

فیریک مواد با ضریب شکست منفی

چکیده

در سال های اخیر، پیشرفت های جدید در ساخت مواد الکترومغناطیسی به جایی رسیده که تولید مواد با ضریب شکست منفی^۱، با گذردهی الکتریکی و مغناطیسی منفی، در گستره ای از فرکانس ها امکان پذیر شده است. مفهوم ضریب شکست منفی مفاهیم جالب و جدیدی را در فوتونیک باز می کند. یک مثال جالب بحث عدسی کامل^۲ است که امکان تصویرسازی با ابعاد زیر طول موج را فراهم می کند. در اینجا ما قصد داریم مفاهیم پایه مواد با ضریب شکست منفی را به طور خلاصه مرور کنیم.

در ابتدا به یک مقدمه در مورد تعریف ضریب شکست، رابطه ماکسول برای آن، مفهوم ضریب شکست مختلط و ... می پردازیم بعد به ترتیب در مورد مواد با ثابت دی الکتریک منفی، گذردهی مغناطیسی منفی و نهایتاً ضریب شکست منفی صحبت خواهیم کرد سپس به انتشار موج الکترومغناطیسی در این مواد و پیامدهای جالب ناشی از معکوس شدن بردار موج در این محیط ها می پردازیم در نهایت نیز به عنوان یکی از کاربردهای جالب این مواد عدسی کامل را مورد بحث قرار می دهیم.

۱ مقدمه

در اپتیک ضریب شکست یک ماده به طور معمول به صورت زیر تعریف می شود:

$$n = \frac{c}{v}$$

در رابطه فوق c سرعت نور در خلا و v سرعت موج تخت الکترومغناطیسی در محیط است. با استفاده از معادلات ماکسول می توان نشان داد که ضریب شکست یک محیط به صورت زیر به گذردهی الکتریکی و مغناطیسی نسبی^۳ آن ماده مربوط می شود:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}$$

همانطور که می دانیم گذردهی الکتریکی و مغناطیسی نشان دهنده پاسخ ماکروسکوپی یک محیط همگن به میدان الکتریکی و مغناطیسی اعمالی است. همه مواد علی^۴ پاشنده هستند یعنی گذردهی الکتریکی و مغناطیسی نسبی در آنها تابع مختلطی از فرکانس است. دلیل این امر آن است که قطبش

¹Negative Refractive Index Materials (NRMs)

²Perfect Lens

³Relative Electric Permittivity and Relative Magnetic Permeability

⁴Causal

در این محیط ها پاسخ آنی میدان الکترومغناطیسی نیست بلکه به تاریخچه میدان اعمالی بستگی دارد.

قسمت موهومی گذردهی الکتریکی و مغناطیسی نسبی به طور مستقیم به جذب موج الکترومغناطیسی در محیط مربوط می شود. در یک محیط در تعادل ترمودینامیکی قسمت موهومی ϵ و μ نمی تواند منفی باشد. دلیل این امر آن است که جذب کل در حجم V از این محیط تعریف مثبت دارد :

$$\int_V d^3\vec{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega [Im(\epsilon(\omega)) |E(\vec{r}, \omega)|^2 + Im(\mu(\omega)) |H(\vec{r}, \omega)|^2] \frac{d\omega}{4\pi}$$

ولی از لحاظ بنیادی هیچ دلیلی برای غیر منفی بودن قسمت حقیقی ϵ و μ وجود ندارد.

اکثر مواد پاسخ الکتریکی خوبی در گستره وسیعی از فرکانس ها (رادیویی تا فرابنفش) دارند ولی پاسخ مغناطیسی مواد معمولا به فرکانس های پایین میکروموج مربوط می شود. دلیل این امر این است که مغناطش معمولا ناشی از جفت نشدگی اسپین الکترونها و یا جریان مداری الکترونهاست که برانگیختگی دسته جمعی اینها معمولا در فرکانس های پایین رخ می دهد. اما امروزه قابلیت ساختن مواد مصنوعی در ابعاد میکرو و نانو امکان ساخت موادی با پاسخ مغناطیسی در گستره وسیعی از فرکانس ها را فراهم کرده است.

در سال ۱۹۶۷ میلادی *Veselago* محیطی را در نظر گرفت که گذردهی الکتریکی و مغناطیسی آن منفی بود و به این نتیجه رسید که ضریب شکست این محیط نیز باید منفی باشد. (یعنی ریشه منفی $n = -\sqrt{\epsilon\mu}$ باید انتخاب شود) اما به علت عدم وجود مواد با ضریب شکست منفی توجه زیادی به این مسئله نشد. در سال های اخیر به علت فراهم شدن امکاناتی برای ساخت چنین موادی (حداقل در یک گستره فرکانسی) کارهای این دانشمند روسی مورد توجه قرار گرفته است.

برای نشان دادن این امر که محیطی با ϵ و μ منفی دارای ضریب شکست منفی نیز است معادلات ماکسول را برای یک موج هماهنگ تخت در نظر می گیریم :

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \mu_0 \vec{H}$$

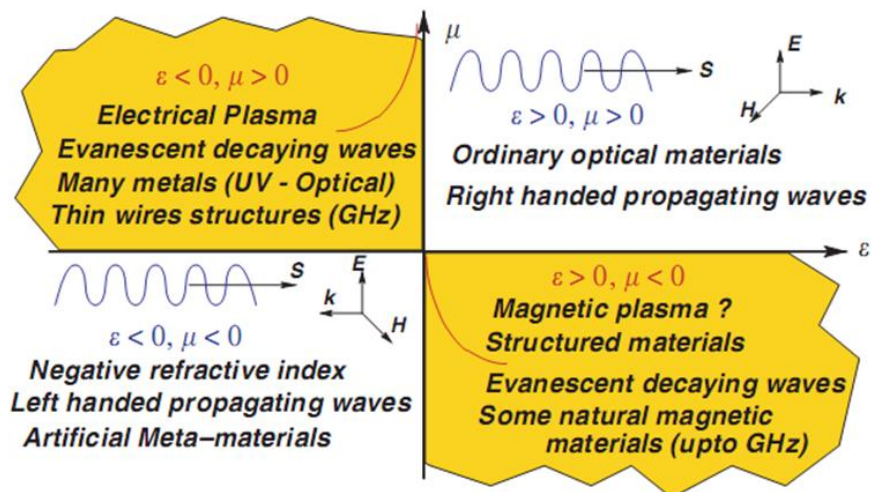
$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

اگر برای یک فرکانس قسمت حقیقی ϵ و μ منفی و قسمت موهومی آن ها قابل اغماض باشد و بردار موج را به صورت زیر در نظر بگیریم :

$$\vec{k} = \frac{n\omega}{c} \hat{n}$$

که \hat{n} بردار یکه در جهت بردار پویین تینگ $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ است آنگاه واضح است که به علت چپگرد بودن سه بردار \vec{E} ، \vec{k} و \vec{H} ضریب شکست n باید منفی باشد. در چنین صورتی بردار انتشار در جهت معکوس بردار پویین تینگ خواهد بود.

در شکل زیر تقسیم بندی مواد بر اساس علامت گذردهی الکتریکی و مغناطیسی و نحوه انتشار موج در آن ها نشان داده شده است.



با توجه به دو معادله ماکسول برای موج تخت هماهنگ و رابطه

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2}$$

می توان شکل را تفسیر کرد. در نواحی که ϵ و μ هم علامت هستند انتشار موج وجود دارد ولی در دو ناحیه دیگر به علت موهومی شدن بردار موج، انتشار وجود ندارد و فقط افت نمایی میدان ها را داخل محیط خواهیم داشت.

۲ مواد با گذردهی الکتریکی منفی

۱.۲ فلزات در فرکانس های نوری^۵

اکثر فلزات در فرکانس های نوری گذردهی الکتریکی منفی دارند. اگر فلز را به صورت مجموعه ای از الکترون های آزاد در زمینه ای از بارهای مثبت در نظر بگیریم می توان نشان داد گذردهی الکتریکی فلز از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

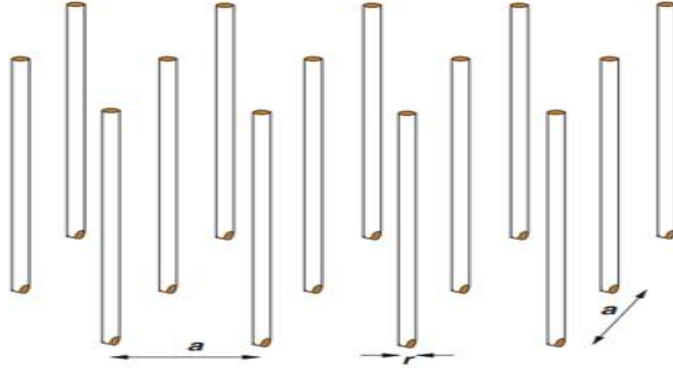
در این رابطه $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ فرکانس پلاسما^۶ الکتریکی است که برای بیشتر فلزات در ناحیه فرابنفش قرار دارد. با توجه به رابطه فوق برای فرکانس های کمتر از فرکانس پلاسما گذردهی الکتریکی فلز منفی است.

⁵Metals at Optical Frequency

⁶Electrical Plasma Frequency

۲.۲ شبکه سیمی در فرکانس های پایین^۷

آرایه ای از سیم های فلزی نازک بینهایت دراز که در آرایه تناوبی مربعی قرار گرفته اند می تواند در فرکانس های پایین گذردهی الکتریکی منفی داشته باشد. (شکل زیر)



محدود بودن حرکت الکترون ها در درون سیم ها دو نتیجه دارد :

- کاهش چگالی موثر الکترونی : در طول موج های بزرگ میدان تک تک سیم ها را احساس نمی کند بلکه سیستم را تقریباً به صورت سیستم همگنی می بیند که چگالی موثر الکترونی آن از رابطه زیر بدست می آید :

$$n_{eff} = \frac{\pi r^2}{a^2} n$$

- از آنجا که سیم های نازک دارای خودالقایی بالایی هستند تغییر جریان داخل آن ها مشکل است و این مثل این است که جرم موثر الکترون های داخل این محیط بیشتر از مقدار واقعی آنهاست. با محاسبه پتانسیل برداری ایجاد شده در این محیط (در اثر انتشار موج الکترومغناطیسی) و با توجه به اینکه تکانه موثر الکترون درون میدان الکترومغناطیسی برابر $\vec{p} = e\vec{A}$ است می توان نشان داد :

$$m_{eff} = \frac{\mu_0 \pi r^2 n e^2}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{a}{r}\right)$$

با توجه به روابط فوق برای فرکانس پلاسما خواهیم داشت :

$$\omega_p^2 = \frac{n_{eff} e^2}{\epsilon_0 m_{eff}} = \frac{2\pi c^2}{a^2 \text{Ln}\left(\frac{a}{r}\right)}$$

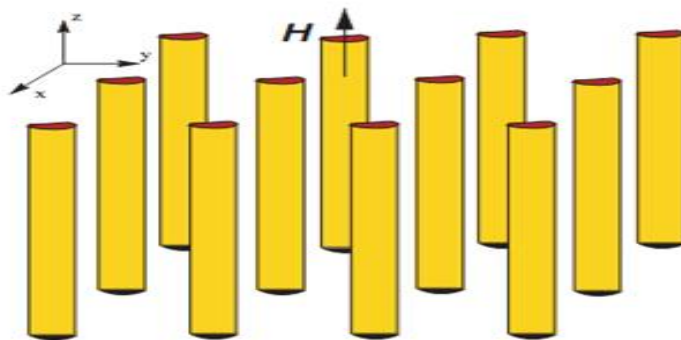
با کاهش چگالی موثر و افزایش جرم موثر فرکانس پلاسما کاهش می یابد. به عنوان مثال برای مقادیر $n = 10^{29}/m^3$ و $a = 10mm$ ، $r = 1\mu m$ فرکانس پلاسما برابر $2GHz$ می شود.

⁷Wire-Mesh Structures at Low Frequency

۳ مواد با گذردهی مغناطیسی منفی

۱.۳ دسته ای از استوانه های فلزی^۸

اکثر مواد به خاطر قانون لنز از خود خاصیت دیامغناطیسی نشان می دهند. فرض کنید میدان الکترومغناطیسی وارد محیطی شامل آرایه ای مربعی با پریود a از استوانه های فلزی به شعاع r شود (میدان \vec{H} موازی محور استوانه باشد). جریان های سطحی دایره ای ایجاد شده در سطوح استوانه



طوری است که باعث کاهش شار مغناطیسی ایجاد شده در داخل استوانه ها شود. بنابراین محیط در برابر میدان اعمالی رفتار دیامغناطیس از خود نشان می دهد. با فرض بزرگ بودن طول موج میدان در برابر ابعاد شبکه می توان محیط را همگن در نظر گرفت. در اینصورت با محاسبه میدان موثر می توان نشان داد که گذردهی مغناطیسی موثر محیط برابر است با (در این رابطه ρ مقاومت در واحد طول فلز است):

$$\mu_{eff} = \frac{B_{eff}}{\mu_0 H_{eff}} = 1 - \frac{\pi r^2 / a^2}{1 + \frac{\gamma \rho}{\mu_0 \omega r}}$$

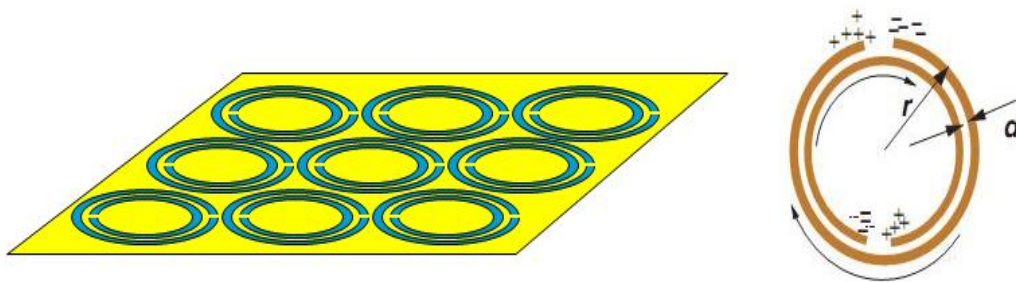
قسمت حقیقی عبارت فوق همیشه بین صفر و یک قرار دارد یعنی همانطور که انتظار می رفت محیط پاسخ دیامغناطیس از خود نشان می دهد. اما هدف ما گذردهی مغناطیسی منفی است که در این محیط مشاهده نمی شود. دلیل این امر آن است که جریان القایی هیچگاه آنقدر زیاد نمی شود که بتواند میدانی بزرگتر از میدان اعمالی (در خلاف جهت آن) ایجاد کند. همانطور که می دانید در این محیط فقط اثر القایی وجود دارد ولی اگر به این محیط عنصر خازنی هم اضافه شود میتوان با تشدید مدار LC ایجاد شده جریان زیادی تولید کرد که نتنها میدان اعمالی را خنثی کند بلکه میدان خالصی در خلاف جهت آن ایجاد کند. (گذردهی مغناطیسی منفی)

۲.۳ تشدیدگرهای حلقه ای مجزا^۹

با توجه به مطالب بیان شده در فوق گذردهی مغناطیسی موثر آرایه ای از تشدیدگرهای حلقه ای مجزا (SRR) می تواند منفی باشد.

⁸A Stack of Metal Cylinders

⁹Split Ring Resonator(SRR)



با محاسبه میدان های موثر در این حالت می توان نشان داد که :

$$\mu_{eff} = 1 + \frac{f\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}$$

که در رابطه فوق ω_0 فرکانس تشدید^{۱۰}، f کسر پرشدگی^{۱۱} و Γ ضریب میرایی^{۱۲} می باشد و از روابط زیر حاصل می شوند :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3d}{\mu_0\epsilon_0\epsilon\pi^2r^3}}$$

$$f = \frac{\pi r^2}{a^2}$$

$$\Gamma = \frac{2\rho}{\mu_0 r}$$

با فرض قابل صرفنظر بودن مقاومت فلز (در واحد طول) ($\rho \simeq 0$) قسمت حقیقی گذردهی مغناطیسی در بازه بین ω_0 و ω_m منفی خواهد بود که فرکانس پلاسمای مغناطیسی^{۱۳} است :

$$\omega_m = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-f}}$$

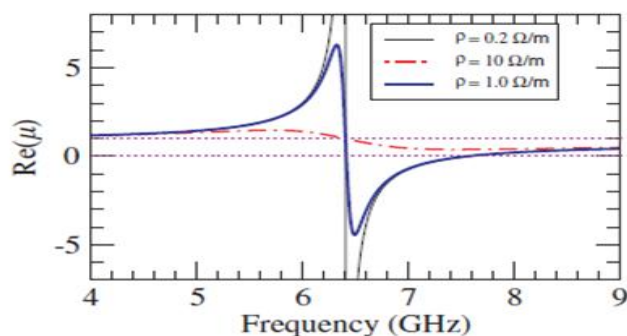
با افزایش مقاومت فلز این بازه کاهش می یابد. شکل ۱ تغییرات قسمت حقیقی μ را بر حسب فرکانس برای چند مقاومت در واحد طول مختلف نشان می دهد.

¹⁰Rosonance Frequency

¹¹Filling Fraction

¹²Damping Factor

¹³Magnetic Plasma Frequency



شکل ۱: تغییرات قسمت حقیقی μ را بر حسب فرکانس برای چند مقاومت در واحد طول مختلف

۴ مواد با ضریب شکست منفی

همانطور که قبلاً بیان شد مواد با ϵ و μ منفی دارای ضریب شکست منفی خواهند بود. اسمیت^{۱۴} و همکارانش محیطی مرکب از سیم های فلزی نازک با $\epsilon < 0$ و SRR با $\mu < 0$ را پیشنهاد کردند. (شکل ۲) محاسبات و آزمایش های انجام شده نشان میدهد که برهمکنش بین دو سیستم به جابجایی فرکانس تشدید و افزایش میرایی محیط منجر می شود. رابطه پاشندگی این محیط به صورت زیر خواهد بود که با فرض $\omega_p > \omega_m$ در ناحیه $\omega_0 < \omega < \omega_m$ محیط دارای ضریب شکست منفی خواهد بود:

$$k^2 = \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_m^2)}{c^2(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

۵ چگالی انرژی در محیط با ضریب شکست منفی

محیط با ضریب شکست منفی لزوماً پاشنده است. دلیل این امر آن است که چگالی انرژی برای محیط غیر پاشنده از رابطه زیر بدست می آید که برای محیط با ϵ و μ منفی غیر پاشنده منفی می شود.

$$u = \frac{1}{4}\epsilon\epsilon_0|E|^2 + \frac{1}{4}\mu\mu_0|H|^2$$

¹⁴Smith



شکل ۲: آرایه پیشنهادی برای محیط با ضریب شکست منفی

می توان نشان داد که چگالی انرژی برای محیط پاشنده ای که روابط کرامرز-کرونیگ^{۱۵} در آن برقرار باشد از رابطه

$$u(t) = \frac{1}{4} \epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{4} \mu_0 |H|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\alpha_E(\omega)|^2 \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\omega\tau} E(\tau) \\ + \alpha_H(\omega) \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\omega\tau} H(\tau) |^2$$

حاصل می شود که همیشه مثبت است. در رابطه فوق

$$|\alpha_E(\omega)|^2 = \omega \text{Im}(\epsilon(\omega))$$

$$|\alpha_H(\omega)|^2 = \omega \text{Im}(\mu(\omega))$$

۶ انتشار موج در مواد با ضریب شکست منفی

در مقدمه برای محیط بدون جذب نشان دادیم که در صورت منفی بودن ϵ و μ ضریب شکست نیز منفی خواهد بود. در اینجا به روشی دیگر نشان می دهیم که در محیط جاذب (با جذب کم) ضریب شکست به صورت $n = -\sqrt{\epsilon\mu}$ خواهد بود. فرض کنید موج تختی به صورت $\exp(ink_0x)$ در محیط NRM با جذب کم حرکت می کند. با فرض

$$\epsilon = \epsilon_R + i\epsilon_I, \mu = \mu_R + i\mu_I$$

که

$$\text{Re}(\epsilon) < 0, \text{Re}(\mu) < 0, \text{Im}(\epsilon) > 0, \text{Im}(\mu) > 0$$

¹⁵Kramers-Kronig

برای ضریب شکست داریم :

$$n^2 = \epsilon\mu = (\epsilon_R + i\epsilon_I)(\mu_R + i\mu_I)$$

و در نتیجه

$$n = \pm \sqrt{(\epsilon_R + i\epsilon_I)(\mu_R + i\mu_I)} \simeq \pm \sqrt{\epsilon_R\mu_R} \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\epsilon_R\mu_I + \epsilon_I\mu_R}{\epsilon_R\mu_R} \right)$$

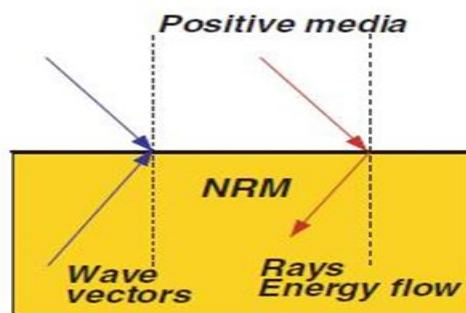
از آنجا که دامنه موج باید با انتشار در محیط کاهش پیدا کند قسمت موهومی n باید مثبت باشد و این بدین معنی است که در رابطه فوق باید علامت منفی انتخاب شود. یعنی ضریب شکست محیط منفی خواهد بود.

۷ قانون اصلاح شده اسنل در شکست^{۱۶}

وقتی نور به طور مایل از محیطی وارد محیط دیگری با ضریب شکست متفاوت می شود می شکند. بنا بر قانون اسنل اگر زاویه تابش و شکست به ترتیب θ_i و θ_r باشد آنگاه

$$n_i \sin(\theta_i) = n_r \sin(\theta_r)$$

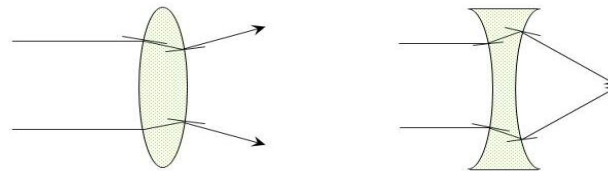
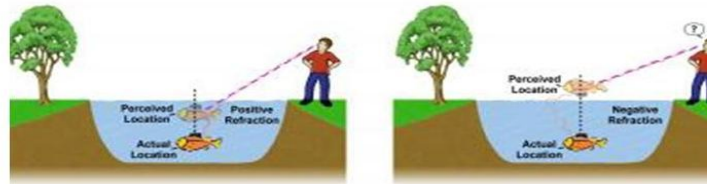
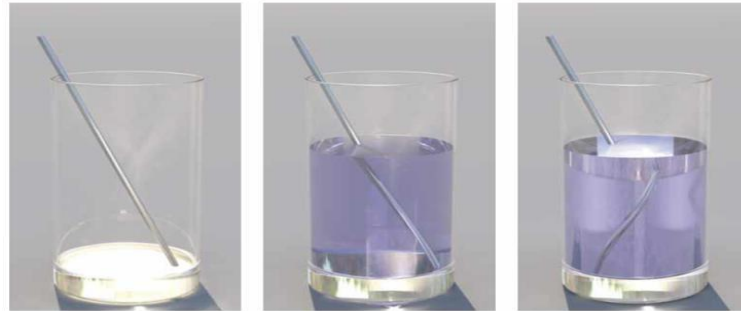
حال فرض کنید نور از محیطی با ضریب شکست مثبت وارد محیطی با ضریب شکست منفی شود. در این صورت پرتو نور چگونه عمل خواهد کرد؟ با در نظر گرفتن دو موج تخت ورودی و خروجی و نوشتن شرایط مرزی در مرز جدایی دو محیط می توان نشان داد که در این حالت نیز قانون اسنل برقرار است. منفی شدن زاویه شکست بدین معنی است که نور در جهت دیگر خط عمود بر مرز دو محیط شکسته می شود. (شکل ۳)



شکل ۳: عبور نور در مرز بین دو محیط با ضریب شکست مثبت و منفی

در شکل زیر برخی نتایج جالب ناشی از منفی شدن زاویه شکست را مشاهده می کنید.

¹⁶The modified Snell's law of refraction



شکل ۴: اگر ضریب شکست آب منفی شود! ، عدسی محدب نور را واگرا و عدسی مقعر نور را همگرا می کند

۸ اثر داپلر معکوس^{۱۷}

فرض کنید چشمه نوری با فرکانس ω ، با سرعت \vec{v} داخل محیطی با ضریب شکست منفی حرکت کند. بر طبق اثر دوپلر فرکانسی که ناظر ساکن در محیط می بیند از رابطه زیر بدست می آید :

$$\omega' = \gamma(\omega + \vec{k} \cdot \vec{v})$$

که در این رابطه \vec{k} بردار انتشار مدی است که از چشمه به سمت ناظر می آید و $\gamma = (1 - (\frac{v}{c})^2)^{-1/2}$ ضریب نسبیتی است. با توجه به اینکه در محیط با ضریب شکست منفی بردار انتشار و بردار پویین تینگ خلاف جهت یکدیگر هستند بردار انتشار مدی که به سمت ناظر می آید منفی است. به عبارت دیگر فرکانس مشاهده شده توسط ناظر در محیط با ضریب شکست منفی از سوی چشمه ای با سرعت

¹⁷The reversed Doppler shift

\vec{v} برابر فرکانس مشاهده شده توسط ناظری است که در محیطی با همان ضریب شکست ولی با علامت مثبت قرار دارد و چشمه با سرعت $-\vec{v}$ حرکت می کند.

۹ سرعت فاز^{۱۸}، گروه^{۱۹} و انتشار انرژی^{۲۰} در محیط با ضریب شکست منفی

از آنجا که بردار انتشار موج در محیط با ضریب شکست منفی خلاف جهت بردار پویین تینگ است سرعت فاز نیز در این محیط معکوس می شود. ولی سرعت انتشار انرژی همچنان در جهت بردار پویین تینگ خواهد بود. می توان نشان داد که سرعت گروه برای بسته موج با پهنای کم همواره در جهت بردار پویین تینگ است در نتیجه سرعت گروه موج نیز در جهت شارش انرژی و خلاف جهت سرعت فاز خواهد بود.

۱۰ عدسی کامل^{۲۱}

۱۰.۱۰ اطلاعات میدان نزدیک و محدودیت پراش

با عدسی های معمولی دقت^{۲۲} تصویر هیچگاه از طول موج بیشتر نمی شود. کار عدسی این است که تغییر فازی در در هریک از مولفه های فوریه موج عبوری ایجاد می کند به طوری که در برهم نهی مجدد آنها در پشت عدسی موج اولیه ایجاد شده تصویر شی بازسازی شود. ولی همانطور که در زیر خواهیم دید برخی از مولفه های نور در عبور از محیط و عدسی به خاطر افت نمایی حذف می شوند و ما تصویر کامل شی را در پشت عدسی نخواهیم داشت. فرض کنید عدسی در امتداد محور z قرار دارد. شی جلوی عدسی میدان زیر را از خود گسیل (یا بازتاب) می کند:

$$E(r, t) = \sum_{\sigma, k_x, k_y} E_{\sigma}(k_x, k_y) e^{ik_z z + ik_x x + ik_y y - i\omega t}$$

که

$$k_z = \sqrt{\frac{n^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$$

در رابطه فوق بیرون عدسی (خلا) $n = 1$ و داخل عدسی n ضریب شکست عدسی است. (شی در سمت چپ عدسی فرض شده و بنابراین فقط مولفه میدانی که به سمت راست می آید در نظر گرفته شده است) با توجه به رابطه فوق واضح است که برای

$$k_x^2 + k_y^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$$

¹⁸Phase Velocity

¹⁹Group Velocity

²⁰Energy Follow Velocity

²¹Perfect Lens

²²Resolution

k_z در خلا موهومی می شود و این مد یک افت نمایی در فضا دارد. عدسی در این حالت نتنها این مد را تقویت نمی کند بلکه برای

$$k_x^2 + k_y^2 > \frac{n^2 \omega^2}{c^2}$$

به افت آن نیز می افزاید. بنابراین این مدها عملا از موج اولیه حذف می شوند و موج جمع شده در پشت عدسی کامل نیست و اطلاعات تصویر شی را به طور کامل ندارد. واضح است که حداکثر دقت تصویر مربوط به حداکثر بردار موج عرضی (حداقل طول موج عرضی) است. چون بردار موج عرضی ماکزیمم میدان پشت عدسی برابر

$$k_{max,trans} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\omega}{c}$$

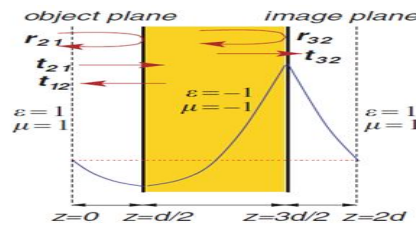
است بنابراین ماکزیمم دقت تصویر برابر

$$\frac{2\pi}{k_{max,trans}} = \frac{2\pi}{\omega/c} = \lambda$$

خواهد بود. اگر عدسی می توانست علاوه بر تصحیح فاز موج ناپایدار^{۲۳} را تقویت کند ما می توانستیم تصویر کاملی از شی پشت عدسی داشته باشیم. همانطور که در بخش بعد خواهیم دید یک تیغه^{۲۴} با ضریب شکست منفی یک می تواند این کار را انجام دهد.

۲.۱۰ تیغه با ضریب شکست منفی به عنوان عدسی کامل

یک تیغه با $\epsilon = -1$ و $\mu = -1$ و ضخامت d را در راستای محور z و در فاصله $z = d/2$ تا $z = 3d/2$ در نظر بگیرید. فرض کنید چشمه ای در $z = 0$ قرار دارد هدف ما این است که میدان چشمه را در $z = 2d$ بدست بیاوریم. برای این کار ابتدا ضریب عبور و بازتاب تیغه را بر حسب ضریب عبور و بازتاب در مرزهای تیغه و خلا بدست می آوریم. (شکل ۵ را ببینید)



شکل ۵: محاسبه ضریب عبور و بازتاب تیغه

نوری که از چشمه به سمت تیغه می رود پس از عبور و بازتاب های متفاوت از تیغه عبور می کند.

²³Evanescant

²⁴Slab

ضریب عبور کل تیغه برابر جمع ضریب عبور راه های مختلف عبور است :

$$T = t_{21}t_{32} + t_{21}r_{32}r_{12}t_{32} + \dots = \frac{t_{21}t_{32}e^{ik_z d}}{1 - r_{12}r_{21}e^{2ik_z d}}$$

به طریق مشابه برای ضریب بازتاب کل نیز داریم :

$$R = \frac{r_{21} + r_{32}e^{2ik_z d}}{1 - r_{12}r_{21}e^{2ik_z d}}$$

حال فرض کنید میدان گسیل شده از جسم مولفه های فوریه ای به شکل زیر داشته باشد :

$$E(r, t) = E_0 \exp(ik_z z + ik_x x + ik_y y - i\omega t)$$

- برای مدهای منتشر شونده (k_z حقیقی) با اعمال شرایط مرزی داریم :

$$k_{z1} = k_{z3} = \sqrt{\frac{\epsilon_+ \mu_+ \omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}, \quad k_{z2} = -\sqrt{\frac{\epsilon_- \mu_- \omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$$

و در حد $\mu_- \rightarrow -1$ و $\epsilon_- \rightarrow -1$ خواهیم داشت :

$$\lim_{\substack{\epsilon_- \rightarrow -1 \\ \mu_- \rightarrow -1}} T = e^{-ik_{z1}d}, \quad \lim_{\substack{\epsilon_- \rightarrow -1 \\ \mu_- \rightarrow -1}} R = 0$$

روابط فوق نشان می دهد که هیچ موج بازتابی وجود ندارد و تغییر فاز خالص ایجاد شده در کل مسیر (خلا + عدسی) برای موج عبوری صفر است. در نتیجه : ” کل موج انتشاری بدون هیچ تغییری

به سمت دیگر عدسی می رود”

- برای مدهای ناپایدار (k_z موهومی) با اعمال شرایط مرزی و در حد $\mu_- \rightarrow -1$ و $\epsilon_- \rightarrow -1$ خواهیم داشت :

$$k_{z1} = k_{z3} = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \frac{\epsilon_+ \mu_+ \omega^2}{c^2}} = ik_z, \quad k_{z2} = k_{z1}$$

$$\lim_{\substack{\epsilon_- \rightarrow -1 \\ \mu_- \rightarrow -1}} T = e^{+k_z d}, \quad \lim_{\substack{\epsilon_- \rightarrow -1 \\ \mu_- \rightarrow -1}} R = 0$$

این روابط حاکی از آن است که عدسی عملا افت نمایی دامنه موج ناپایدار در خلا را جبران می کند.

در نتیجه : ” کل موج ناپایدار بدون هیچ تغییری به سمت دیگر عدسی می رود”

بنابراین ما عدسی داریم که بدون هیچ کاهش کل میدان شی را در طرف دیگر بازسازی می کند و بنابراین یک عدسی کامل است.

پایان