای هر عدد

مثبت دلخواه $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ که $|x - a| < \delta$ آنگاه $|f(x) - L| < \varepsilon$

باشد و به طور خلاصه آن را با نماد $\lim\limits_{x \to a} F(x) = L$ نشان می‌دهیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضایای حد:

۱) $\lim_{x\to a} c = c$ $\qquad \lim_{x\to 0}(-6) = -6$

۲) $\lim_{x\to a} x = a$ $\qquad \lim_{x\to -2}(x) = -2$

۳) اگر حد توابع $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ باشد داریم:

آ) $\lim_{x\to a}\left(f(x) \overset{\times}{\pm} g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \overset{\times}{\pm} \lim_{x\to a} g(x) = L \overset{\times}{\pm} M$

$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 5x + 4) = \lim_{x\to 1} 3x^2 - \lim_{x\to 1} 5x + \lim_{x\to} 4 = 3 - 5 + 4 = 2$

ب) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M} \qquad M \neq 0$

ج) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

د) $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)| = |L|$

* با استفاده از قضایای حد حدهای زیر را محاسبه کنید.

$\lim_{x\to -1}(2x^2 - 1)(4x^3 + 1) = \lim_{x\to -1}(2x^2 - 1) \times \lim(4x^3 + 1) = 2 \times 3 = -6$

$\lim_{x\to -1}(2x + 3)^{99} = \left(\lim_{x\to -1}(2x + 3)^{99}\right) = (2x + 3)^{99} = (-2 + 3)^{99} = (1)^{99} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 5}{4x^3 + 7x - 6} = \frac{3(0)^2 - 5}{4(0)^3 + 7(0) - 6} = \frac{5}{6}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$4)\ \lim_{x\to 3}\sqrt{5x^2-4}=\sqrt{\lim_{x\to 3}(5x^2-4)}=\sqrt{(5(3)^2-4)}=\sqrt{41}$$

* حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}\quad \text{مبهم}$$

رفع ابهام = عامل صفرکننده باید از صورت و مخرج حذف شود.

$$\left[\lim_{x\to a}F(x)=\frac{0}{0}\quad (x-a)\ \text{عامل صفرکننده}\right]$$

عامل صفرکننده $(x-3)$

$$p(x)\,\big|\,\frac{q(x)}{m(x)} \qquad p(x)=q(x)\,m(x)+\frac{r(x)}{p(x)}$$

$$\overline{r(x)}$$

$$P(x)=(x-3)(x+3)+\frac{0}{x^2-9}=(x-3)(x+3)$$

$$\begin{array}{l|l} x^2-9 & x-3 \\ \hline -x^2+3x & x+3 \\ 3x-9 & \\ -3x+9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

اگر $r(x)=0 \Leftarrow q(x)\,m(x)$

اگر $r(x)\neq 0 \Leftarrow$ از فرمول $p(x)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

اتحاد مزدوج: $x^2-4=(x-2)(x+2) \qquad (x)^2-(a)^2=(x-a)(x+a)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\frac{0}{0}$$

عامل صفرکننده $(x-3)$ باید از صورت و مخرج حذف شود

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{27}{6}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-27 & x-3 \\ \hline -x^3+3x^2 & x^2+3x+9 \\ 3x^2-27 & \\ -3x^2+9x & \\ 9x-27 & \\ -9x+27 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

۳) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^2-1} = \dfrac{0}{0}$

عامل صفرکننده $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x-2 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+2 \\ \hline x^2+x-2 & \\ -x^2+x & \\ \hline 2x-2 & \\ -2x+2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$$

۴) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{|x|-2} = \dfrac{0}{0}$

$$|x| = \begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

عامل صفرکننده $(x+2)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{-(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{-1} = -6$$

۵) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \dfrac{0}{0}$

عامل صفرکننده: $(x-0) = x$

برای عبارات رادیکالی ها در مزدوج عبارتی که داخلش رادیکال نشسته باشد ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} \times \frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+9})^2-(3)^2}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+9-9}{\cancel{x}(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{3+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

۶) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

عامل صفرکننده $(x-4)$

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x})^2-(2)^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

حدهای یک طرفه : را برای توابع چند ضابطه ای ، قدر مطلق و جزء صحیح بکار می بریم.

حد چپ تابع $F(x)$ وقتی که x به a میل می کند برابر عدد L است و آن را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$\lim_{x\to a^-} F(x) = L$$

حد راست تابع $F(x)$ وقتی که x به a میل می کند برابر عدد L است و آن را با نماد

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = L$$

$$(x \to a^+) \equiv (x \to a \;,\; x > a)$$

$$(x \to a^-) \equiv (x \to a \;,\; x < a)$$

* حد توابع زیر را در نقطه داده شده بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 1 \\ 5x-2 & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} F(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x+2) = 3(1) + 2 = 5$$

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^-} (5x-2) = 5(1) - 2 = 3$$

قضیه :

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^-} F(x) = L \iff \lim_{x\to a} F(x) = L$$

$$\lim_{x\to a^+} F(x) \neq \lim_{x\to a^-} F(x) \implies \lim_{x\to a} F(x) = \text{وجود ندارد}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

* حد درانیجا وقتی قدرمطلق را برمی‌داریم باید در یک (-) ضرب کنیم چون 2^- هست

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{x^2-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 4 \\ \sqrt{x} + 2 & x \geq 4 \end{cases} \qquad x = 4$$

نقطه شکستگی

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x}+2 = 4 \qquad \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 4 \neq \lim_{x\to 4^-} f(x) = -1$$

حدتابع در نقطه $x=4$ وجود ندارد

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & -3 < x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x < 2 \\ -8 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^+} x^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} 2x+1 = -1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{x\to ۴^-} \frac{x-1}{[x]-۳} \qquad x\to ۴ \Rightarrow ۳\leq x<۴ \Rightarrow [x]=۳$$

$$= \lim_{x\to ۴^-} \frac{x-1}{۳-۳} = \frac{۴-1}{0} = \frac{۳}{0} = \infty$$ تعریف نشده

$$\lim_{x\to ۴^+} \frac{x-1}{[x]-۳} = \lim_{x\to ۴^+} \frac{x-1}{۴-۳} = \lim_{x\to ۴^+} x-1 = ۴-1=۳$$

* مقادیر a و b را چنان بیابید که حدچپ و راست درنقطه $x=۳$ باهم برابر باشند.

$$f(x)=\begin{cases} ax^۲+bx-1 & x\leq ۳ \\ ۲ & x=۳ \\ bx^۲-a & x>۳ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} bx^۲-a = ۹b-a$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} ax^۲+bx-1 = ۹a+۳b-1$$

$$\begin{cases} ۹b-a=۲ \\ ۹a+۳b-1=۲ \end{cases} \xrightarrow{-۳} \begin{cases} ۹b-a=۲ \\ ۳b+۹a=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹b-a=۲ \\ -۹b-۲۷a=-۹ \end{cases}$$

$$-۲۸a=-۷$$

$$\Rightarrow a=\frac{-۷}{-۲۸}=\frac{1}{۴}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$9b - a = 2 \xrightarrow{a=\frac{1}{4}} 9b - \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow 9b = 2 + \frac{1}{4} \Rightarrow 9b = \frac{8+1}{4}$$

$$\Rightarrow b = \frac{9}{4 \times 9} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

* مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در نقاط $x=2$ و $x=1$ حد داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2ax - b & x < 1 \\ bx^2 - 3a + 1 & 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{a(x^2-4)}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} bx^2 - 3a + 1 = \boxed{b - 3a + 1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2ax - b = \boxed{2a - b}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) \Rightarrow b - 3a + 1 = 2a - b \Rightarrow b - 3a - 2a + b = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{2b - 5a = -1} *$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{a(x^2-4)}{x-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) \frac{a(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = \boxed{4a}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} bx^2 - 3a + 1 = \boxed{4b - 3a + 1}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow 4b - 3a + 1 = 4a \Rightarrow 4b - 3a - 4a = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{4b - 7a = -1} *$$

$$-2\begin{cases} 2b - 5a = -1 \\ 4b - 7a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-4b} + 10a = +2 \\ \cancel{4b} - 7a = -1 \end{cases}$$

$$10a - 7a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{3}$$

PAPCO

پیوستگی: تابع $y=f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $f(a)$ موجود باشد

۲) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد [یعنی حد چپ و راست تابع با هم برابر باشد]

۳) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

* پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=3$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & x\neq 3 \\ 2 & x=3 \end{cases}$$

$f(3)=2$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-6 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^2+3x & x+2 \\ \hline 2x-6 & \\ -2x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 5$$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) \Rightarrow 5 \neq 2$ شرط (۳) برقرار نیست. پس تابع در $x=3$ پیوسته نیست.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x & 1 < x < 5 \end{cases}$$

$f(1) = x+2 = 1+2 = 3$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3x) = 3 \qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+2 = 1+2 = 3$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow ۳ = ۳$ هر سه شرط برقرار است. تابع در نقطه $x=1$ پیوسته است

$$f(x)=\begin{cases} x+۲a & x<-۲ \\ ۳ax+b & -۲\leq x\leq ۱ \\ ۳x-۲b & x>۱ \end{cases}$$

$\lim_{x\to(-۲)} f(x) = f(-۲)$ *

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ **

$f(-۲) = ۳a(-۲)+b = -۶a+b$

$\lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^+}(۳ax+b) = -۶a+b$

$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-}(x+۲a) = -۲+۲a$

$\lim_{x\to -۲} f(x) = f(-۲) \Rightarrow -۶a+b = -۲+۲a \Rightarrow \boxed{-۸a+b=-۲}$ *

$f(1) = ۳a(1)+b = ۳a+b$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(۳x-۲b) = ۳-۲b$ / $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ۳ax+b = ۳a+b$

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow ۳a+b = ۳-۲b \Rightarrow \boxed{۳a+۳b=۳}$ **

PAPCO

$$\begin{cases} -8a + b = -2 \\ 3a + 3b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24a - 3b = 6 \\ 3a + 3b = 3 \end{cases}$$

$$27a = 9 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad , \quad b = \frac{2}{3}$$

* مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه داده شده پیوسته باشد؟

الف)
$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & x > -2 \\ 5 & x = -2 \\ bx^2 + 2x & x < -2 \end{cases} \qquad \boxed{x = -2}$$

ب)
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x \geq 1 \\ 2ax - 3b & x < 1 \end{cases} \qquad \boxed{x = 1}$$

الف) $f(-2) = 5$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 2ax + b = -4a + b$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} bx^2 + 2x = 4b - 4$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow$$

$$4b - 4 = 5 \Rightarrow \boxed{b = \frac{9}{4}}$$

$$-4a + b = 5 \Rightarrow -4a + \frac{9}{4} = 5 \Rightarrow -4a = \frac{11}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-11}{16}}$$

ب) $f(1) = ax^{۲}+bx-1 = a+b-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} ax^{۲}+bx-1 = a+b-1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ۲ax-۳b = ۲a-۳b$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Rightarrow a+b-1 = ۲a-۳b \Rightarrow -a+۴b-1 = a+b-1$

$\Rightarrow -۲a+۳b$

$$\begin{cases} a+b-1 = a+b-1 \\ ۲a-۳b = a+b-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ a-۴b = -1 \end{cases}$$

* پیوستگی $F(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 3x+1 & x<0 \end{cases}$ را در نقطه $x=0$ را بررسی کنید.

$f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=0+1=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 3x+1=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) \Rightarrow 1=1$

$\lim\limits_{x\to 0} F(x)=1=F(0) \Rightarrow 1\neq 2$ شرط پیوستگی برقرار نیست.

← تابع در نقطه $x=0$ پیوسته نیست.

$F(x)=\begin{cases} x-1 & 0<x<1 \\ 1 & x=1 \\ 2x-2 & 1<x<5 \end{cases}$

$F(1)=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-2)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1} F(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1} F(x)=F(1) \Rightarrow 0\neq 1$ شرط (3) برقرار نیست. پس تابع در نقطه $x=0$ پیوسته نیست.

مشتق: تابع $y=F(x)$ و نقطه a از دامنه f را در نظر بگیرید. اگر $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-F(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد آن را مشتق تابع f در نقطه a می‌نامیم و آن را با $F'(a)$ نمایش می‌دهیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

قضیه های مشتق :

۱) $(c)' = 0$ $\quad (۲)' = 0$

۲) $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\quad (x^۳)' = ۳x^۲$

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{۲}})' = \frac{1}{۲} x^{-\frac{1}{۲}} = \frac{1}{۲\sqrt{x}}$

۳) $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

۴) $\left(f(x) \times g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

۵) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^۲(x)}$

۶) $\left(f^n(x)\right)' = nf^{n-1}(x) \times f'(x)$

* مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $(۱۰x^۷ - ۳x^۵ + ۴x^۲ - ۵)' = (۷۰x^۶ - ۱۵x^۴ + ۸x - 0)$

۲) $\left[(۳x^۴ - ۵x^۲ + ۱) \cdot (x^۳ - ۴)\right]' = (۳x^۴ - ۵x^۲ + ۱)'(x^۳ - ۴) + (۳x^۴ - ۵x^۲ + ۱)(x^۳ - ۴)'$

$= (۱۲x^۳ - ۱۰x)(x^۳ - ۴) + (۳x^۴ - ۵x^۲ + ۱)(۳x^۲)$

۳) $\left[(۷x^۳ - ۲x + ۴)^{۲۰}\right]' = ۲۰(۷x^۳ - ۲x + ۴)^{۱۹} \times ۲۱x^۲ - ۲$

۴) $\left(\frac{۵x^۳ - ۴x^۲ + ۶}{x^۲ - ۱}\right)' = \frac{(۵x^۳ - ۴x^۲ + ۶)'(x^۲ - ۱) - (۵x^۳ - ۴x^۲ + ۶)(x^۲ - ۱)'}{(x^۲ - ۱)^۲}$

$$\boxed{\frac{1}{x} = x^{-1}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$= \frac{(15x^2 - 8x)(x^2-1) - (5x^3 - 4x^2 + 6)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

* مشتق توابع زیر را بدست آورید.

1) $\left(\sqrt[3]{x^2+1} + 5\sqrt[5]{x^3}\right)$

$= \left((x^2+1)^{\frac{1}{3}} + 5(x)^{\frac{3}{5}}\right)' = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1} \times (2x) + \cancel{5}\left(\frac{3}{\cancel{5}}\right) x^{\frac{3}{5}-1}$

$= \frac{2x}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-\frac{2}{5}}$

2) $\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(3x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-\frac{3}{4}}\right)'$

$= -3x^{-2} - 1x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{7}{4}}$

3) $\left(\sqrt[8]{2x^3+5x-4}\right)' = \left((2x^3+5x-4)^{\frac{1}{8}}\right)' = \frac{1}{8}(2x^3+5x-4)^{\frac{1}{8}-1}$

$= \frac{1}{8}(2x^3+5x-4)^{-\frac{7}{8}} \times (6x^2+5)$

PAPCO

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x+1 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x-1 \\ -x+1 & \\ x-1 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$$ تعریف نشده

$x<1 \to 0$ قدرمطلق را در یک منفی ضرب می‌کنیم

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{0}$$ ت ن

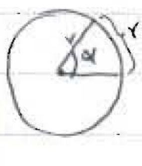
نسبت های مثلثاتی :

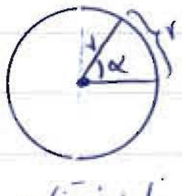
برای تعریف نسبت های مثلثاتی زاویه x ابتدا تعریف واحدهای اندازه گیری زاویه ها (درجه ، رادیان) را یادآوری می کنیم .

1 درجه : اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی از دایره است که طول آن برابر $\frac{1}{360}$ طول محیط دایره است .

1 رادیان : اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمانی از دایره است که طول آن برابر با شعاع دایره است .

در شکل زیر اندازه α برابر یک رادیان است .





چون محیط دایره ای به شعاع 1 برابر 2π است بنابراین تناسب زیر را داریم :

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \to \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

فرمول تبدیل درجه به رادیان ورادیان به درجه :

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* اندازه زاویه ۳۰° چند رادیان است؟

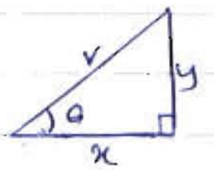
$$\frac{30}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\Rightarrow 30\pi = 180R \Rightarrow R = \frac{30\pi}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6} \quad , \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}\ Rad$$

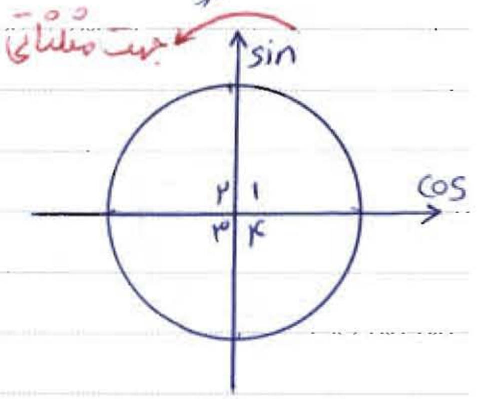
* $\frac{\pi}{4}$ رادیان چند درجه می باشد؟

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow D\pi = 180\frac{\pi}{4} \Rightarrow D\pi = 45\pi \Rightarrow D = \frac{45\pi}{\pi} \Rightarrow D = 45^\circ$$



رابطه فیثاغورث $\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2$



$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

	0	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تن
cot	تن	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	

* روابط مثلثاتی برای نقطه (-۲،۳) را بیابید.

$x = -2 \quad y = 3 \qquad r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = (-2)^2 + 3^2 \Rightarrow r^2 = 13 \quad r = \sqrt{13}$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

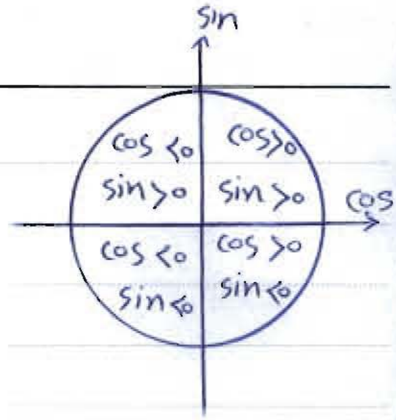
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-2}{3}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



* اندازه زاویه های زیر را برحسب رادیان است برحسب درجه بیان کنید.

1) $\frac{7\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{15}$

* اندازه زاویه های زیر برحسب درجه است آنها را برحسب رادیان بیان کنید.

1) 135° 2) 720°

* نسبت های مثلثاتی نقاط زیر را بدست آورید.

1) $(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$ 2) $(-3, -4)$ 3) $(0, -2)$

1) حل)

$x = -\sqrt{3}$ $\quad r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2}$

$y = \sqrt{2}$ $\quad = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$

$r = \sqrt{5}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{5}$ $\qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{3}}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ $\qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \cot\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* هرگاه $\sin\theta = \frac{-3}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم باشد. سایر نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.

$\sin\theta = \frac{-3}{5}$ $y = -3$ $r = 5$

$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = (5)^2 - (-3)^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

باتوجه به اینکه θ در ناحیه سوم می باشد لذا $x < 0$ است. پس $x = -4$ قابل قبول است.

$x = -4$ $y = -3$ $r = 5$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5}$ $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

* هرگاه $\tan\theta = \frac{-1}{3}$ و انتهای کمان θ در ناحیه دوم باشد سایر نسبت های مثلثاتی θ را بدست آورید.

$\tan\theta = \frac{-1}{3} = \frac{y}{x}$ $x = -3$ $y = 1$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\cos = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$ $\cot\theta = \frac{-3}{1}$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date ( )

* اگر $r=10$ و $\sin\theta = \frac{-2}{5}$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم ($x<0$) باشد سایر نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.

$r = 10$

$\sin\theta = \frac{-2}{5} = \frac{-4}{10} \qquad x<0$

$r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow x^2 = r^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = 10^2 - (-4)^2 \Rightarrow x^2 = 100 - 16 \Rightarrow x^2 = 84$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{84} \qquad x = -\sqrt{84} \qquad x<0$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{84}}{10} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-\sqrt{84}} = \frac{4}{\sqrt{84}}$

$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cancel{-}\sqrt{84}}{\cancel{-}4} = \frac{\sqrt{84}}{4}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPCO