

سرشاخ شدن با کنکور تقدیم میکند

- تست های فصل به فصل دروس تخصصی
- پاسخ پرسش های ارائه شده در کتاب
- ارائه مختصر، مفید و کاربردی نکات کنکوری

با ما از مطالعه لذت ببرید



 www.konkoori.blog.ir

« کنکور چیزی جز کتاب نیست و کتاب خواندن، کار دانش آموزان حرفه ای »

اتحادها:

اتحاد:

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقداری برای متغیرهایشان، مقدارهای یکسانی داشته باشند، عبارت حاصل از تساوی بین آن‌ها را اتحاد می‌نامند.

اتحاد مربع دو جمله‌ای (۱):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

اثبات:

$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ba} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال:

$$(3 + 6)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 6 + 6^2 = 9 + 36 + 36 = 81$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای (۲):

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

اثبات:

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a^2 - \underline{ab} - \underline{ba} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال:

$$(5 - 2)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 2 + 2^2 = 25 - 20 + 4 = 9$$

تجزیه:

اگر بتوان یک چند جمله‌ای را به صورت ضرب دو یا چند، چند جمله‌ای نوشت به طوری که درجه آن‌ها کمتر باشد، گوییم آن چند جمله‌ای را تجزیه کرده‌ایم.

تجزیه‌ی چند جمله‌ای‌ها عکس عمل ضرب چند جمله‌ای‌ها است. در عمل ضرب، عبارت‌هایی را که به صورت حاصل ضرب هستند، با انجام عمل ضرب، به صورت جمع چند یک جمله‌ای در می‌آوریم. ولی در تجزیه، یک

چند جمله‌ای را که به صورت جمع چند یک جمله‌ای است، به صورت حاصل ضرب دو یا چند، چند جمله‌ای دیگر درمی‌آوریم.

مثال:

چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

نکته: باید توجه داشت که برای تجزیه از اتحادها استفاده می‌شود. اگر ما یک اتحاد را برعکس بنویسیم در واقع تجزیه را نوشته‌ایم. پس برای تجزیه باید بتوان متغیرهای یک اتحاد و نوع اتحاد را شناسایی کرد.

$$4a^2 + 4ax + x^2 = (2a + x)^2$$

$$x^2y^2 - 8xy + 16 = (xy + 4)^2$$

$$x^4 - 2x^2yz + y^2z^2 = (x^2 - yz)^2$$

مسائل صفحه ۹۰:

۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$(a - 3b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2$$

$$(2a - 3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$$

$$(4a - 2)^2 = 16a^2 - 16a + 4$$

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - (x - 1)^2 &= (x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 2x + 1) \\ &= \underline{x^2} + \underline{4x} + \underline{4} - \underline{x^2} + \underline{2x} - \underline{1} = 6x + 3\end{aligned}$$

۲. عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسید.

$$a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = (y - 3)^2$$

$$9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

اتحاد مزدوج:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

اثبات:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - \underline{ab} + \underline{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

تمرین در کلاس صفحه ۹۱:

۱. با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$$

$$(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$$

$$(ab + x)(ab - x) = a^2b^2 - x^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{4}$$

۲. با استفاده از اتحاد مزدوج چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$4x^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = \left(\frac{x}{2} + \frac{z}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{z}{3}\right)$$

$$x^2y^4 - 9z^2 = (xy^2 + 3z)(xy^2 - 3z)$$

اتحاد یک جمله‌ی مشترک:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \underline{xb} + \underline{ax} + ab = x^2 + (b + a)x + ab$$

تمرین در کلاس صفحه ۹۲:

۱. با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + (1 + 2)x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

$$(2x - 1)(2x + 4) = 4x^2 + (-1 + 4)2x - 4 = 4x^2 + 6x - 4$$

$$(ax + 5)(ax + b) = a^2x^2 + (5 + b)ax + 5b$$

$$(x - a)(x - b) = x^2 + ((-a) + (-b))x + ab$$

۲. با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$$

۳. چند جمله‌ای زیر را تجزیه کنید.

$$3x^2 + 5x - 2$$

$$A = 3x^2 + 5x - 2 \Rightarrow$$

$$3A = 9x^2 + 15x - 6 = 9x^2 + (5)3x - 6 = (3x + 6)(3x - 1) \Rightarrow$$

$$A = \frac{(3x + 6)(3x - 1)}{3} = (x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

اتحادهای تفاضل و مجموع مکعب دو جمله:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

اتحاد مکعب دو جمله‌ای:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

تمرین در کلاس صفحه ۹۴:

۱. با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$$

$$(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = 8x^3 - 27y^3$$

$$(x + 5)^3 = x^3 + 3x^2 \times 5 + 3 \times 5^2 \times x + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

۲. با استفاده از اتحادها چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$27x^3 - \frac{1}{8} = \left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(9x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} a^6 - 64b^6 &= (a^2)^3 - (4b^2)^3 = \underline{(a^2 - 4b^2)}(a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4) \\ &= (a + 2b)(a - 2b)(a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4) \end{aligned}$$

مسائل صفحه ۹۴:

۲. با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$$

$$(x - 1)(x + 5) = x^2 + 4x - 5$$

$$(2x - 4)(2x + 3) = 4x^2 - 2x - 12$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = x^2 - 2$$

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{4} - x^2$$

۳. به کمک اتحادها عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$2 - a^2 = (\sqrt{2} - a)(\sqrt{2} + a)$$

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{1}{25} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

$$16x^2 - 36y^2 = (4x - 6y)(4x + 6y)$$

$$a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$$

$$x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$$

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = (x + \sqrt{2})^2$$

۴. حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 2^3$$

$$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 3^3$$

$$(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 2x^3 + 1^3$$

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(2a + 1)^3 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$$

$$(a - 2)^3 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8$$

۵. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را به صورت ضرب دو یا چند عبارت بنویسید.

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$a^3 + 8b^3 = (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

$$y^3 - 6y^2 + 12y - 8 = (y - 2)^3$$

۶. چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

$$\begin{aligned} x^8 - 1 &= \underline{(x^4 - 1)(x^4 + 1)} = \underline{\underline{(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)}} \\ &= \underline{\underline{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)}} \end{aligned}$$

$$x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x^2 - 1)^3$$

$$x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$$

۸. با استفاده از اتحاد مزدوج، تساوی زیر را ثابت کنید:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - (x - y)^2 &= ((x + y) + (x - y))((x + y) - (x - y)) \\ &= (x + y + x - y)(x + y - x + y) = (2x)(2y) = 4xy\end{aligned}$$

تساوی بالا را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای ثابت کنید.

$$\begin{aligned}(x + y)^2 - (x - y)^2 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 2xy + 2xy = 4xy\end{aligned}$$