تهیه و تنظیم : مهرداد ملوندی

ریاضیات گسسته، هندسه تحلیلی، هندسه پایه، آمار — سراسری ۹۱

۱۰۴- گزینه‌ی «۳»

ابتدا سه رقم متمایز از بین این ۵ رقم انتخاب می‌کنیم که به $\binom{۵}{۳}=۱۰$ حالت امکان‌پذیر است.

واضح است که با هر سه رقم متمایز، فقط یک عدد سه رقمی با شرط «رقم صدگان > رقم دهگان > رقم یکان» می‌توان نوشت؛ پس تعداد اعداد مورد نظر ۱۰ تاست.

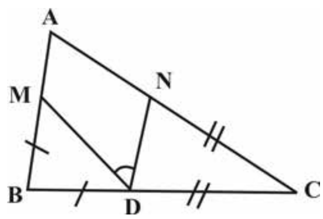
(ریاضی۲، آنالیز ترکیبی)

۱۲۵- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول:

نکته: در مثلث شکل زیر که $BM = BD$ و $CN = CD$ است، داریم:

$$M\hat{D}N = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

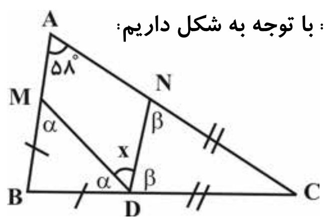


با توجه به صورت سؤال و نکته‌ی فوق داریم:

$$M\hat{D}N = ۹۰^\circ - \frac{۵۸^\circ}{۲} = ۹۰^\circ - ۲۹^\circ = ۶۱^\circ$$

راه حل دوم: با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha \\ \hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۲\beta \end{cases}$$



در مثلث ABC داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۵۸^\circ + ۱۸۰^\circ - ۲\alpha + ۱۸۰^\circ - ۲\beta = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = ۱۱۹^\circ$$

در زاویه‌ی نیم‌صفحه‌ی D داریم:

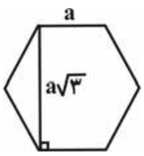
$$\alpha + x + \beta + ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - (\alpha+\beta) = ۶۱^\circ$$

(هندسه۱، استدلال)

۱۲۶- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول:

نکته: در شش ضلعی منتظم به ضلع a، قطر کوچک برابر $a\sqrt{۳}$ و مساحت برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.



با توجه به صورت سؤال، مساحت یک شش ضلعی منتظم به ضلع $x = a\sqrt{۳}$ برابر خواهد بود با:

$$S_۱ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}x^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(a\sqrt{۳})^۲ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

نسبت مساحت این شش ضلعی به مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}a^۲}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲} = ۳$$

راه حل دوم:

می‌دانیم که هر دو شش ضلعی منتظم با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت‌هایشان برابر مربع نسبت تشابه آن‌هاست، پس نسبت مساحت‌های دو شش ضلعی منتظم مورد نظر برابر با مربع نسبت اضلاع آن‌هاست، یعنی:

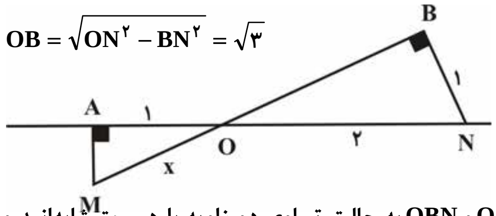
$$\frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{a\sqrt{۳}}{a})^۲ = ۳$$

(هندسه۱، مساحت و قضیه‌ی فیثاغورس)

۱۲۷- گزینه‌ی« ۲»

با نوشتن قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBN داریم:

$$OB = \sqrt{ON^۲ - BN^۲} = \sqrt{۳}$$



دو مثلث OAN و OBN به حالت تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\overset{\Delta}{OAN} \sim \overset{\Delta}{OBN} \Rightarrow \frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

(هندسه۱، تشابه)

۱۲۸- گزینه‌ی« ۴»

نکته: قطر مکعبی که درون یک کره محاط شده با قطر آن کره برابر است، یعنی $a\sqrt{۳} = ۲R$

با توجه به نکته‌ی فوق، نسبت حجم این مکعب به حجم کره برابر است با:

$$\frac{V(\text{مکعب})}{V(\text{کره})} = \frac{a^۳}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = (\frac{۳}{۴\pi})(\frac{a}{R})^۳ = \frac{۳}{۴\pi} \times (\frac{۲}{\sqrt{۳}})^۳$$

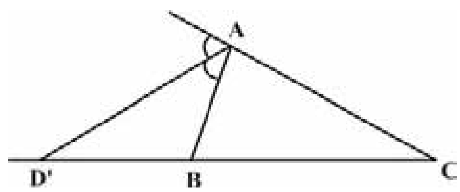
$$= \frac{۳ \times ۸}{۴\pi \times ۳\sqrt{۳}} = \frac{۲}{\pi\sqrt{۳}} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳\pi}$$

(هندسه۱، شکل‌های فضایی)

۱۲۹- گزینه‌ی«۲ »

نکته: مطابق شکل در مثلث $(\hat{B} > \hat{C})ABC$، نیمساز خارجی زاویه‌ی A، امتداد ضلع BC را قطع کرده است؛ با توجه به شکل داریم:

$$\frac{S_{AD'B}}{S_{AD'C}} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$$



می‌دانیم که کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی یک مثلث متناظر با بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی است.

با توجه به اندازه‌ی اضلاع، نیمساز خارجی رو به‌رو به ضلع ۶ مورد نظر است. با توجه به نکته‌ی فوق، اگر AD' نیمساز خارجی زاویه‌ی A باشد، آنگاه:

$$\frac{S_{AD'B}}{S_{AD'C}} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{AD'B}}{S_{AD'C} - S_{AD'B}} = \frac{۳}{۵-۳} \Rightarrow \frac{S_{AD'B}}{S_{ABC}} = \frac{۳}{۲}$$

(هندسه۲، استرلال)

۱۳۰- گزینه‌ی« ۳»

نکته: اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$، در صورت وجود، برابر است با: $\sqrt{OO'^۲ - (R-R')^۲}$

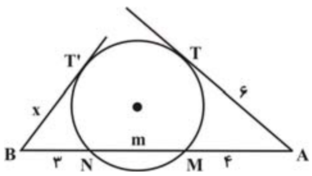
با توجه به این نکته و فرض سؤال داریم:

$$\sqrt{OO'^۲ - (۱۴-۶)^۲} = ۱۵ \Rightarrow OO'^۲ = ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹$$
$$\Rightarrow OO' = ۱۷$$

(هندسه۲، دایره)

۱۳۱- گزینه‌ی« ۳»

با توجه به شکل، از هر یک از نقاط A و B یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شده است.



با نوشتن روابط طولی برای این دو نقطه داریم:

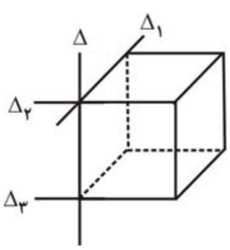
$$AT^۲ = AM.AN \Rightarrow ۶^۲ = ۴ \times (۴ + m) \Rightarrow m = ۵$$

$$BT'^۲ = BN.BM \Rightarrow x^۲ = ۳ \times (۳ + m) = ۳ \times (۳ + ۵) = ۲۴$$
$$\Rightarrow x = ۲\sqrt{۶}$$

(هندسه۲، دایره)

۱۳۲- گزینه‌ی« ۱»

نکته: اگر خط D بر صفحه‌ی P عمود باشد بر تمام خطوط آن صفحه نیز عمود است.

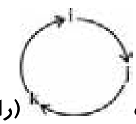


همان‌طور که می‌بینید، به خط $\Delta_۱$، $\Delta_۲$ و $\Delta_۳$ بر خط D عمود هستند. ولی وضعیت دو به دوی این سه خط($\Delta_۱$، $\Delta_۲$ و $\Delta_۳$) هر سه وضعیت موازی، متقاطع و متنافر را قبول می‌کند.

(هندسه۲، هندسه در فضا)

۱۳۳- گزینه‌ی «۲»

نکته: ضرب خارجی بردارهای یکّه‌ی i، j و k در یکدیگر به صورت



(راستگرد) است، یعنی به عنوان مثال داریم:

$$\begin{cases} i \times j = k \\ k \times j = -i \end{cases}$$

برای عبارت صورت سؤال داریم:

$$(i \times (i \times j)) \times k = (i \times k) \times k = (-j) \times k = -(j \times k) = -i$$

(هندسه تحلیلی، بردارها)

۱۳۴- گزینه‌ی «۴»

صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}3\\1\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\-1\\2\end{vmatrix}$ از نقطه‌ی وسط AB گذشته و بر بردار $\overrightarrow{AB}$ عمود است، پس:

$$\text{نقطه‌ی وسط } AB : M\begin{vmatrix}2\\0\\1\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-2,2) \Rightarrow \text{بردار نرمال صفحه} : n = (1,1,-1)$$

معادله‌ی صفحه‌ی مورد نظر عبارتست از:

$$(x-2)+(y-0)-(z-1)=0 \Rightarrow x+y-z=1$$

در بین نقاط داده شده تنها مختصات نقطه‌ی $(3,-1,1)$ در معادله‌ی این صفحه صدق می‌کند.

(هندسه تحلیلی، خط و صفحه)

۱۳۵- گزینه‌ی «۲»

راه حل اول:

نکته: برای به دست آوردن طول عمود مشترک دو خط متنافر d و d'، نقاط دلخواه A و A' را روی این دو خط انتخاب کرده و به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$h = \frac{|\overrightarrow{AA'}.(u \times u')|}{|u \times u'|}$$

(u و u' بردارهای هادی خطوط d و d' هستند.)

با توجه به این نکته و خطوط داده شده داریم:

$$d : \text{محور } y \text{ ها} \Rightarrow A\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} , \quad u = (0,1,0)$$

$$d' : (x = t, y = t+2, z = -2t+5)$$

$$\Rightarrow A'\begin{vmatrix}0\\2\\5\end{vmatrix}, u' = (1,1,-2)$$

$$h = \frac{|\overrightarrow{AA'}.(u \times u')|}{|u \times u'|} = \frac{|(0,2,5).((0,1,0)\times(1,1,-2))|}{|(0,1,0)\times(1,1,-2)|}$$

$$\Rightarrow h = \frac{|(0,2,5).(-2,0,-1)|}{|(-2,0,-1)|} = \frac{|0+0-5|}{\sqrt{4+0+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

راه حل دوم:

نکته: برای دو خط متنافر فقط یک جفت صفحه‌ی موازی هم وجود دارد که هر کدام از خطوط متنافر روی یکی از این دو صفحه قرار دارد. فاصله‌ی بین این صفحه‌ی موازی همان طول عمود مشترک دو خط متنافر است.

معادله‌ی محور y ها به صورت $(x = 0, z = 0)$ است. با توجه به معادلات خط دیگر $(x = t, y = t+2, z = -2t+5)$ می‌توان نتیجه گرفت که معادلات آن دو جفت صفحه‌ی موازی به ترتیب $2x+z=0$ و $2x+z=5$ است. فاصله‌ی این دو جفت صفحه‌ی موازی که همان طول عمود مشترک دو خط متنافر است به صورت زیر به دست می‌آید:

$$h = \frac{|5-0|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

(هندسه تحلیلی، خط و صفحه)

۱۳۶- گزینه‌ی «۲»

ابتدا معادله‌ی سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$2y^2 + ay - 3x = 0 \Rightarrow 2(y^2 + \frac{a}{2}y) = 3x \Rightarrow (y+\frac{a}{4})^2 - \frac{a^2}{16} = \frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow (y+\frac{a}{4})^2 = \frac{3}{2}x + \frac{a^2}{16} = \frac{3}{2}(x + \frac{a^2}{24})$$

معادله‌ی اخیر مربوط به یک سهمی افقی با مشخصات زیر است:

$$\begin{cases} \text{رأس}: S\left|\begin{array}{l}\alpha=-\frac{a^2}{24}\\ \beta=\frac{-a}{4}\end{array}\right. \\ 4P=\frac{3}{2}\Rightarrow \text{پارامتر}: P=\frac{3}{8}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{کانون سهمی افقی}: F\left|\begin{array}{l}\alpha+P=\frac{-a^2}{24}+\frac{3}{8}\\ \beta=\frac{-a}{4}\end{array}\right.$$

طبق فرض سؤال، کانون سهمی روی محور y ها قرار دارد، پس:

$$x_F=\frac{-a^2}{24}+\frac{3}{8}=0\Rightarrow \frac{a^2}{24}=\frac{3}{8}\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=\pm 3$$

(هندسه تحلیلی، مقاطع مخروطی)

۱۳۷- گزینه‌ی «۴»

نقطه‌ی $\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$ را تبدیل یافته نقطه‌ی $\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ تحت تأثیر ماتریس A درنظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x=x'\\3y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-x'\\y=\frac{1}{3}y'\end{cases}$$

تبدیل یافته‌ی دایره‌ی $x^2+y^2=4$ تحت اثر ماتریس A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(-x')^2+(\frac{1}{3}y')^2=4\Rightarrow \frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{36}=1$$

معادله‌ی اخیر مربوط به یک بیضی قائم با مشخصات زیر است:

$$\begin{cases}a^2=36\\b^2=4\end{cases}\Rightarrow c^2=a^2-b^2=32$$

$$\text{خروج از مرکز}: e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{32}}{6}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(هندسه تحلیلی، ماتریس و دترمینان)

۱۳۸- گزینه‌ی «۱»

نکته: اگر به درایه‌ی a_{ij} از ماتریس $A_{3\times 3}$، x واحد افزوده شود به دترمینان اولیه، مقدار xA_{ij} افزوده خواهد شد.

فرض می‌کنیم به هر درایه‌ی سطر سوم دترمینان داده شده، x واحد افزوده شود، با توجه به نکته‌ی فوق و فرض مسأله داریم:

$$xA_{31}+xA_{32}+xA_{33}=8\Rightarrow x\left(\begin{vmatrix}6&7\\3&4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&7\\-2&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&6\\-2&3\end{vmatrix}\right)=8$$

$$\Rightarrow x(3-34+27)=8\Rightarrow x=\frac{8}{-4}=-2$$

(هندسه تحلیلی، ماتریس و دترمینان)

۱۳۹- گزینه‌ی «۳»

نکته (۱): اگر A و B ماتریس‌های مربعی از مرتبه‌ی ۳ و λ عددی حقیقی باشد، آنگاه: (الف) $|AB|=|A|.|B|$

(ب) $|\lambda A|=\lambda^3|A|$

نکته(۲): اگر ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد، آنگاه: $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

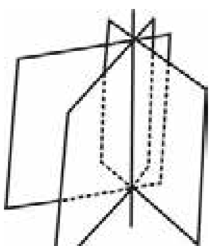
(هندسه تحلیلی، وارون‌پذیری)

۱۴۰- گزینه‌ی «۲»

راه حل اول:

نکته: در معادله‌ی ماتریسی $AX=B$، اگر $|A|=0$ باشد آنگاه دستگاه معادلات یا بیشمار جواب دارد یا فاقد جواب است. در روش کرامر، این نتیجه را می‌توان گرفت که در حالت $|A|=0$، اگر هر سه دترمینان $|A_x|$، $|A_y|$ و $|A_z|$ نیز برابر صفر شد آنگاه دستگاه معادلات بیشمار جواب دارد، در غیر این صورت فاقد جواب است.

در معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&3&-1\\4&-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\9\end{bmatrix}$، اولاً $|A|=0$ و ثانیاً هر سه دترمینان $|A_x|$، $|A_y|$ و $|A_z|$ برابر صفر است، پس طبق نکته‌ی فوق نتیجه می‌شود که این معادله‌ی ماتریسی بیشمار جواب دارد که با توجه به گزینه‌ها می‌توان نتیجه گرفت فصل مشترک‌های دو به دوی این سه صفحه بر هم منطبق‌اند، مانند شکل زیر:



راه حل دوم:

دستگاه معادلات متناظر با این معادله‌ی ماتریسی به صورت روبه‌روست:

$$\begin{cases}P: x-2y+3z=4\\ Q: 2x+3y-z=1\\ R: 4x-y+5z=9\end{cases}$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر طرفین معادله‌ی صفحه‌ی P را در ۲ ضرب کنیم و با معادله‌ی صفحه‌ی Q جمع کنیم، معادله‌ی صفحه‌ی R به دست می‌آید $(2P+Q=R)$. به بیان دیگر صفحه‌ی R صفحه‌ای از دسته صفحات P و Q است.

پس سه صفحه‌ی P، Q و R در یک خط مشترکند.

(هندسه تحلیلی، دستگاه معادلات)

۱۴۱- گزینه‌ی« ۴»

جدول فراوانی متناظر با داده‌های مفروض به صورت زیر است:

x_i	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
f_i	۷	۱۰	۱۵	۱۲	$a-۴۴$

میانگین جامعه برابر ۴۱ است، پس داریم:

$$\sum f_i x_i = \bar{x}.\sum f_i$$
$$\Rightarrow ۷\times ۳۳+۱۰\times ۳۷+۱۵\times ۴۱+۱۲\times ۴۵+(a-۴۴)\times ۴۹$$

$$= ۴۱\times a \Rightarrow ۱۷۵۶+۴۹a-۲۱۵۶ = ۴۱a \Rightarrow ۸a = ۴۰۰ \Rightarrow a = ۵۰$$

می‌دانیم زاویه‌ی متناظر با داده‌ی x_i در نمودار دایره‌ای برابر است با ضرب فراوانی نسبی آن دسته در ۳۶۰°، یعنی $\frac{f_i}{\sum f_i}\times ۳۶۰^\circ$؛ پس زاویه‌ی مربوط به دسته‌ی $[۳۹,۴۳)$ برابر است با:

$$\frac{۱۵}{a}\times ۳۶۰^\circ = \frac{۱۵}{۵۰}\times ۳۶۰^\circ = ۱۰۸^\circ$$

(آمار و مدل‌سازی، نمودارها و تحلیل داده‌ها)

۱۴۲- گزینه‌ی« ۴»

نکته: داده‌های x_i را در نظر بگیرید؛ واریانس این داده‌ها به صورت زیر نیز به دست می‌آید:

$$\sigma^۲ = \overline{x^۲} - \bar{x}^۲ = \frac{\sum x_i^۲}{n} - (\frac{\sum x_i}{n})^۲$$

اگر طول اضلاع مربع‌ها را x_i در نظر بگیریم، با توجه به فرض سؤال و نکته‌ی فوق داریم:

$$\begin{cases} C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = ۰/۲ \\ \bar{x} = ۱۵ \end{cases} \Rightarrow \sigma = ۱۵\times ۰/۲ = ۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\sum x_i^۲}{n} - (۱۵)^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{\sum x_i^۲}{n} = ۲۲۵+۹ = ۲۳۴$$

از آنجا که مساحت مربع‌ها به صورت $x_i^۲$ است، پس میانگین مساحت مربع‌ها برابر ۲۳۴ است.

(آمار و مدل‌سازی، شاخص‌های پراکندگی)

۱۴۳- گزینه‌ی« ۴»

با توجه به صورت سؤال داریم:

$$۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳ = (۱+۲+\cdots+n)^۲$$

حاصل عبارت مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۱۰^۳+۱۲^۳+۱۴^۳+\cdots+۳۰^۳ = ۲^۳\times(۵^۳+۶^۳+۷^۳+\cdots+۱۵^۳)$$

$$= ۸\times[(۱^۳+۲^۳+\cdots+۱۵^۳)-(۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳)]$$

$$= ۸\times[(۱+۲+\cdots+۱۵)^۲-(۱+۲+۳+۴)^۲]$$
$$= ۸\times[(\frac{۱۵\times ۱۶}{۲})^۲-(\frac{۴\times ۵}{۲})^۲] = ۸[۱۲۰^۲-۱۰^۲]$$

$$= ۸\times[۱۴۴۰۰-۱۰۰] = ۸\times ۱۴۳۰۰ = ۱۱۴۴۰۰$$

(جبرواحتمال، استدلال‌های ریاضی)

۱۴۴- گزینه‌ی« ۱»

توجه کنید که دو مجموعه‌ی $\{a,b\},\{b,a\}$ یکسانند پس مجموعه‌ی مورد نظر سه عضو a، b و $\{a,b\}$ را دارد. پس تعداد زیر مجموعه‌های مورد نظر که فاقد عضو $\{a,b\}$ است برابر خواهد بود با: $۲^{۳-۱} = ۴$.

(جبرواحتمال، مجموعه‌ها)

۱۴۵- گزینه‌ی« ۱»

چون ۱۱ عددی اول و $(۵,۱۱) = ۱$، لذا طبق قضیه‌ی فرما داریم:

$$۵^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

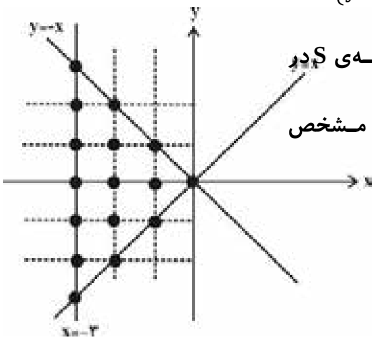
پس در رابطه‌ی هم باقیمانده بر ۱۱، عدد $۵^{۱۰}$ عضو دسته‌ی $[۱]_{۱۱}$ خواهد بود.

(ریاضیات گسسته، همنهشتی)

۱۴۶- گزینه‌ی« ۴»

باید ببینیم که نامعادله‌ی $|y| \le -x$ چه بخشی از دستگاه مختصات را در بر می‌گیرد:

$$|y| \le -x \Rightarrow -(-x) \le y \le -x \Rightarrow \begin{cases} y \ge x : y = x \text{ بالای خط} \\ y \le -x : y = -x \text{ پایین خط} \end{cases}$$



نقاط تشکیل دهنده‌ی رابطه‌ی S در شکل روبه‌رو به صورت تو پر مشخص شده‌اند:

تعداد این نقطه‌ها برابر است با: $۱+۳+۵+۷=۱۶$

(جبرواحتمال، ضرب دکارتی و رابطه)

۱۴۷- گزینه‌ی« ۳»

با توجه به فرض سؤال، احتمال مورد نظر برابر است با:

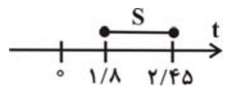
$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۴}}{\binom{۴+۵}{۶}} = \frac{۶\times ۵}{۴۸} = \frac{۵}{۱۴}$$

(جبرواحتمال، احتمال)

۱۴۸- گزینه‌ی« ۴»

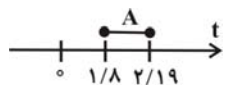
فضای پیوسته‌ی مذکور، یک بُعدی و طول آن برابر است با:

$$L_S = ۲/۴۵ - ۱/۸ = ۰/۶۵$$



طول پیشامد مطلوب نیز برابر است با:

$$L_A = ۲/۱۹ - ۱/۸ = ۰/۳۹$$



احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_S} = \frac{۰/۳۹}{۰/۶۵} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

(جبرواحتمال، احتمال)

۱۴۹- گزینه‌ی« ۲»

نکته(۱): در یک گراف ساده، حداکثر اندازه برابر $\binom{p}{۲}$ است.

نکته(۲): اگر در یک گراف ساده، $q < p-۱$ باشد، آن گراف حتماً ناهمبند است. با توجه به نکات فوق و فرض مسأله، جدول روبه‌رو را تشکیل می‌دهیم:

p	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
q	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

غیرساده (p = ۱، ۲، ۳) — ناهمبند (p = ۵، ۶، ۷، ۸)

پس در این گراف، $p = q = ۴$ است.

گراف کامل $K_۴$، $۶ = \binom{۴}{۲}$ یال دارد که با افزودن ۲ یال به گراف قبلی، می‌توان این گراف کامل را ساخت.

(ریاضیات گسسته، گراف)

۱۵۰- گزینه‌ی«۲ »

می‌دانیم که تعداد یک‌های ماتریس مجاورت یک گراف ساده برابر است با $۲q$؛ پس در این گراف با توجه به ماتریس مجاورت آن داریم:

$$۲q = ۴ \Rightarrow q = ۲$$

(ریاضیات گسسته، گراف)

۱۵۱- گزینه‌ی« ۴»

با توجه به فرض سؤال داریم: $۲۵ | ۶^n - ۳^n \Rightarrow ۲۵ | ۳^n(۲^n - ۱)$

چون $(۲۵, ۳^n) = ۱$، پس طبق لِم اقلیدس داریم: $۲۵ | ۲^n - ۱ \Rightarrow ۲^n \overset{۲۵}{\equiv} ۱$

نکته (قضیه‌ی اویلر): اگر n عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد به طوری که $(a,n) = ۱$، آنگاه $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱$. (توجه کنید که اگر n عددی اول باشد، قضیه‌ی فرما به دست می‌آید.)

با توجه به این نکته داریم:

$$\begin{cases} ۲^{\phi(۲۵)} \overset{۲۵}{\equiv} ۱ \\ \phi(۲۵) = ۲۵(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow ۲^{۲۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۱$$

پس $n = ۲۰$ قابل قبول است، ولی از آنجا که کوچک‌ترین عدد طبیعی n مطلوب است باید مقسوم علیه‌های طبیعی ۲۰ (که در گزینه‌ها آمده) را نیز چک کرد. برای $n = ۱۰$ داریم:

$$۲^{۱۰} = ۱۰۲۴ \overset{۲۵}{\equiv} -۱ \text{ (غ‌ق‌ق)}$$

پس کوچک‌ترین مقدار طبیعی n برابر ۲۰ است.

(ریاضیات گسسته، نظریه اعداد)

۱۵۲- گزینه‌ی«۳ »

تعداد تمبرهای ۱۵۰و ۲۵۰ ریالی را به ترتیب x و y در نظر می گیریم. با توجه به فرض داریم:

$$۱۵۰x + ۲۵۰y = ۳۷۰۰ \Rightarrow ۳x + ۵y = ۷۴$$

مقادیر $x_\circ = ۳$ و $y_\circ = ۱۳$ یک جواب اولیه برای این معادله است.جواب های دیگر این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x = x_\circ + \frac{bk}{d} \\ y = y_\circ - \frac{ak}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ + ۵k \\ y = ۱۳ - ۳k \end{cases}$$

مقادیر x و y باید نامنفی باشد،پس:

$$\begin{cases} x = ۳ + ۵k \geq \circ \Rightarrow k \geq \circ \\ y = ۱۳ - ۳k \geq \circ \Rightarrow k \leq ۴ \end{cases}$$

تنها ۵ مقدار ۰ تا ۴ برای k قابل قبول است، پس به ۵ طریق می توان تمبرها را خرید.

(ریاضیات گسسته، نظریه اعداد)

۱۵۳- گزینه‌ی«ـــ»

صورت سؤال درست بیان نشده است.گراف متناظر با یک رابطه،گرافی جهتدار است که در صورت سؤال به صورت گراف ساده تعریف شده است . در ضمن برای هر راس گراف جهتدار نمی‌توان درجه‌ای یکتا تعریف کرد،چون یال ها به صورت ورودی ،خروجی و یا طوقه هستند.

(ریاضیات گسسته، ترکیبیات)

۱۵۴- گزینه‌ی« ۲»

پیشامد آن که مجموع اعداد دو کارت برابر ۱۱ باشد عبارت است از:

$$A = \{\{۲,۹\},\{۳,۸\},\{۴,۷\},\{۵,۶\}\}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{\binom{۹}{۲}} = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

(ریاضیات گسسته، احتمال)

۱۵۵- گزینه‌ی«۳ »

با شرط مورد نظر، فضای نمونه‌ای محدود شده است. فضای نمونه ای جدید عبارت است از:

$$S_۱ = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$$

$$A \subseteq S_۱ : A = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S_۱)} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

(ریاضیات گسسته، احتمال)