

حل المسائل شلادون

آمار احتمالات معدنی

کتاب درسی، صیانی احتمال شلادون راس راس راجم

مباحث درسی

۱- آنالیز ترکیباتی

۲- اصول احتمال

۳- احتمال شرطی و استقلال

۴- متغیرهای تصادفی

بارم خدات

تکالیف ما ۱۰ (۲ نمره)

میان ترم ۴-۸ نمره (بخت او ۲)

پایان ترم مطابق خدات (بخت ۳ و ۴)

آنالیز ترکیباتی (combinatorial analysis)

آزمایشات یا یقین هستند یا تصادفی

یکی از اساسی ترین کارها در بحث تئوری احتمال، شمارش تعداد نتایج

یک آزمایش تصادفی می باشد. روشی علمی برای این کار در صحت آنالیز

ترکیباتی ارائه می شود

۱- اصول اساسی شمارشی Basic principles of counting

فرض کنید آزمایش اول دارای n_1 نتیجه ممکن می باشد و به ازای هر نتیجهاول یک آزمایش دوم دارای n_2 نتیجه ممکن می باشد و ...به ازای هر نتیجه آزمایش $(1, 2, \dots, n_1)$ آزمایش 2 ام دارای n_2 نتیجه ممکن

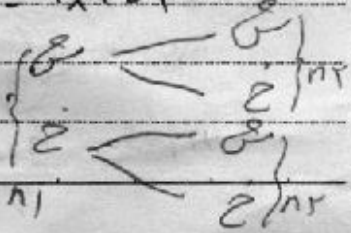
می باشد. در این صورت انجام همزمان یا متوالی این آزمایش ها دارای

 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_r$ نتیجه ممکن می باشد

مثال ۱

بگذاریم n_1 را دو صفت پیرتاپ می بینیم تعداد نتایج ممکن چند تایی باشد. $n_1 = 2 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 2 \quad n_4 = 2 \quad n_5 = 2 \quad n_6 = 2 \quad n_7 = 2 \quad n_8 = 2 \quad n_9 = 2 \quad n_{10} = 2$

فضای نمونه (sample space)

 $S = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\} \}$ 

مقدار

تعداد نتایج می تواند در هر مرحله متفاوت باشد اما تعداد نتایج در همه مراحل یکسان می باشد. یعنی n می تواند به شکل دیگری باشد اما دائما ۳ می باشد.

permutation (جایگشت)

موضوع این بحث کتاب همچنین تعدادی است که می باشد و وقتی استیکو به کار تعدادی کتاب هم می ده می شوند یا به بتوانیم تعداد ترتیب های ممکن آنرا محاسبه کنیم.

قضیه ۱

تعداد جایگشت های ممکن n می ستاین برابر است با $n!$

مثال

می خواهیم در یک قفسه ۵ کتاب کتاب هم قرار دهیم به چند طریق می توان این کار را کرد

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

می خواهیم ۳ کتاب ریاضی، ۴ کتاب مذهبی و ۳ کتاب تاریخی را در یک ردیف کتاب هم قرار دهیم. این کار به چند روش امکان پذیر است

$$3! + 4! + 3! = 6 + 24 + 6 = 36$$

حال اگر بخواهیم کتاب های با موضوعات مشابه کتاب هم قرار بگیرند چند ترتیب ممکن وجود دارد

$$1! \times \left\{ \begin{array}{c} 3! \\ \text{جایگشت کتاب تاریخی} \end{array} \times \begin{array}{c} 4! \\ \text{جایگشت کتاب مذهبی} \end{array} \times \begin{array}{c} 3! \\ \text{جایگشت کتاب ریاضی} \end{array} \right\} = 5184$$

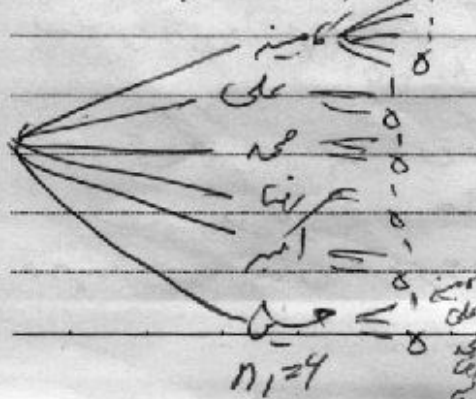
قضیه ۲

تعداد جایگشت های ممکن r می ستاین از n می ستاین از رابطه زیر بدست می آید

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \leq r \leq n$$

مثال

می خواهیم از بین ۹ نفر ۳ نفر را روی ۲ صندلی در کتاب هم بنشانیم چند جایگشت ممکن وجود دارد



$$\frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1} = 504$$

$$P_9^3 = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!}$$

$$n_1 = 9$$

$$n = 8$$

$$0! = 1$$

تکته: فاکتوریل معنی مساوی این باره.

ترکیب combination

در صورت ترکیب ترتیب قرار گرفتن اشیاء بی اهمیت ندارد بنابراین تعداد ترکیب n شیئی متماثل برابر یک می باشد.

ABC

ABC
ACB
BAC
BCA
CBA
CAB

۳! تعداد ترتیب
۱ به ۳! و تعداد ترکیب
۳!

قضیه ترکیب

تعداد ترکیب r شیئی از n شیئی متماثل برابر است با

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!}$$

مثال

در خواص از میان ۴ مرد ۲ نفر را انتخاب و در یک ردیف روی ۲ صندلی بنشینان
الف: تعداد ترکیب های ممکن چند تا است

$$P_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

ب: تعداد ترکیب های ممکن چند تا است.

$$C_4^2 = \frac{P_4^2}{2!} = \frac{12}{2} = 6$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

پیدا کردن فرمول نهایی ترکیب

$$P_n^r = (n)_r$$

$$C_n^r = \binom{n}{r}$$

نماد گذاری

مثال

در بین یک کمد چهار صندلی سفید و پنج صندلی معرقه آبی وجود دارد دو صندلی هر
نوعی بر روی دایره تعداد ترکیب های ممکن چند تا می باشد.

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \times 7!} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

در صورتیکه یک صندلی معرقه آبی و یک صندلی سفید باشد دو صندلی وجود دارد

$$\binom{4}{1} \binom{5}{1} = 4 \times 5 = 20$$

در مجموع ترکیب های ممکن فرد دو صندلی آبی است

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

در چند حالت یا ترتیب ممکن هر دو مهره سفید باشد

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

مثال

ف. خواهیم ۴ ایرانی ۵ آمریکایی ۷ افغانی را در کنار هم بنشانیم
الف. چند ترتیب ممکن وجود دارد.

$$7! \cdot 4! \cdot 5! = 14!$$

ب. اگر بخواهیم افراد هر ملیت کنار هم بنشینند چند ترتیب ممکن وجود دارد

$$3! \cdot 5! \cdot 7! \cdot 4!$$

جایگاه افغانی ۷
جایگاه آمریکایی ۵
جایگاه ایرانی ۴
جایگاه ملیت ۳

قضیه دو جمله‌ای

$$(x+y)^1 = x^1 + y^1$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x+y)^{10} = \binom{10}{0}x^{10} + \binom{10}{1}x^9y + \binom{10}{2}x^8y^2 + \dots + \binom{10}{9}x^1y^9 + \binom{10}{10}y^{10}$$

$$\frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

در یک ب جابه جایی با ۲ مهره

$$(x+y)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} x^x y^{n-x} \quad C_n^x = \binom{n}{x}$$

قضیه چند جمله‌ای

$$(x+y+z)^2 = \binom{2}{2,0,0} x^2 y^0 z^0 + \binom{2}{0,2,0} x^0 y^2 z^0 + \binom{2}{0,0,2} x^0 y^0 z^2 +$$

$$\binom{2}{1,1,0} x^1 y^1 z^0 + \binom{2}{1,0,1} x^1 y^0 z^1 + \binom{2}{0,1,1} x^0 y^1 z^1$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

تقسیم ترکیب اقمیم یافته

مجموعه‌ای که می‌خواهیم n شیء متجانس را به k گروه تقسیم کنیم به طوری که اندازه گروه‌ها به ترتیب $n_1, n_2, \dots, n_r$ باشد در این صورت تعداد ترکیب‌های ممکن از این مجموعه به دست می‌آید:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

مثال

مجموعه‌ای از نفر را به ۳ گروه با اندازه‌های ۲ نفره و ۵ نفره و ۳ نفره تقسیم کنیم چقدر طریقه‌های ممکن وجود دارد

$$\binom{10}{2, 3, 5} = \frac{10!}{2! 3! 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{2 \times 3 \times 5} = 2520$$

نکته

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$$

چرا؟ اگر مجموعه‌ای از n شیء متجانس ترکیب‌های r تایی جدا کنیم مثل این است که n شیء را به دو گروه تقسیم کنیم با اندازه‌های r و $n-r$ یعنی به $n-r$ شیء باقی بماند.

فصل اول مسائل صفحه ۱۶ راجع به مسائل مورد نظر
۷ و ۸ و ۱۱ و ۱۲ و ۲۴ و ۲۵ (حل کن بیا)

اثبات قضیه دو جمله‌ای به کمک تحلیل ترکیباتی

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \dots + \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} x^n y^0 \Rightarrow$$

فرض کنید می‌خواهیم $(x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_n+y_n)$ را بسازیم. اگر n را حاصل این عبارت شامل 2^n جمله خواهد بود و به صورت زیر می‌توان حاصل این عبارت را نوشت

$$\begin{aligned}
 & (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \dots (x_n + y_n) = x_1 x_2 \dots x_n + x_1 x_2 \dots x_{n-1} y_n + x_1 x_2 \dots y_1 x_n + \dots \\
 & + \dots + y_1 x_2 \dots x_n + x_1 x_2 \dots y_{n-1} y_n + \dots + y_1 y_2 \dots y_n \\
 & \quad \quad \quad \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \\
 & x^n + \dots + y_1 y_2 \dots y_n
 \end{aligned}$$

واضح است که تعداد جملاتی که فقط شامل اندیس‌های x هستند شامل یکی می‌باشد $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یعنی از میان n حرف x به n انتخاب شده اند که تعداد آن $\binom{n}{n}$ می‌باشد. $\binom{n}{n}$ که یک است. برای x به عبارت دیگر از میان n حرف x شامل اندیس y که n تا هستند هیچ کدام انتخاب نشده اند که تعداد جملات ممکن $\binom{n}{0}$ که مساوی یک است. $\binom{n}{0}$ برای y

تعداد جملاتی که فقط شامل یک y می‌باشد برابر است $\binom{n}{1}$ به بیان دیگر این جملات شامل $n-1$ اندیس x است که تعداد این جملات برابر است با $\binom{n}{n-1}$ و یک اندیس y می‌باشد. به همین ترتیب تعداد جملاتی که شامل ۲ اندیس y و $n-2$ اندیس x است برابر است با $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$ و ... حال فرض کنید اندیس‌های x و y را با یک نشانه $x+y$ نشان دهیم. $(x+y)^n$ درست است نیز برابر عبارت منتهی زیر باشد.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n} y^n$$

مثال:
باید تحلیل ترکیبیاتی ثابت کنید $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

تعداد ترکیب‌های $\binom{n}{k}$ به معنای آن است که با هیچ از میان n می‌توانیم k شی را انتخاب کنیم. واضح است که هر k شی را انتخاب $n-k$ شی باقی می‌ماند. یعنی n باید دو گروه k و $n-k$ داشته باشد. از آنجا که $n-k$ تقسیم کردیم واضح است که تعداد روش‌های ممکن با حالتی که از میان

n می‌تواند $n-k$ می‌انتخاب کنیم که این است. اگر برای این‌ها تحلیل ترکیباتی فراهم به صورت جبری می‌توان این‌ها کرد.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{n!}{(n-k)! [n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

فصل دوم
اصول احتمال

$$P(E) = \frac{n(E)}{n} \quad \begin{array}{l} \text{تعداد دفعات مورد انتظار} \\ \text{تعداد کل آزمایش} \end{array}$$

$$P(\text{دشمن شدن}) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

- در این صفت فقط آن دسته از آزمایشات تصادفی بررسی می‌شود که این دو نقطه را داشته باشند.
- ۱- تکرارپذیر باشند
 - ۲- مجموع نتایج ممکن آن از قبل قابل پیش‌بینی باشد.

فضای نمونه sample space

مجموعه کلیه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی گفته می‌شود که با نشان S دهد. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ S تاس $\{خط و شیر\}$ S سکه

مهمترین بحث در موضوع تئوری احتمال تعیین درست و دقیق فضای نمونه است.

تعریف رخداد outcome

به هر یک از نتایج یک آزمایش تصادفی رخداد می‌گویند.

تعریف رخداد event

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$n(S) = 6$$

به هر زیر مجموعه از فضای نمونه رخداد می‌گویند.

$$S = \{\text{خطا و غیر}\}$$

$$n(S) = 2$$

$$2^2 = 4 \text{ تعداد زیر مجموعه ها}$$

event

$$E_1 = \{\} \subseteq \emptyset \quad E_2 = \{\text{خطا}\} \quad E_3 = \{\text{خطا}\} \quad E_4 = \{\text{خطا و غیر}\}$$

اصول احتمال

$$1 - A, 0 \leq P(E) \leq 1 \rightarrow \text{احتمال به احتمال 0}$$

$$A - A, P(S) = 1 \rightarrow \text{فضای نمونه}$$

$$A - A, P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

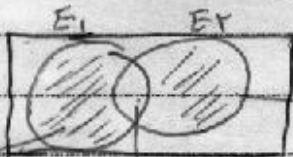
معروف با این

اجتماع

$$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$$

$$E_1 \cup E_2$$

یعنی حداقل یکی از اینها رخ دهد



$$E_2 - E_1$$

میرودن E1

$$E_1 - E_2$$

$$E_1 \cap E_2^c$$

$$E_1 \cap E_2$$

یعنی E2 رخ دهد اما E1 رخ ندهد

E1 رخ دهد، E2 رخ ندهد

اشتراک

نکته

اگر بین دو مجموعه علامت نبود به صورت زیر فرض یعنی اشتراک

$$E_1 \cap E_2 \rightarrow E_1 E_2$$

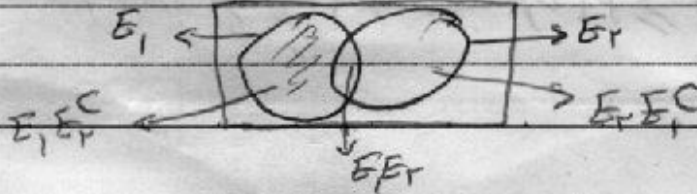
$$E_1 \cap E_2^c \rightarrow E_1 E_2^c \rightarrow \text{که به این صورت}$$

$$E_2 \cap E_1^c \rightarrow E_2 E_1^c$$

مفهوم احتمال

$$P(E) = \frac{n(E)}{n} \quad n \rightarrow \infty$$

مجموعی به حیرت جویدها



$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup E_2^c \cup E_1 \cap E_2$$

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup E_2^c \cup E_1 \cap E_2$$

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup E_2^c \cup E_1 \cap E_2$$

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup E_2^c \cup E_1 \cap E_2$$

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup E_2^c \cup E_1 \cap E_2$$

قوانین دو مجموعه

$$\begin{cases} (E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c \\ (E_1 \cap E_2)^c = E_1^c \cup E_2^c \end{cases}$$

نکته: اگر n مجموعه

$$\begin{cases} \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c \\ \left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c \end{cases}$$

$$\bigcup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$$

$$\bigcap_{i=1}^n E_i = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$$

قضیه

$$(1) P(\emptyset) = 0$$

$$S = S \cup \emptyset \Rightarrow P(S) = P(S \cup \emptyset) \xrightarrow{\text{اصل اول}} 1 = P(S \cup \emptyset) \xrightarrow{\text{اصل دوم}} P(S) + P(\emptyset)$$

$$S \cap \emptyset = \emptyset$$

$$1 = P(S) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

اصل اول

$$(2) \text{ if } E \subseteq F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$$

$$F = E \cup E^c \cap F$$

$$P(F) = P(E) + P(E^c \cap F)$$

$$P(E^c \cap F) \geq 0$$

$$P(E) + P(E^c \cap F) \geq P(E) \Rightarrow P(F) \geq P(E)$$



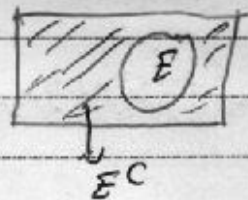
$$(3) P(E^c) = 1 - P(E)$$

$$\text{مثال 1} \quad S = E \cup E^c$$

$$P(S) = P(E \cup E^c) \Rightarrow (E \cap E^c = \emptyset)$$

$$1 = P(E) + P(E^c)$$

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$



$$(4) P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1, E_2)$$

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup E_2^c \cap E_2$$

$$P(E_1 \cup E_2) \xrightarrow{Ar} P(E_1) + P(E_2^c \cap E_2)$$

$$E_2 = E_2 \cap (E_1 \cup E_1^c)$$

$$P(E_2) \xrightarrow{Ar} P(E_2 \cap E_1) + P(E_2 \cap E_1^c) \Rightarrow P(E_1, E_2) + P(E_2 - E_1)$$

از جمله‌ها خارج از دایره E_1

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1, E_2)$$

تقسیم فرمول ۴
فرد متباین

$$P(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1}, E_{i_2}) + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} P(E_{i_1}, E_{i_2}, E_{i_3}) + \dots$$

$$+ (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}) + \dots + (-1)^{n+1} P(E_1, E_2, \dots, E_n)$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1, E_2) - P(E_1, E_3) - P(E_2, E_3) + P(E_1, E_2, E_3)$$

مثال ۲

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) - P(E_1, E_2) \\ &- P(E_1, E_3) - P(E_1, E_4) - P(E_2, E_3) - P(E_2, E_4) - P(E_3, E_4) \\ &+ P(E_1, E_2, E_3) + P(E_1, E_2, E_4) + P(E_1, E_3, E_4) + P(E_2, E_3, E_4) \\ &- P(E_1, E_2, E_3, E_4) \end{aligned}$$

مثال

فرض کنید در یک رستوران ۵ نفری زوج را به نشانی با احتمال ۱/۱۰
هیچ زن و شوهری کنار هم ننشینند.

زوج اول

E به نام آنکه هیچ زن و شوهر کنار هم ننشینند
 E^c به نام آنکه حداقل یک زوج کنار هم بنشینند

$$E^c = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$$

E_1 به نام آنکه زوج اول کنار هم بنشینند
 E_5

$$P(E^c) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) - P(E_1, E_2) - \dots - P(E_4, E_5) + P(E_1, E_2, E_3) + \dots + P(E_3, E_4, E_5) - P(E_1, E_2, E_3, E_4) - \dots - P(E_2, E_3, E_4, E_5) + P(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$$

$$\frac{9!2!}{10!}$$

$$10!$$

۱۰ جایگاه و ۱ نفر

۹ جایگاه و ۲ نفر و یک زوج

۲ جایگاه زوج و زوج

$$P(E^c) = \binom{5}{1} \frac{9!2!}{10!} - \binom{5}{2} \frac{8!2!2!}{10!} + \binom{5}{3} \frac{7!(2!)^3}{10!} - \binom{5}{4} \frac{6!(2!)^4}{10!} + \binom{5}{5} \frac{5!(2!)^5}{10!}$$

$$P(E) = 1 - P(E^c)$$

E به نام آنکه هیچ زن و شوهری کنار هم ننشینند

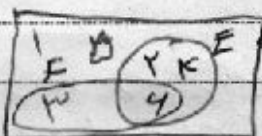
۵۵ ۲ و ۱۱ و ۱۳ و ۲۵ و ۵۴

۶۲ ۱ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۳ (تقریب)

احتمال شرطی و استقلال

تعریف احتمال شرطی:

فرض کنیم یک آزمای تصادفی انجام دهیم و از وقوع یک یا چند رویداد E مطلع باشیم. مثلاً تاسی را به تاسی کنیم و مطلع می شویم که عدد زوج آمده است. پس به شام E و فضای نمونه طبق شکل زیر خواهد بود ۵



با توجه به اینکه از وقوع E مطلع هستیم فضای نمونه جدید ما دیگر S نبوده بلکه E می باشد. حال اگر احتمال به شام دیگری روی این فضای نمونه مثل F را از ما بخواهند مثلاً F به شام ۱ باشد که تاسی صفت ۳ می باشد. در این صورت واضح است فقط پیش از F می تواند رخ دهد که داخل E قرار دارد. یعنی فقط $E \cap F$ می تواند رخ دهد.

بنابراین احتمال F به شرط دانستن وقوع E که با علامت F/E نشان داده می شود و می خوانیم F به شرط E از رابطه زیر بدست می آید.

$$P(F/E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)} \quad (\text{بر } n(S) \text{ تقسیم کنیم}) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

در این فرمول برای محاسبه احتمال شرطی F تعداد عضوهای $E \cap F$ یعنی $n(E \cap F)$ به تعداد عضوهای فضای نمونه جدید یعنی $n(E)$ تقسیم شده است. ولی در مجموع در فضای نمونه جدید نداشته باشیم و با همان فضای نمونه S کار کنیم پس صورت و مخرج را بر $n(S)$ تقسیم کردیم و به فرمول ارائه شده که صحت دارد می نویسیم و رسیدیم

$$P(F/E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

مفهوم استقلال

اگر دانستن وقوع E روی احتمال به شام F بی تاثیر باشد گوئیم F به E وابستگی ندارد و واضح است که اگر F به E وابسته نباشد E هم به F وابسته نخواهد بود و گوئیم E و F از هم مستقل هستند.

به زبان ریاضی می توان هر دو تعبیر زیر را برای استقلال دو رویداد E و F بیان کرد. به شرط E و F مستقل هستند

$$① \quad P(F/E) = P(F)$$

$$P(E/F) = P(E)$$

به شرط استقلال E و F از هم

اگر چه این دو رابطه به طرز بسیار واضح مفهوم استقلال را بیان می کنند

اما معمولاً از رابطه فوق کمتر استفاده می شود و رابطه زیر مفیدتر است.

$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} \quad \begin{array}{l} \text{اگر } E \text{ و } F \\ \text{مستقل باشند} \end{array} \rightarrow P(F) = \frac{P(EF)}{P(E)}$$

$$P(EF) = P(E) \cdot P(F) \quad \begin{array}{l} \text{شرط استقلال} \\ E \text{ و } F \end{array}$$

مثال

تاسی با دو مرتبه پرتاب کنیم اگر باینم مجموع اعداد روی ۲ تاس ۸ آمده است با چه احتمالی بار اول ۲ آمده است. آیا این دو رویداد مستقل اند یا وابسته؟ $n(S) = 36$ $\{ (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4) \}$

$$E = \{ (2,4), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) \} \quad n(E) = 5$$

$$F = \{ (2,1), (2,2), \dots, (2,6) \} \rightarrow n(F) = 6$$

$$EF = \{ (2,4) \} \rightarrow n(EF) = 1$$

$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5} \quad \begin{array}{l} \text{(دانش } E \text{ روی احتمال } F \text{ است)} \\ \text{گذاشته است} \end{array}$$

$$\therefore P(F) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(F|E) \neq P(F) \rightarrow E \text{ و } F \text{ وابسته اند}$$

به عبارت دیگر

$$P(EF) \neq P(E) \cdot P(F)$$

$$\frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} \rightarrow E \text{ و } F \text{ وابسته اند}$$

توجه!

شرط لازم برای داشتن استقلال داشتن اشتراک می باشد.

مثال

درون یک کیسه ۳ کارت وجود دارد. طرفین یک کارت آبی، طرفین یک کارت دیگر قرمز و کارت سوم یک طرف آبی و یک طرف قرمز است. از درون این کیسه به طور تصادفی یک کارت بیرون می آید. اگر روی کارت قرمز باشد با چه احتمالی پشت آن آبی است. گفتاری شوند این پیام را

کارت دوم طرف قرمز

کارت دوم طرف آبی

Date.

No. ۱۸

$$S = \{R_1, R_2, R_3, B_1, B_2, B_3\}$$

بنویسید

$$E = \{R_1, R_2, R_3\}$$

$$F = \{R_3\}$$

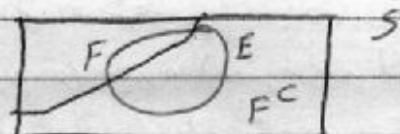
$$\Rightarrow E \cap F = \{R_3\}$$

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

احتمال $P(F|E)$

قضیه احتمال کلی

$$P(E) = P(E|F) \cdot P(F) + P(E|F^c) \cdot P(F^c)$$



$$E = EF \cup EF^c$$

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c)$$

$$P(E) = P(E|F) \cdot P(F) + P(E|F^c) \cdot P(F^c)$$

مثال

یکه A شامل سه مهره آبی و چهار مهره قرمز است. و یک B شامل دو مهره آبی و دو مهره قرمز است.

یک مهره به طور تصادفی از یکه A بیرون می‌آید و رنگ آن را نگاه می‌کنیم.

داخل یکه B می‌انداختیم. پس از یک B یک مهره بیرون می‌آید. این مهره

آبی است. به احتمال از یکه A یک B مهره آبی منتقل کرده باشیم.

یا مهره آبی از یکه B مهره آبی بیرون می‌آید.

به احتمال از یکه A یک B مهره قرمز منتقل کرده باشیم.

$$P(E) = P(E|F) \cdot P(F) + P(E|F^c) \cdot P(F^c)$$

$$P(E) = \frac{5}{9} \times \frac{3}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{18 + 16}{81} \Rightarrow P(E) = \frac{34}{81}$$

فرمول بین Bay's formula

$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)}$$

$$P(F|E) = \frac{P(E|F) \cdot P(F)}{P(E|F) \cdot P(F) + P(E|F^c) \cdot P(F^c)}$$

مثال

در مثال قبل اگر همه خارج شده از گروه آبی باشند باجه احتمالی از آنجا
A به یک B و هر دو جایزه را می بردند.

$$P(F|E) = \frac{P(E|F) \cdot P(F)}{P(E|F) \cdot P(F) + P(E|F^c) \cdot P(F^c)}$$

$$P(F|E) = \frac{\frac{8}{51} \times \frac{3}{51}}{\frac{8}{51} \times \frac{3}{51} + \frac{18}{49} \times \frac{48}{51}} = \frac{18}{49} = \frac{18}{51}$$

مثال

در یک آزمایش تشخیص اعتیاد از هر ۱۰۰ نفر معنادر ۹۵ نفر تشخیص اعتیاد
دارند و بقیه ۵ نفر از هر ۱۰۰ نفر سالم ۹۹ نفر را تشخیص سلامت می دهند. فرض
کنیم فقط شش درصد افراد بی اعتیاد معنادرند. حال اگر فردی از این
آزمایش با نتیجه مثبت بیرون آید باجه احتمال و احتمال معنادر او است.

E : بیمار است که مراجعه کننده به آزمایشگاه معنادر معنادر باشد

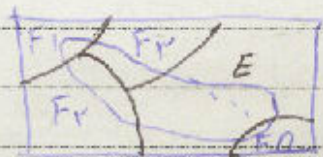
F : بیمار است که نتیجه آزمایش یک مراجعه کننده مثبت باشد

$$P(E|F) = \frac{P(F|E) \cdot P(E)}{P(F|E) \cdot P(E) + P(F|E^c) \cdot P(E^c)}$$

$$P(E|F) = \frac{\frac{48}{100} \times \frac{8}{1000}}{\frac{48}{100} \times \frac{8}{1000} + \frac{1}{100} \times \frac{998}{1000}} = \frac{48}{48 + 998}$$

$$P(E|F) = \frac{48}{1040} \approx \frac{1}{22}$$

تقسیم معینه احتمال کلی



$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_n = S$$

$$F_i \cap F_j = \emptyset \quad \text{for } i \neq j$$

$$P(E) = P(E|F_1) \cdot P(F_1) + P(E|F_2) \cdot P(F_2) + \dots + P(E|F_n) \cdot P(F_n)$$

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E|F_i) \cdot P(F_i)$$

تقسیم فرمول بین

$$P(F_k|E) = \frac{P(E|F_k)P(F_k)}{P(E)}$$

$$P(F_k|E) = \frac{P(E|F_k) \cdot P(F_k)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)}$$

مثال

فردی که یک کارخانه تولید لامپ لامپهای خود را در بسته های ۱۰ تایی به بازار عرضه می کند. یک بسته لامپ وقتی توسط مشتری پذیرفته می شود که حداقل ۳ تا از لامپها امتحان شوند و سالم باشند. این لامپ ها از ۳ خط تولید می آیند.

یک خط تولید خیلی قدیمی که ۲ درصد لامپ های به طور متوسط خراب است.

خط تولید دیگر که جدیدتر است ۵ درصد لامپ های خراب است

خط تولید مدرن و جدید دارد که فقط یک درصد لامپ های معیوب می باشد.

فرض تولید خطوط می کنند به ترتیب ۴۰ درصد و ۴۰ درصد و ۲۰ درصد باشد. با چه احتمالی یک بسته لامپ توسط مشتری پذیرفته می شود.

F_1 بسته ای که یک لامپ محصول خط یک باشد (خط قدیمی تر)

F_2 بسته ای که یک لامپ محصول خط دو باشد (خط قدیمی تر)

F_3 بسته ای که یک لامپ محصول خط سه باشد (مدرن)

E بسته ای که لامپ سالم باشد

E^c بسته ای که لامپ خراب باشد

$$P(E) = P(E|F_1) \cdot P(F_1) + P(E|F_2) \cdot P(F_2) + P(E|F_3) \cdot P(F_3)$$

$$P(E) = \frac{70}{100} \times \frac{4}{10} + \frac{95}{100} \times \frac{4}{10} + \frac{99}{100} \times \frac{2}{10} = \frac{280 + 380 + 39}{1000} = \frac{699}{1000}$$

$$P(E) = 69.9\%$$

E بسته ای که هر یک از یک بسته ده تایی سالم باشند

$$P(E_1) = \left(\frac{699}{1000} \right)^2 = 48.2\%$$

مثال

در مثال قبل اگر یک لامپ سالم باشد محصول کدام خط است

$$P(F_1|E) = \frac{P(E|F_1) \cdot P(F_1)}{P(E)} = \frac{\frac{70}{100} \times \frac{4}{10}}{\frac{699}{1000}} = \frac{280}{699} = 39.9\%$$

$$P(F_1|E) = \frac{P(E|F_1) \cdot P(F_1)}{P(E)} = \frac{\frac{45}{100} \times \frac{20}{10}}{\frac{181}{1000}} = \frac{215}{181} = 33.37\%$$

احتمال سالم بودن خط ۲

$$P(F_2|E) = \frac{P(E|F_2) \cdot P(F_2)}{P(E)} = \frac{\frac{44}{100} \times \frac{20}{10}}{\frac{181}{1000}} = \frac{244}{181} = 34.77\%$$

احتمال سالم بودن خط ۳

۱۱۵ و ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، ۱۷، ۲۳، ۳۲

خونک زایل و ۱۳، ۱۵، ۴۵

فصل چهارم

متغیرهای تصادفی Random Variable

متغیر تصادفی اینبارو است که به کمک آن نتایج آزمایش‌های تصادفی را کمی می‌کنیم (مدرسه‌ای و دهیم) به عبارت دیگر به نتایج آزمایش تصادفی عدد مشخصی نسبت می‌دهیم. باید مثال شروع می‌کنیم.

عرف به ازای

مثال ۱

کدای را به کتاب می‌نیم اگر متغیر تصادفی X به مقدار تعداد شیرهای ظاهر شده باشد مقادیر محتمل X کدامند؟ تعداد شیرهای ظاهر شده $\{0, 1, 2, 3\}$ اگر یک باشد شیر است و غیر باشد خطاست.

$X=1$ شیر
 $X=0$ خطا

مثال ۲

کدای را ۳ بار به کتاب می‌نیم اگر متغیر تصادفی Y به مقدار تعداد شیرهای ظاهر شده باشد مقادیر محتمل Y کدامند

$$Y = \{0, 1, 2, 3\}$$

$Y=3$	(شیر، شیر، شیر)	$\rightarrow Y=1$
$Y=2$	(شیر، شیر، خطا) (شیر، خطا، شیر) (خطا، شیر، شیر)	$\rightarrow Y=2$
$Y=1$	(شیر، خطا، خطا) (خطا، شیر، خطا) (خطا، خطا، شیر)	$\rightarrow Y=1$
$Y=0$	(خطا، خطا، خطا)	$\rightarrow Y=0$

مثال ۳

درون یک بسته ۳ مهره آبی و چهار مهره قرمز وجود دارد ۲ مهره به طور تصادفی بیرون درآید. اگر به ازای هر مهره آبی یک دلار بگیریم و به ازای هر مهره قرمز

یک دلار بیازیم مقدار حاصل بر دو باخت را بنویسیم

$X = \{-2, 0, 2\}$ $\rightarrow$ ۲ دلار بیازیم
 ۲ دلار بر ۲ دلار باخت ۲ دلار باخت

تابع احتمال (تابع جرم احتمال) (PMF) probability mass function

تابع جرم احتمال یا به اختصار تابع احتمال بیانگر احتمال بدست آمدن مقدار حاصل (محتمل) یک متغیر تصادفی می باشد.

مثال ۲

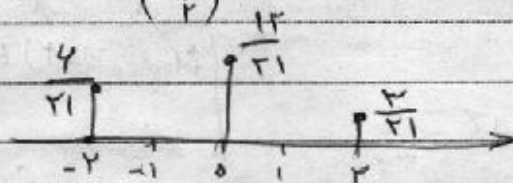
در مثال قبل (مثال ۲) تابع احتمال این متغیر تصادفی را بنویسید.

$$P\{X = -2\} = \frac{\binom{4}{2} \binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{3!}{0!3!}}{\frac{7!}{2!5!}} = \frac{4}{21}$$

احتمال اینکه ۲ دلار بیازیم

$$P\{X = 0\} = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{21} = \frac{12}{21}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{\binom{4}{0} \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1 \cdot \frac{3!}{2!1!}}{21} = \frac{3}{21}$$



نتیجه

$$P\{X = -2\} + P\{X = 0\} + P\{X = 2\} = 1$$

مثال ۳

در مثال ۱ تابع احتمال متغیر تصادفی را بنویسید

$$P\{X = 0\} = P\{\text{خط}\} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X = 1\} = P\{\text{عید}\} = \frac{1}{4}$$



مثال ۴

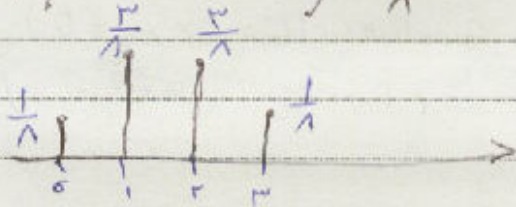
مطلوب است که ما به رسم تابع احتمال متغیر تصادفی ۴ در مثال ۲

$$P\{Y = 0\} = P\{\text{خود خد خد}\} = \frac{1}{8}$$

$$P\{Y = 1\} = P\{\text{خود خد خد} + \text{خد خد خد} + \text{خد خد خد} + \text{خد خد خد}\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{Y=2\} = P\{(2,2,2), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2), (2,2,3), (2,3,2), (3,2,2)\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{Y=3\} = P\{(3,3,3)\} = \frac{1}{8}$$



مثال ۷

تایی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم اگر متغیر تصادفی X بیانگر مجموع اعداد ظاهر شده باشد
الف مقادیر محتمل X را بیابید
ب تابع جرم احتمال (احتمال) متغیر تصادفی X را رسم کنید.

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (4,4)\} \rightarrow n(S) = 34$$

$$X = \{2, 3, 4, \dots, 12\} \text{ الف}$$

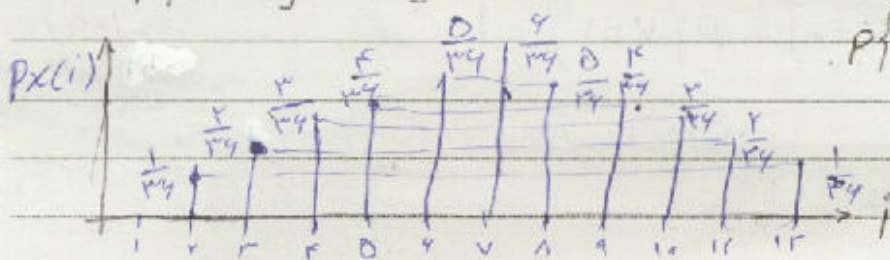
$$P\{X=2\} = P\{(1,1)\} = \frac{1}{34}$$

$$P\{X=3\} = P\{(1,2), (2,1)\} = \frac{2}{34}$$

$$P\{X=12\} \text{ بقیه را بنویس}$$

عدد	۲	۳	۴
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)
۲		(۲,۲)	(۲,۳)
۳			(۳,۳)
۴			

$$P\{X=12\} = \frac{1}{34}$$



تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X را $P_X(i)$ گویند
($P_X(i) = P\{X=i\}$)

مثال ۸

درون یک کیسه مهره‌های هم اندازه‌ای با شماره‌های ۱ الی ۲۰ قرار دارد شماره
بسیار تصادفی از درون کیسه بیرون داریم. تابع جرم احتمال بزرگترین شماره استخراج
شده را بیابید.
از ۳ شماره بیرون است شده و حتی اگر او ۳ شماره بزرگترین شماره (اول) بیرون بیاید.

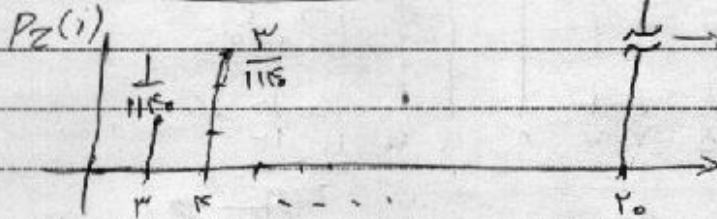
$$P_Z(i) = P\{Z=i\} = \frac{(1)(i-1)}{\binom{20}{2} = 190}, i = 2, 3, 4, \dots, 20$$

مثال فرمول با ۷ $P_Z(3) = P\{Z=3\} = \frac{(1)(2)}{\binom{20}{2}} = \frac{1}{190}$

$$P_Z(7) = \frac{(1)(6)}{\binom{20}{2}}$$

با فرمول بالا می توان خود را را هم پیدا کرد (میان می یاریم)

$$P_Z(i) = P\{Z=i\} = \frac{(1)(i-1)}{190}$$



$$\frac{19}{190}$$

یعنی خیلی کم است

تقریباً صفر
در مثال قبل تابع جرم احتمال شماره صیانی را به دست آوردیم. حال کن بار

خواص CDF

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

۱- تابعی است صعودی (یا ثابت است یا صعودی کند) (غیر نزولی)

۳- میزان پرشی یا ناپیوستگی تابع در نقاط محتمل برابر است با مقدار احتمال آن نقاط

بدین است تابع در نقاط غیر محتمل پیوسته است

۴- تابع CDF در نقاط انفصال دارای پیوستگی راست می باشد (در نقاط ناپیوسته از چپ پرش دارد)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$p_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

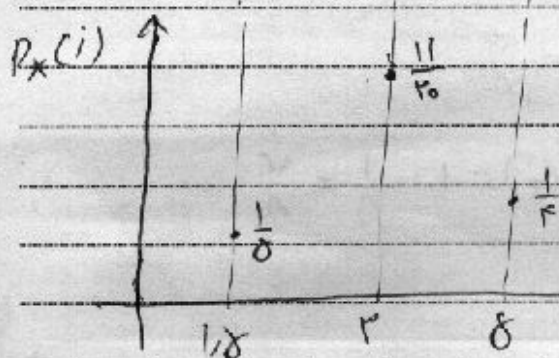
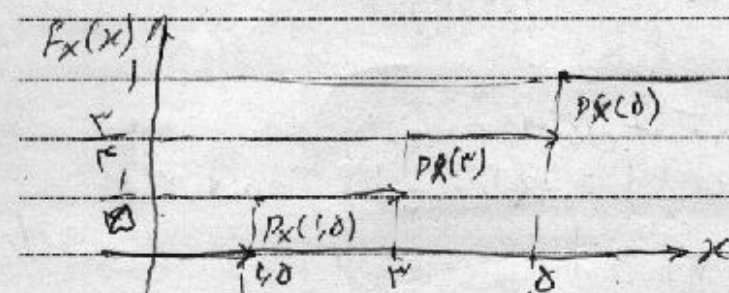
۴- احتمال تابع در هر نقطه برابر است با احتمال تابع در نقطه انفصال صافی احتمال تابع در نقطه کمتر از آن

$$P_X(4.5) = P\{X \leq 4.5\} = F_X(4.5) - F_X(4.5^-) = 0$$

$$P_X(7) = F_X(7) - F_X(7^-) = \frac{21}{34} - \frac{15}{34} = \frac{6}{34}$$

مثال

تابع توزیع تصادفی زیر را در نقطه تغییر و تابع چگای آن را رسم کنید.



$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{11}{10}$$

هر دو مثال او را

متغیر تصادفی دو جمله‌ای (The Binomial Random variable)

فرض کنید دنباله‌ای از آزمایش‌های تصادفی به صورت مستقل از هم تکرار شوند. اگر نتایج هر آزمایش را به ۲ دسته شکست و موفقیت تقسیم کنیم، تابع جرم احتمال تعداد موفقیت‌های حاصل شده در n تکرار مستقل از هم آزمایش‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$P\{X=i\} = P_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n$$

X = تعداد موفقیت‌ها $X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

n = تعداد دفعات تکرار آزمایش

p = احتمال موفقیت در هر آزمایش

$1-p$ = احتمال شکست در هر آزمایش

مثال

یکای را سه مرتبه به یکبار می‌زنیم. تابع جرم احتمال تعداد شیرهای ظاهر شده را بیابید.

پس احتمالات زیر را محاسبه نمایید.

الف) احتمال شیر ظاهر نشود

ب) ۲ بار شیر بیاید

ج) حداقل یک بار شیر ظاهر شود

موفقیت: ظاهر شدن شیر $n=3$

$X = \{0, 1, 2, 3\}$ تعداد شیرهای ظاهر شده X

$p = \frac{1}{2}$ احتمال شیر آمدن شیر ۱/۲ هر ۳ بار شیر آمدن

$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ احتمال خط آمدن

$$P_X(i) = \binom{3}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-i} = \binom{3}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad i=0, 1, 2, 3$$

$$P_X(0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad \text{الف}$$

$$\text{ب) } P_X(2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{ج) } P\{\text{حداقل یک بار شیر بیاید}\} = 1 - P_X(0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

مثال ۲

تاسی را ۵ مرتبه پرتاب می‌کنیم با چه احتمالی

(الف) ۳ بار عدد زوج ظاهر می‌شود

(ب) چهار بار عدد بزرگتر از چهار ظاهر می‌شود

(ج) احتمال عدد کمتر از ۳ ظاهر می‌شود

(الف) $p = \frac{3}{4}$ ظاهر شدن عدد زوج ۳ صوفیت

$$X = \text{تعداد صوفیت ها} \Rightarrow P_X(i) = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-i}$$

$$i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P_X(3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

(ب) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ظاهر شدن عدد بزرگتر از ۴ ۲ صوفیت

$$Y = \text{تعداد صوفیت ها}$$

$$P_Y(i) = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i}$$

$$P_Y(4) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{32}$$

$$P_Y(5) = \frac{1}{32}$$

(ج) ظاهر شدن عدد ۲ ۲ ظاهر شدن عدد کمتر از ۳ ۲ صوفیت

$$p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Z = \text{تعداد دفعات که عدد کمتر از ۳ ظاهر شود} = \text{تعداد صوفیت ها}$$

$$P_Z(i) = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i}$$

$$P_Z(0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P_Z(1) = \frac{5}{32}$$

متغیر تصادفی بواسون مهم

در متغیر تصادفی دو جمله‌ای اگر تعداد دفعات تکرار آزمایش (n) خیلی زیاد باشد $(n \rightarrow \infty)$ و احتمال موفقیت در هر آزمایش خیلی کم باشد $(p \rightarrow 0)$ ولی $n.p$ مقدار متوسطی باشد یا تقریب خیلی خوبی می‌توان به جای استفاده از فرمول تابع جرم احتمال دو جمله‌ای از فرمول زیر استفاده کرد.

$$P_X(i) = e^{-n.p} \cdot (n.p)^i / i!$$

$$n.p = \lambda \quad (\text{پارامتر بواسون})$$

مثال

در یک خیابان به طور متوسط روزانه ۲.۳ قطره تصادف رخ می‌دهد. باجه احتمالی در این خیابان در یک روز معین تصادف رخ می‌دهد.

(عدد فرضی $n = 20000$ خیلی زیاد است) تعداد اتومبیل‌های که از خیابان در یک روز عبور کنند n

$$p = \frac{2.3}{20000} = \frac{2.3}{n}$$

$$\lambda = n.p = 2.3 = \text{تعداد تصادف}$$

$$P_X(i) = e^{-2.3} \cdot (2.3)^i / i!$$

$$P_X(0) = e^{-2.3} \cdot (2.3)^0 / 0! = e^{-2.3}$$

برخی به بی‌های تصادفی که داریم توزیع بواسون هستند.

۱- تعداد غلط‌های تایپی در یک متن تایپ شده توسط تایپست

۲- تعداد تصادفات رانندگی در جاده‌های مختلف و خیابان‌ها

۳- تعداد مرگ و میرها در محل کار

۴- تعداد ازبواج‌های دانشجویی

۵- تعداد مشتریان که خرید می‌کنند (از یک مغازه)

مثال

از هر گرم از یک ماده رادیواکتیو به طور متوسط ۲.۳ ذره آلفا در هر ثانیه پرتاب می‌شود. باجه احتمالی در یک ثانیه معین هیچ ذره آلفایی پرتاب نمی‌شود

$n =$ تعداد اتم‌های ماده رادیواکتیو

تقریباً یک اتم

$$p = \frac{2.3}{n}$$

$$\lambda = n.p = 2.3$$

$$P_X(i) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^i / i! = e^{-2.3} \cdot (2.3)^i / i!$$

$$P_A(0) = e^{-2.3} \cdot (2.3)^0 / 0! = e^{-2.3}$$

امید ریاضی Expectation

تعریف: امید ریاضی متغیرهای تصادفی دو جمله‌ای و پواسن از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\bar{X} = EX = np$$

$$\bar{X} = EX = \lambda$$

امید ریاضی = متوسط - میانگین

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} i P_X(i)$$

مثال

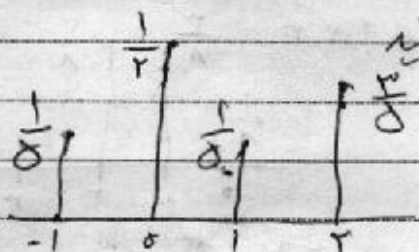
تاس را بیست بار پرتاب کنیم (۱۰ بار) امید ریاضی تعداد یک‌های ظاهر شده را بیابیم.

$$EX = n \cdot p = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$EX = \frac{5}{3} = 1.67$$

مثال

برابر تابع احتمال شکل زیر امید ریاضی پیدا کنید



$$Z = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$$\bar{Z} = (-1)\left(\frac{1}{8}\right) + (0)\left(\frac{1}{4}\right) + (1)\left(\frac{1}{8}\right) + (2)\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{6}{8} = \frac{6}{8} = 1.2$$

واریانس

یکسان با راسخ‌های معمول در سراسر آمار می‌باشد چه یقینی و چه تصادفی. واریانس می‌باشد و واریانس یک داده یقینی از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$var(X) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$EX = \bar{x}$$

به عبارت دیگر در صحت واریانس می‌خواهیم تفاوت داده‌ها با متوسط را ارزیابی کنیم. و این ارزیابی به کمک متوسط تیر از داده‌ها صورت می‌گیرد.

فرمول واریانس را به شکل زیر نیز می‌توان بیان کرد. (میانگین)

$$var(X) = (x - \bar{x})^2 = x^2 + \bar{x}^2 - 2x\bar{x} = \bar{x}^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2$$

$$var(X) = \bar{x}^2 - \bar{x}^2$$

در مجموع متوسط

پس می توان واریانس را به صورت تفاضل متوسط مربع داده ها معنای هر یک متوسط داده ها تقسیم نمود. همواره جزو واریانس را انحراف معیار یا انحراف استاندارد می گویند.

کسین مفهوم بدون هیچ تغییری در صورت داده های تصادفی معمم قابل بیان است تنها تفاوت در این است که نوع متوسط گیری آنها فرق دارد.

$$\bar{X} = EX = \sum_{i=1}^n i \cdot P_X(i) \quad \text{و} \quad \text{var}(X) = E(X - \bar{X})^2 = (X - \bar{X})^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2$$

$$\text{var}(X) = \bar{X}^2 - \bar{X}^2 = EX^2 - (EX)^2$$

مثال
سکه ای را ۳ مرتبه پرتاب می کنیم. امید ریاضی و واریانس تعداد شیرهای ظاهر شده را بیابید.

$X =$ تعداد شیرها $n=3$ پرتاب سکه از طریق

$$P_X(i) = \binom{3}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-i}, \quad i=0, 1, 2, 3$$

$$P_X(i) = \binom{3}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad i=0, 1, 2, 3$$

$$P_X(0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \quad P_X(1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

$$EX = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

$$EX = n \cdot p = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\textcircled{1} \text{var}(X) = (X - EX)^2 = (0 - 1.5)^2 \times \frac{1}{8} + (1 - 1.5)^2 \times \frac{3}{8} + (2 - 1.5)^2 \times \frac{3}{8} + (3 - 1.5)^2 \times \frac{1}{8} = \frac{2.25}{8} + \frac{0.75}{8} + \frac{0.75}{8} + \frac{2.25}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2.25}{8} + \frac{0.75}{8} + \frac{0.75}{8} + \frac{2.25}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{var}(X) = n \cdot p(1-p) = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

در متغیر تصادفی دووجهه ای فرمول دیگری برای واریانس

$$\text{var}(X) = n \cdot p(1-p)$$

حل: چون تعداد پر تاب لازم (تعداد آزمایه ها) تعدادی است متغیر
تصادفی X را تعداد آزمایه ها را لازم برابر حصول ۴ شیر در نظر می گیریم.
پس داریم: $\{X = 4, 5, \dots\}$ $r=4$

$$P_X(i) = \binom{i-1}{n-1} p^r (1-p)^{i-r}$$

$$P_X(i) = \binom{i-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{i-r}$$

$$P_X(i) = \binom{i-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad i = 4, 5, \dots$$

حال برابر صحابه آئنده این تاب لازم با عدد تاب ۴ شیر بر هیچ کافی است
به جای آن عدد ۱۰ را قرار دهیم. که خواهم داشت:

$$P_X(10) = \binom{9}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

۳)

حل کنید: متغیره آماری احتمال رخداد

Date.

No.

مکده ای را ۲۰ بار به کتابخانه می فرستد به طور متوسط ۱ بار در هر بار، در هر بار تعداد کتب فرستاده

$n = 20$

چندتا باشد. به روزی = شش آهنگ

$p = \frac{1}{20}$ احتمال به روزی $q = \frac{1}{2}$ احتمال شش آهنگ

$E(x) = np = 20 \times \frac{1}{20} = 1$

سالانه

در منطقه ای به طور متوسط ۲ زلزله رخ می دهد. معکوس است

الف - در ۵ سال آینده ۳ زلزله رخ دهد.

ب - احتمال اینکه در ۹ ماه آینده زلزله رخ ندهد.

ج - در ۳ سال آینده حداکثر ۳ زلزله رخ دهد.

د - احتمال اینکه در ۴ سال آینده حداقل یک زلزله رخ دهد.

$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$ $\lambda = 2$ (الف) $\lambda = 2$ $x = 3$ $\lambda = 1$ $x = 0$ $\lambda = 4$ $x = 0$ $\lambda = 1$ $x = 0$

$p(x=3) = \frac{e^{-2} \cdot 2^3}{3!}$

ب) $p(x=0) = \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ج) $p(x=0) + p(x=1) + p(x=2) + p(x=3)$

د) $\lambda = 1$

$1 - p(x=0) = 1 - \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} = 1 - e^{-1}$

Date.

No.

①

41,9,24

Date.

No.

حل تعیین آمار احتمالات مثال متفرقه خانگی، خانه

۱ نفر در ۸ دوست دارد و ۵ نفر از آن را به دوستان دیگر
چند انتخاب دارد اگر

الف - دو نفر از دوستان که با هم اختلاف دارند نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند
ب - اگر دو نفر از دوستان وی با هم دعوت شوند که در مهمانی شرکت می کنند

تعداد دوستان ۸ نفر

تعداد دعوتین ۵ نفر

$$\text{الف} = \binom{8}{2} - \binom{4}{2} = \frac{8!}{2!6!} - \frac{4!}{2!2!} = \frac{8 \times 7 \times 4}{2 \times 2} - \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 2} = 28 - 3 = 25$$

یا هر دو با هم نیایند و یا هر دو با هم بیایند

$$\binom{8}{2} - \binom{4}{2} + \binom{4}{2} = 28 - 3 + 3 = 28$$

۲ - اگر بخوانیم ۸ تخته سیاه یکسان بین ۴ مدرسه تقسیم نمی بینیم

الف - به چند طریق این کار امکان پذیر است. $n=8, k=4$

$$x_1 = \dots = x_k = 1 \text{ و تعداد تخته سیاه های به هر مدرسه می رسد } x_i \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$$

$$= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!8!} = 165$$

ب - چنانچه اگر لازم باشد به هر مدرسه حداقل یک تخته سیاه برسد.

$$n - k + 1 = 4 \rightarrow \binom{k+n-1}{k-1}$$

۳ - جعبه ۱ یک ۵ عدد تصفیه ۳ عدد قرمز جعبه ۲ دوم ۲ عدد سفید و

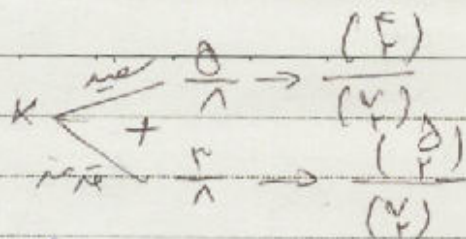
۴ عدد سفید قرمز دارد.

اگر یک سفید را به تعدادی از جعبه اول خارج می کنیم و در جعبه دوم قرار می دهیم در نهایت ۲ سفید از جعبه دوم خارج کنیم.

الف - احتمال اینکه دو سفید خارج شده از جعبه دوم قرمز باشد.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) + P(A \cap E)}$$



ب. اگر دو مهره خارج شده از جعبه دوم قرمز باشد مطلوب است احتمال اینکه از جعبه اول یک مهره سفید خارج شده باشد.

$P(A)$: احتمال سفید بودن مهره‌ای که از جعبه اول بیرون آمده

$P(B)$: ^{احتمال} قرمز بودن دو مهره خارج شده از جعبه دوم

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

نکته: توزیع n می‌تواند در r دسته‌بندی (تعداد یک‌نوعه + تعداد یک‌نوعه) $\binom{n+r-1}{n}$ تعداد یک‌نوعه

تعداد آرایش‌ها n می‌تواند 0 و $(r-1)$ می‌تواند n $\binom{n+r-1}{n-1}$

- عضو به سمت صفر میل کند احتمال موفقیت او 0.1 است. مطلوب است احتمال اینکه این عضو در 5 بار شکست بخورد و بتواند به هدف برسد.

$$= \binom{5}{3} (0.1)^3 (0.9)^2$$

اگر در یک توزیع دو جمله‌ای میانگین برابر 3 باشد و انحراف معیار $\sqrt{2}$ باشد مطلوب است الف - تعداد آزمایش‌ها ج - احتمال شکست د - احتمال کسب دو موفقیت

$$E(X) = np = 3 \text{ و } Var(X) = npq = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{E(X)}{Var(X)} = \frac{np}{npq} = \frac{3}{q} = \frac{3}{1-q} = \frac{1}{q} \Rightarrow q = \frac{1}{4} \quad p = \frac{3}{4} \quad p+q=1$$

$$3 = np = n \times \frac{3}{4} \Rightarrow n = 4 \quad \text{الف}$$

$$\Rightarrow P(X) = \binom{5}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3$$