

ریاضی هسته
کتاب مرجعDiscrete and combinatorial Mathematics
by: R.P. Grimaldi

- ویرایش پنجم سال ۲۰۰۴
- ترجمه فارسی: ریاضیات گسسته و ترکیبی (۱ اشارات قاطعی)
- سرفصل درسی ها
- ۱- اصول و مبانی شمارش
 - ۲- منطق آشنایی با مبانی منطق ریاضی
 - ۳- نظریه مجموعه ها
 - ۴- روابط بازگشتی و شیوه حل آنها
 - ۵- افزایش اعداد صحیح
 - ۶- نظریه گراف

مقدمه ای به منطق ریاضی

گزاره: جمله ای است خبری که دارای یکی از دو ارزش حقیقی یا نادرستی باشد.

مثال

- ۲ عددی زوج است. گزاره درست (P)
- ۱۶ به ۵ بخش پذیر است گزاره نادرست (Q)
- چه هوای خوبی است گزاره درست
- رابطه های منطقی

گزاره ها را معمولاً با حروف کوچک لاتین نمایش می دهند. $P, Q, R, \dots$

رابطه های منطقی می توان از روی گزاره های ساده گزاره های پیچیده ای درست کرد

۹ رابط عطف $\wedge$ رابطه های منطقی } رابط فصلی $\vee$ رابط نفی $\neg$ ۲ عدد زوج است و ۱۶ به ۵ بخش پذیر است $P \wedge Q$ یا $P \vee Q$ ۲ عددی زوج نیست $\neg P$ ۱۶ به ۵ بخش پذیر نیست $\neg Q$

۴ | ۱

رابطه ها

مجموعه دگاری

مجموعه A و B را با $A \times B$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

زوج مرتب

$$(x, y) \neq (y, x)$$

مولفه اول x مولفه دوم y

مثال

$$A = \{a, b\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

نکته

$$A \times B = |A| \times |B|$$

کدام رابطه از A به B مانند R به صورت زیر می باشد از $A \times B$ است

$$R: A \rightarrow B$$

$$R \in A \times B$$

$$R = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

در مثال قبل

$$(a, 1) \in R \Rightarrow a R 1$$

یعنی a با 1 رابطه R دارد

جایی که در این رابطه معکوس باشد

مروابط خاص

مرتباتی - تقارنی - پاد تقارنی - نقیضی - هم ارزی - ترتیبی

قرار دارد

یک رابطه روی A یعنی که رابطه از A به A

تعریف بازنمایی

$$\forall x \in A \quad (x, x) \in R$$

رابطه R روی A بازنمایی گوییم هرگاهرابطه بازنمایی روی A هم ارزی است با هر عضو A با خودش رابطه دارد

* در رابطه بازنمایی باید برای اعضای مجموعه شونده

$$A \times A = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a)\} \quad \text{الف}$$

$$R_1 = \{(a,a), (b,b)\}$$

$$R_2 = \{(a,a), (b,b), (a,b)\}$$

$$R_3 = \{(a,a), (b,b), (b,a)\}$$

$$R_4 = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a)\}$$

اگر انداز $A = n$ باشد در این صورت تعداد روابط بازتابی روی A برابر است با $2^{n^2} = 2^n$

$$n=2 \rightarrow 2^{2^2} = 2^4 = 4$$

تعریف تا بازتاب

رابطه R را روی A را تا بازتاب گوئیم هرگاه

$$\forall x \in A \quad (x,x) \in R$$

سوال

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

الف - یک رابطه روی A مثال بنویسید که متقارن باشد ولی نقیض نباشد

ب - یک رابطه روی A مثال بنویسید که بازتابی و نقیض باشد ولی متقارن نباشد

ج - یک رابطه روی A مثال بنویسید که متقارن و نقیض باشد ولی بازتابی نباشد

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \quad \text{الف}$$

$$R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,4), (1,3), (2,2), (3,1)\} \quad \text{ب}$$

$$R_3 = \{(1,2), (2,1), (1,1)\} \quad \text{ج}$$

د - یک رابطه روی A مثال بنویسید که تا بازتابی نه متقارن و نقیض باشد

$$R_4 = \{(1,2), (2,3), (3,1), (1,1), (2,2)\} \quad \text{د}$$

ه - یک رابطه روی A مثال بنویسید که تا بازتابی باشد ولی متقارن نباشد

$$R_5 = \{\emptyset\}$$

ترتیب جزئی

مثال: رابطه $\leq$ روی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ یک رابطه ترتیبی جزئی

$$1 \leq 2, 1 \leq 3, 1 \leq 4, 2 \leq 3, 2 \leq 4, 3 \leq 4$$

ترتیب کامل

یک رابطه R را روی A ترتیب کامل گوئیم هرگاه هر دو عضو A قابل مقایسه

زننجیر

$$\forall x, y \in A \quad (x,y) \in R \text{ or } (y,x) \in R$$

مثال رابطه $\sim$ روی مجموعه اعداد طبیعی که رابطه ترتیبی می باشد.

مثال: فرض کنید $A = \{a, b, c\}$ در این صورت

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

آیا رابطه زیر مجموعه بودن روی A یک ترتیب کلی است؟

$$\{a\} \subseteq \{a, b\} \subseteq A$$

خیر زیرا

$$\{a\} \subseteq \{b\} \subseteq A \rightarrow \{a\} \subseteq \{b\} \subseteq A$$

و نه $\{b\} \subseteq \{a\} \subseteq A$ و نمی توان آنها را با هم مقایسه کرد

کلاس هم ارزی و افزاز

رابطه R را هم ارزی گویند هرگاه $\left\{ \begin{array}{l} \text{تجانسی} \\ \text{تقارن} \\ \text{نسبی} \end{array} \right\}$ باشد

افزاز: مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ را یک افزاز برای مجموعه A گویند هرگاه

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

اگر یک رابطه هم ارزی R روی مجموعه A تعریف شده باشد آنگاه رابطه R معیوه

لازم تعدادی کلاس هم ارزی افزاز می کند.

کلاس هم ارزی مربوط به a را با $[a]$ نشان می دهیم. به صورت زیر تعریف

$$[a] = \{y \mid a R y\}$$

من شود

$[a]$: تجانس عناصری که با a در رابطه R هستند

مثال

رابطه همبستگی $\sim$ بر پایه ۱، ۳، ۵ روی مجموعه Z به صورت زیر تعریف می کنیم

$$a \sim b \pmod{3} \Leftrightarrow a - b = 3k, \quad k \in Z$$

$$10 \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow 10 - 1 = 9 = 3 \times 3$$

$$[0]_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$

$$[1]_3 = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$$

$$[2]_3 = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$$

$$[-4]_3 = [-1]_3 = [0]_3 = [3]_3 = [4]_3$$



$$Z/3 = \{[0], [1], [2]\}$$

نکته

اگر R یک رابطه هم ارزی باشد داریم

$$(1) x R y \Leftrightarrow [x] = [y]$$

$$(2) x \in [x]$$

$$(3) \forall x, y \quad [x] = [y] \text{ or } [x] \cap [y] = \emptyset$$

توضیح

هر رابطه هم ارزی روی یک مجموعه اعدادی روی آن ایجاد می کند و هم ارزی از یک مجموعه یک رابطه ای هم ارزی روی آن مجموعه بدست می دهد.

تابع

یک تابع مانند f از A به B یک رابطه از A به B می باشد به طوری که هر عضو از A حداکثر یک بار در رابطه ظاهر می شود یعنی تنها یک زوج مرتب به صورت مولفه اول ظاهر می شود پس اگر f تابعی از A به B باشد آنگاه

$$(a, b) \in f \text{ and } (a, c) \in f \Rightarrow b = c$$

اگر $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد در این صورت به f اصل زیر مجموعه ای از B است که به ازای هر b متعلق به آن یک $a \in A$ وجود دارد که $(a, b) \in f$

$$b = f(a)$$

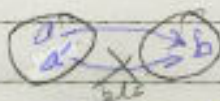
اگر $(a, b) \in f$ باشد می نویسیم

توابع خاص

یک به یک - یوئیتا - دو به یوئیتا

تابع یک به یک (injective)

از A به B یک $f: A \rightarrow B$ یک به یک است هرگاه به ازای هر $b \in B$ تنها یک $a \in A$ باشد



تابع یوئیتا

$f: A \rightarrow B$ یوئیتا است هرگاه به ازای هر $b \in B$ عضو $a \in A$ باشد به طوری که $b = f(a)$ یا $(a, b) \in f$



تابع دو سوید
تابع $f: A \rightarrow B$ را دو سوید می‌نامیم اگر هم یک به یک و هم پوشا باشد.
نکته

$f: A \rightarrow B$ یک تابع دو سوید باشد آنگاه $|A| = |B|$

سوال

اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند آنگاه

- ۱- تعداد توابع از A به B چند تا است؟
- ۲- تعداد توابع یک به یک چند تا است؟
- ۳- تعداد توابع پوشا چند تا است؟

پاسخ

۱- فرض کنیم $|A| = m$ و $|B| = n$ در این صورت تعداد n^m رابطه از A به B و تعداد n^m تابع از A به B داریم.

$f: A \rightarrow B$ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

$f = \{(a_1, x_1), (a_2, x_2), \dots, (a_m, x_m)\}$

n انتخاب n انتخاب n انتخاب

تعداد تابع $n \times n \times \dots \times n = n^m$

مثال $A = \{a, b\}$ $B = \{x, y\}$

$f = \{(a, \square), (b, \square)\}$
 $\hat{x} \quad \hat{y}$

$f_1 = \{(a, x), (b, x)\}$

$f_2 = \{(a, x), (b, y)\}$

$f_3 = \{(a, y), (b, x)\}$

$f_4 = \{(a, y), (b, y)\}$

$\Rightarrow$ تعداد تابع ۴ یا 2^2 تابع

تعداد رابطه A به B می‌شود

هر رابطه از A به B زیر مجموعه‌ای از ضرب دکارتی A و B است.

$|A \times B| = |A| \times |B| = mn$ $n^m \leftarrow A \times B$ تعداد زیر مجموعه

عز سوال قبل از $2^{2 \times 2} = 14$ ، رابطه فقط ۴ تای آن تابع بودند و $14 - 4 = 10$ تا آن تابع نیستند که آنها را معضله می نامند.

$$R_1 = \{(a, x)\}$$

$$R_2 = \{(a, y)\}$$

$$R_3 = \{(b, x)\}$$

$$R_4 = \{(b, y)\}$$

تا R_{12} بویس

از کتاب

به سوال ۲ و ۳ در بحث ترکیبات پاسخ می دهیم

عمل یا یکسانی یا دو تایی یا چند تایی می باشد

عمل دو تایی

یک عمل دو تایی روی مجموعه A تابع به صورت $f: A \times A \rightarrow A$ است

مثال

عمل $+$ روی مجموعه اعداد طبیعی

$$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(a, b) \mapsto a + b$$

عمل یکسانی

عمل یکسانی روی مجموعه A به صورت تابع $f: A \rightarrow A$ تعریف می شود

مثال

$$-: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$a \mapsto -a$$

عمل متغیر کننده اعداد روی $\mathbb{Z}$

چند عمل یکسانی

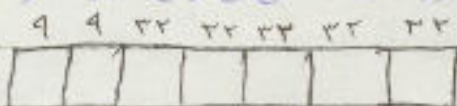
نمایش - فاکتوریل - توان و ...

مثال

فرض کنید سه پرست تیم ریاضیات دانشگاه می خواهند از بین ۸ دانشجوی کامپیوتر و ۵ دانشجو مکانیک یک تیم ۲ نفره تشکیل بدهند. دانشجوی کامپیوتر و یک دانشجوی مکانیک را برای تیم ریاضیات دانشگاه انتخاب کند پس وی می تواند به $8 \times 5 = 40$ طریق این تیم را انتخاب کند

مثال

چند پلاک متفاوت با الگوی زیر برای خودروهای داخلی می توان ایجاد کرد



عدد

حروف الفبا

$$9 \times 9 \times 22 \times 22 \times 22 \times 22 \times 22 \times 22 = 9^2 \times 22^6$$

جایگشت

یک جایگشت از n می متناهی یک آرایشی خطی از آن می است.

مثال

به چند طریق می توان حروف take را کنار هم قرار داد

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

جواب

تعداد جایگشت های n می متناهی برابر n فاکتوریل می باشد.

سوال

تعداد جایگشت های n حرف از یک take چند تایی باشد

تعداد انتخاب های r تایی از n حرف $n!$

$$4 \times 3! = 4 \times (2 \times 2 \times 1) = 24$$

۴ انتخاب

سوال

تعداد جایگشت های r تایی از n می متناهی $n \leq r \leq n$ چند تایی

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

نکته

تعداد جایگشت های r تایی از n می متناهی با $P(n, r)$ نشان می دهیم که

برابر است با

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

عمل دودویی f را روی A طایفه‌پذیر گوئیم هرگاه،

$$\forall a, b \in A \quad f(a, b) = f(b, a)$$

و اگر f طایفه‌پذیر گوئیم هرگاه

$$\forall a, b, c \in A \quad f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$$

سوال n اندازه A

اگر $|A| = n$ در این صورت

الف - چند عمل دوتایی می‌توان روی A تعریف کرد؟

ب - چند عمل یکانی می‌توان روی A تعریف کرد؟

جواب

الف - هر عمل دوتایی روی A یک تابع به صورت $f: A \times A \rightarrow A$ است تعداد

$$|A| |A \times A| = n^{n^2}$$

(این توابع برابر است با

ب - هر عمل یکانی روی A یک تابع به فرم $f: A \rightarrow A$ است می‌تواند

$$|A| = n^n$$

این توابع برابر است با

مبانی شمارش

دو اصل مهم داریم: اصل جمع - اصل ضرب

اصل جمع

اگر بتوان کاری را با n روش و کار دیگری را با m روش انجام داد به طوری که

هیچیک از این دو کار را نتوان همزمان یا هم انجام داد آنگاه یکی از این دو

کار را با $m+n$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال

محضی در کتابخانه خود ۵ کتاب ادبیات و ۸ کتاب ریاض دارد پس روی به

$5+8=13$ طریق می‌تواند کتاب را برای مطالعه انتخاب کند.

اصل ضرب

اگر انجام کار شامل ۲ مرحله باشد به طوری که مرحله اول را بتوان به m طریق

و مرحله دوم را بتوان به n طریق انجام داد آنگاه این کار را می‌توان به

$m \times n$ یا $m \cdot n$ روشی انجام داد.

ترکیب یا انتخاب

مثال

به چند طریق می توان ۳ حرف از میان حروف کلمه take را انتخاب کرد.
نکته:

در انتخاب یا ترکیب، ترتیب حائز اهمیت نیست

$$\text{جواب: } \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 24$$

نکته

تعداد انتخاب طرزیک تایی از n شیء متمایز را با $C(n, r)$ نشان می دهیم.

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

سوال

تیم والیبال مدرسه شامل ۱۵ دانش آموز است که باید ۳ کلاس سی
 A و B و C هر کدام ۲ نفر انتخاب شود. به چند طریق این کار امکان پذیر
 است. (کلاس سی A شامل ۵ دانش آموز کلاس سی B تعداد ۳ دانش آموز و
 کلاس سی C هم شامل ۵ دانش آموز می باشد)

$$\text{جواب: } = \binom{15}{2} \binom{13}{2} \binom{11}{2}$$

در جایگشتی است و یا متمایزند یا تکراری

جایگشت با اشیاء تکراری

سوال

به چند طریق می توان حروفه کلمه TALLASH را کنار هم نوشت.

$$L, L, A, A, S, H$$

تعداد جایگشت های T, A, L, A, S, H برابر $7!$ می باشد

$$\text{جواب: } \frac{7!}{2! \times 2!}$$

برای ماها $\rightarrow 2 \times 2$ برای A ها

نکته

تعداد جایگشت های n شیء که n_1 شیء آن از یک نوع و n_2 شیء آن از یک نوع
 و n_k شیء آن از یک نوع به طوری که $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ باشد تعداد
 جایگشت های این روش برابر است با $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$

مثال

درجه تعداد از جایگاههای حرفی که TALLASH دو حرف A با هم

نمیستند؟

$$\binom{V}{2, 2, 1, 1, 1, 1} = \frac{V!}{2!2!1!1!1!1!}$$

TLLSH

با حرف دو تا A حرف موجودی نبود

$$\binom{8}{1, 2, 1, 1, 1, 1} = \frac{8!}{2!1!1!1!1!1!}$$

یک از این جایگاهها به صورت زیر باشد

TALLASH

4 مکان برای قرار گرفتن A تا 2 بار هم دارد

$$\frac{8!}{2!} \times 4$$

A تا هم هست

$$\frac{V!}{2!2!} - \frac{8!}{2!} \times 4$$

A تا هم نیستند

قضیه درجدهای

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \dots +$$

$$\binom{n}{n} x^n y^0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

درجه دو جدهای $(x+y)^n$ ضرب جدهای $x^k y^{n-k}$ برای k از 0 تا n است

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y) \dots (x+y)$$

n تا k

برای به دست آوردن $x^k y^{n-k}$ باید $\binom{n}{k}$ تا از $(x+y)$ ها انتخاب و در هم ضرب شود

مثال

$$\binom{V}{8}$$

$$(x+y)^V$$

ضرب

مثال

$$(2x+3y)^V$$

ضرب $x^a y^b$ درجه دو جدهای

$$\left(\frac{2x}{a} + \frac{3y}{b}\right)^V = (a+b)^V$$

فرضیه: $a^{\delta} b^{\gamma}$ برابر است با $\binom{V}{\delta}$

$$\binom{V}{\delta} a^{\delta} b^{\gamma} = \binom{V}{\delta} (2x)^{\delta} (-xy)^{\gamma} = \binom{V}{\delta} 2^{\delta} (-1)^{\gamma} x^{\delta} y^{\gamma}$$

فرضیه: $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ برابر است با $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$

برای $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ برابر است با

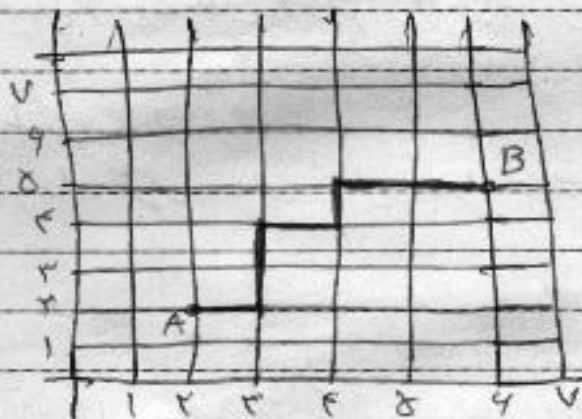
$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

سوال

به چند طریق n نفر می توانند دور یک میز گرد بنشینند؟
 هر جایگاه دوری به طول n شامل n جایگاه فعلی به طول n است پس
 جواب برابر است با $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

سوال

به چند طریق از نقطه A می توان به نقطه B در یک شبکه رسید؟



$R =$ حرکت به سمت راست $U =$ حرکت به سمت بالا

هر مسیر از A به B شامل ۳ حرکت به بالا U و ۴ حرکت به سمت راست R است.

پس جواب برابر است با تعداد جایگاه های ۳ حرف U و ۴ حرف R است

$$\binom{V}{3, 4} = \frac{V!}{3! 4!}$$

سوال

تعداد بهر صورت در یک خط قرار می‌دهیم

```

for i=1 to n
  for j=1 to i
    for k=1 to j
      write ('*')
    
```

دستور write چند مرتبه اجرا می‌شود؟

تکرار
جاییت
ترکیب با تکرار
جاییت با تکرار

$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ مقدار جایگاه بیانه
تعداد جایگاه های از n یکی می‌توانیم
تکرار جایگاه بارز n^r

$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ترکیب با تکرار (توزیع)
تعداد ترکیب های از n یکی می‌توانیم
تکرار جایگاه بارز $C(n+r-1, r)$

مثال

لا تفرق بهر صورت در یک خط قرار می‌دهیم
به چند طریق این ۷ نفر می‌توانند غذا سفارش دهند

انواع غذا A, B, C, D

یک سفارش غذا A, A, B, B, B, C, D $x \times | x \times x | x | x$
یک سفارش دیگر A, B, B, B, B, B, D $x | x \times x \times x | x | x$

هر یک یک فرد است. چهار نوع غذا با ۴-۱=۳ غذا قابل ترکیب است

هر سفارش یک آرایش خط از ۷ تا x و ۲ خط عمودی

(۴-۱)

تعداد سفارشات برابر است با

$$\text{تعداد سفارشات} = \binom{7+3}{7, 3} = \frac{10!}{7! 3!}$$

هر نفر از یک توزیع ۷ نفر در ۴ ظرف است.

مثال

تعداد جواب های معیبه و معادل زیر چند است

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad x_i \geq 0$$

همانند توزیع ۷ تا یک میان ۴ تا صغیر است.

$$\binom{7+4-1}{7}$$

نکته

تعداد روش های توزیع n شیء یکسان میان r شیء یکسان برابر است با

$$C(n+r-1, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

مثال

تعداد جواب های معیبه و معادل زیر چند است

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad x_1' + x_2' + x_3' = 7 \quad \begin{cases} x_1 = 2 + x_1' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = 1 + x_3' \end{cases}$$

$$= \binom{7+3-1}{7}$$

اصل شمول و طرد

فرض کنید مجموعه S دارای N عضو باشد به طوری که $N=15$

مجموعه اعضا S به صورت $C_1, C_2, \dots, C_t$ تقسیم می شود

$N(C_i) =$ تعداد اعضای C_i که در شرط C_i صادق می باشند

$N(C_i, C_j) =$ تعداد اعضای C_i که در شرط C_i و C_j صادق اند

$N(C_i, C_j, C_k) =$ تعداد اعضای C_i که در شرط C_i, C_j و C_k صادق اند

سوال

چه تعداد اعضای S در هیچ یک از شرط های $C_1, C_2, \dots, C_t$ صادق نیستند؟

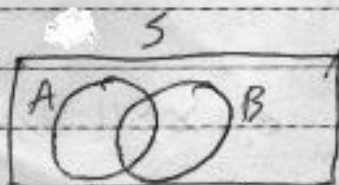
$$N = N - \sum_{1 \leq i \leq t} N(C_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq t} N(C_i, C_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq t} N(C_i, C_j, C_k) + \dots$$

$$+ (-1)^t N(C_1, C_2, \dots, C_t)$$

ایده اصل شمول و طرد

$C_1 =$ عضویت در A

$C_2 =$ عضویت در B



سوال: چه تعداد از اعضای S هم در A هستند و نه در B؟

$$\bar{N} = N - (N(C_1) + N(C_2) + N(C_3))$$

$$\bar{N} = N - (|A| + |B|) + (A \cap B)$$

سوال

چه تعداد از اعضای مجموعه S {۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰} هم در A هستند و نه در B؟

بخش می‌بینند؟

$$\bar{N} = N - (N(C_1) + N(C_2) + N(C_3)) +$$

۲ شرط بخش می‌بینی بر ۲

$$(N(C_1, C_2) + N(C_1, C_3) + N(C_2, C_3)) -$$

۳ شرط بخش می‌بینی بر ۳

$$N(C_1, C_2, C_3)$$

۴ شرط بخش می‌بینی بر ۴

$$N(C_1) = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25$$

مساوی است

$$N(C_2) = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25$$

$$N(C_3) = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25$$

$$N(C_1, C_2) = \left\lfloor \frac{100}{\text{lcm}(4, 4)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25$$

$$N(C_1, C_3) = \left\lfloor \frac{100}{\text{lcm}(4, 4)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25$$

$$N(C_2, C_3) = \left\lfloor \frac{100}{\text{lcm}(4, 4)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25$$

$$N(C_1, C_2, C_3) = \left\lfloor \frac{100}{\text{lcm}(4, 4, 4)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25$$

$$\bar{N} = 100 - (25 + 25 + 25) + (25 + 25 + 25) - 25$$

$$\bar{N} = 100 - 75 + 75 - 25 = 75$$

سوال

معادله زیر دارای چند جواب صحیح نامنفی است؟

$$x + y + z = 18$$

$$x \leq 6 \quad y \leq 8 \quad z \leq 18$$

$$\text{شرط } x > 11 \quad y > 4 \quad z > 14$$

$$x'z' = 11 \rightarrow x' + y' + z' = 9 \rightarrow N(C, 1) = \binom{9+r-1}{9} = 110$$

$$N(C_r) = ? \quad y' = y + 4 \rightarrow x + y' + z = 15 \rightarrow N(C_r) = \binom{15+r-1}{15} = 110$$

$$N(C_r) = ? \quad z' = z + 14 \rightarrow x + y + z' = 15 \rightarrow N(C_r) = \binom{15+r-1}{15} = 110$$

$$N(C, C_r) = ? \quad x' = 11 + x \\ y' = 4 + y \rightarrow x' + y' + z = 15 \rightarrow N(C, C_r) = \binom{15+r-1}{15} = 110$$

$$N(C, C_r) = ? \quad x' = 11 + x \\ z' = 15 + z \rightarrow x' + y + z' = 15 \rightarrow N(C, C_r) = \binom{15+r-1}{15} = 110$$

$$N(C_r C_r) = ? \rightarrow y' = 4 + y \\ z' = 15 + z \rightarrow x + y' + z' = 15 \rightarrow N(C_r C_r) = \binom{15+r-1}{15} = 110$$

$$\bar{N}_2(N) = (N(C, 1) + N(C_r) + N(C_r)) + (N(C, C_r) + N(C, C_r) + N(C_r C_r)) - N(C, C_r C_r)$$

$$\bar{N}_2\left(\binom{15}{15}\right) = \left(\binom{11}{15} + \binom{15}{15} + \binom{15}{15}\right) + \left(\binom{10}{15} + 0 + 0\right) - 0 = 11$$

اصل لانه کمتری

فرض کنید که m تا کمترین و n تا لانه داریم. در این صورت اگر $m > n$ باشد آنگاه دست کم یک لانه وجود دارد که در آن بیش از یک گویه است.
به کمک این اصل می توان نتیجه گیری های مفصل را در حوزه ترکیبیات و شمارش داشت.

مثال

از یک جمع n نفری لا اقل ۲ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

از یک جمع ۱۳ نفری لا اقل ۲ نفر در یک ماه متولد شده اند.

مثال

فرض کنید $2^+ 5^+ 3^+$ و $3^+ 5^+ 7^+$ در این صورت دست کم دو عضو از S وجود دارند به طوری که وقتی به ۳۶ تقسیم شوند باقیمانده آنها یکسان است.

باقیمانده هر عدد بر ۳۶ برابر است با ۵، ۳، ۲، ۱، ۰.

مثال

ثابت کنید اگر ۱۰۱ عضو از مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ انتخاب شوند آنگاه بین آنها دو عدد صحیح وجود دارد که یکی دیگری را می شمارد (مقصود علیه آن است) $S = \{1, 2, \dots, 100\}$

هر عدد $x \in S$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$x = 2^k y \quad k \geq 0 \quad p = (y, 2) = 1$$

$$مثلاً \quad 12 = 2^2 \times 3 \quad یا \quad 18 = 2 \times 3^2$$

$$y \in T = \{1, 3, 5, \dots, 99\} \rightarrow |T| = 50$$

اگر ۱۰۱ عدد انتخاب کنیم آنگاه دو تای آنها به هم ضرب می شوند.

$$\begin{cases} x = 2^m y & 18 = 2^3 \times 3 \\ y = 2^n z & 12 = 2^2 \times 3 \end{cases}$$

اگر $m > n$ باشد x را می شمارد. مثلاً ۳ عدد ۹ را می شمارد $9 = 2^0 \times 3^2$
اگر $m < n$ باشد y را می شمارد.

مثال

مثان دهید هر زیر مجموعه ۹ عضوی از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ شامل ۲ عضو باشد که همدیگر را می شمارد.

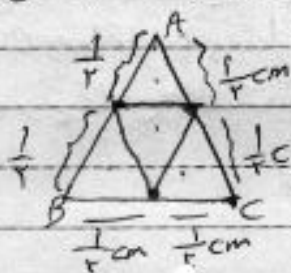
$$\{5\}, \{4, 6\}, \{3, 7\}, \{2, 8\}, \{1, 9\}$$

$$9, 2, 4, 6, 8$$

در هر انتخاب ۶ تایی دست کم یک لانه وجود دارد (زیرا تعداد لانه ها ۵ تایی باشد)
 که در آن ۲ عنصر وجود دارد و می دانیم که این دو عدد در هر لانه چگونگی است.

مثال

مثبت متناهی الاضلاع $\triangle ABC$ با طول ضلع یک سانتیمتر را در نظر بگیرید. نشان دهید
 اگر ۵ نقطه داخل این مثلث انتخاب کنیم دست کم ۲ نقطه آنها فاصله شان از $\frac{1}{3}$
 سانتی متر کوچکتر است.



با اتصال اضلاع به یکدیگر مثلث به ۴ مثلث دیگر افراز
 می شود. حال

۵ نقطه به ۵ گویتر

۴ لانه به ۴ زیر مثلث متناهی الاضلاع طول ضلع $\frac{1}{2}$

مثال ۴ دو نقطه از ۵ نقطه بدون یک مثلث است که فاصله شان دست کم $\frac{1}{3}$ است.
 فرض کنیم که مجموعه دارای ۹ عضو در مجموع صحت باشد به طوری که زیر مجموعه آنها ۱۴ است
 نشان دهید که مجموعه عناصر زیر مجموعه های ناخوشی نمی تواند جدا از هم باشند.
 تعداد زیر مجموعه های ناخوشی از یک مجموعه ۹ عضوی برابر است با $2^9 - 1 = 511$
 فرض کنیم

A یک زیر مجموعه از S باشد. مجموعه عناصر A را با S_A نشان می دهیم به معنی است

$$1 \leq S_A \leq 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14$$

۴۹

نتیجه می شود $1 \leq S_A \leq 49$

تعداد لانه ها (۴۹) از تعداد گویتر ها (۵۱۱) بیشتر است پس از اصل لانه مغروری
 نمی توان استفاده کرد.

راه حل دیگر این است که زیر مجموعه های $A \subseteq S$ بوجد کنیم که $1 \leq A \leq 5$ در این صورت

$$1 \leq S_A \leq 9 \rightarrow 1 \leq S_A \leq 10 + 11 + 12 + 13 + 14$$

حارج

حال تعداد لانه ها برابر ۹ است و تعداد زیر مجموعه های $A \subseteq S$ که $1 \leq A \leq 5$

است برابر است با $2^5 - 1 = 31$ است در نتیجه دست کم دو زیر مجموعه

از S وجود دارد که مجموعه عناصر آنها یکی است.

توابع مولد
بابت مثال آئینده طرح توابع مولد را شرح می دهیم
مثال

فرض کنید فردی می خواهد ۱۲ پرتقال را میان ۳ نفرند خود، برادرش A و B و C توزیع کند به چند طریق اینها را می توان به پرتقال به طوری که A حداقل ۴ پرتقال و B و C حداقل ۲ پرتقال دریافت کنند و به پرتقال بیشتر از ۵ پرتقال دریافت کنند جدول زیر تمامی حالات ممکن برای این توزیع را به ۱۲ نشان می دهد.

A	B	C
۴	۲	۵
۴	۴	۴
۴	۵	۳
۴	۶	۲
۵	۲	۵
۵	۳	۴
۵	۴	۳
۵	۵	۲
۶	۲	۴
۶	۳	۳
۶	۴	۲
۷	۲	۳
۷	۳	۲
۸	۲	۲

مثال $\rightarrow x^4 * x^2 * x^5 = x^{11}$

$\rightarrow x^5 + x^2 + x^5 = x^{12}$

حالا این مثال معادل یافتن تعداد جواب های منحصی معادله زیر است

$$C_1 + C_2 + C_3 = 12$$

$$C_1 \geq 4 \text{ و } C_2, C_3 \geq 2$$

حالا معادله زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8) (x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

ضریب x^{12} در این معادله جواب های ما می باشد.

علا الحاصل ریاضیات { تعیین دومی در بیان مسئله
تالیف ایران اندرین ترجمه دیگر مترقی کامیابی
در سال بعد قبل تعداد هر یک دوی می تواند این ۱۲ به مثال را میان فرزندان خود توزیع
کند به نحوی که هر یک دست کم یک به مثال دریافت کند چیست

$$f(x) = (x^1 + x^2 + \dots + x^{10})^3$$

جواب: ضریب x^{12} در $f(x)$ برابر با ۱۲

تعریف

فرض کنیم $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد در این صورت
تابع مولد متناظر با دنباله بالا به صورت زیر تعریف می شود.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

مثال

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

$(1+x)^n$ تابع مولد دنباله زیر است.
 $\dots, \binom{n}{n}, \binom{n}{n-1}, \dots, \binom{n}{2}, \binom{n}{1}, \binom{n}{0}$

مثال

$$(1-x^{n+1}) = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n$$

تابع مولد دنباله زیر است

$$1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots$$

$n+1$

اگر $|x| < 1$ باشد می توان از رابطه قبل داریم:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$$

یعنی $\frac{1}{1-x}$ تابع مولد دنباله $1, 1, 1, \dots$ باشد

اگر از طرفین رابطه ۱ مشتق بگیریم داریم

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} (1+x+x^2+\dots)$$

AQA

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 0 + 1, 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

سوال
تابع مولد دنباله $\frac{1}{(1-x)^2}$ چیست؟
... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$x \left(\frac{1}{1-x} \right) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{d}{dx} (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{d}{dx} (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$$

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$$

سوال
تابع مولد دنباله زیر چیست

$$x \frac{x+1}{(1-x)^2} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^2}$$

$$1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$$

سوال
تابع مولد دنباله زیر چیست؟

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

x به جای 2x قرار می دهیم

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + (2x)^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots$$

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$$

تابع مولد دنباله $\frac{1}{1-2x}$

روابط بازگشتی و حل آن

تعریف: یک رابطه بازگشتی برای دنباله $\{a_n\}$ یک معادله است که مقدار a_n را بر اساس مقادیر $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ بیان می‌کند.

مثال

$$a_n = 2a_{n-1} + 3$$

$$a_0 = 1$$

مثال

بر جای هانویی (در ساختمان داده‌ها)

انتقال n دیسک از برج A به برج C با استفاده از برج B



یک استراتژی

۱- انتقال $n-1$ دیسک از A به B به کمک C

۲- انتقال یک دیسک از A به C

۳- انتقال $n-1$ دیسک از B به C به کمک A

سوال

اگر a_n بیانگر تعداد انتقال دیسک‌ها باشد، رابطه بازگشتی برای آن کدام است.

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} \rightarrow a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_1 = 1$$

یک روشی حل به روش حل روابط بازگشتی حاکمه است. در مثال قبل داریم:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$= 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2^0 + 2^1 = 2^2 (2a_{n-2} + 1) + 2^0 + 2^1$$

$$= 2^3 a_{n-2} + 2^0 + 2^1 + 2^2 = \dots \rightarrow 2^{n-1} a_1 + 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-2}$$

$$= 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$$

$$= \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1 \Rightarrow a_n = 2^n - 1$$

مطمئن شوید که رابطه بازگشتی برای a_n به این شکل می‌آید: مقدار a_n به طور صریح بر اساس مقدار n باشد.

روش های حل رابطه بازگشتی

- ۱- روش جایگذاری
- ۲- روش حدس و اثبات
- ۳- روش معادله مشخصه
- ۴- روش توانیم موله

حل روابط بازگشتی خطی

تکمیل یک رابطه بازگشتی خطی همگن از درجه k با ضرایب ثابت به صورت کلی زیر است

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

که در آن $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ و $c_k \neq 0$

همگن یعنی طرف دیگر رابطه برابر صفر است

مثال

$$1. a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} \rightarrow \text{خطی همگن درجه ۲}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$2. a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad (4n) \rightarrow \text{خطی درجه ۲ ناهمگن}$$

این مثال روش حل روابط بازگشتی خطی همگن را شروع می‌دهیم.

$$a_n = 2a_{n-1} \rightarrow a_0 = 1$$

$$a_n = 2a_{n-1} = 0$$

رابطه معادله مشخصه بالا به صورت زیر است

$$r - 2 = 0 \rightarrow r = 2$$

اگر r یک ریشه معادله مشخصه باشد a_n به شکل $c \cdot r^n$ نیز

یک جواب برای رابطه بازگشتی است که مقدار c از روی شرایط اولیه بدست می‌آید.

$$r = 2 \rightarrow c \cdot r^n$$

$$a_n - 2a_{n-1} = 0$$

$$a_n = c r^n$$

$$n=1 \rightarrow a_1 = c r^1 = 1 \rightarrow c = \frac{1}{r}$$

$$a_n = \frac{1}{r} r^n = r^{n-1} \rightarrow \boxed{a_n = r^{n-1}}$$

اگر برای رابطه بازگشتی همگن از درجه k به فرم $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ معادله مشخصه به صورت زیر است.

$$r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \dots + c_k \rightarrow$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

معادله مشخصه بالا حداکثر k ریشه متمایز دارد.
در این صورت فرم کلی جواب به صورت زیر است.

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n$$

مضارب $c_1, \dots, c_k$ از روی شرایط وزنی مشخص می شود

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 4$$

معادله مشخصه

$$r^2 = 4r - 4 \rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \rightarrow r_1 = 2, r_2 = 2$$

در حالت کلی جواب $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ و $r_1 \neq r_2$

اما اگر $r_1 = r_2$ باشد پس رابطه انگاری است در این حالت فرم کلی جواب تغییر می کند.

$$a_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_1^n \rightarrow a_0 = c_1 r_1^0 + c_2 (0) r_1^0 = 1$$

$$c_1 + 0 = 1 \rightarrow c_1 = 1$$

$$a_1 = c_1 r_1^1 + c_2 (1) r_1^1 = 4 \rightarrow a_1 = 1 \times 2^1 + c_2 (1) 2^1 = 4$$

$$2 + 2c_2 = 4 \rightarrow 2c_2 = 2 \rightarrow c_2 = 1 \rightarrow a_n = 2^n + n 2^n$$

فرض کنید رابطه بازگشتی همگن از درجه k به فرم زیر را داشته باشیم.

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

اگر معادله مشخصه آن به صورت

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_k = 0$$

دارای + کار به یک متغیر با هم معض داشته باشیم در این صورت فرم کلی جواب به صورت زیر است.

$$a_n = (c_{1,0} + c_{1,1}n + \dots + c_{1,m_1}n^{m_1-1}) + \dots + (c_{t,0} + c_{t,1}n + \dots + c_{t,m_t}n^{m_t-1})$$

جواب از کتاب

ریشه	تعداد
r_1	m_1
r_2	m_2
r_3	m_3
$\vdots$	$\vdots$
r_t	m_t

$$a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2a_{n-3} \quad \begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{matrix} \quad \text{شرایط مرزی}$$

جواب

معادله مشخصه

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 4 = 0 \rightarrow (r-1)^2(r-2) = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{cases} \quad \text{(با دو تکرار)}$$

$$a_n = (c_1 r_1^n + c_2 r_2^n) + c_3 r_3^n \rightarrow a_n = c_1 + c_2 n + c_3 2^n$$

$$a_0 = 0 \rightarrow c_1 + c_2(0) + c_3 2^0 = 0 \rightarrow \boxed{c_1 + c_3 = 0}$$

$$a_1 = 1 \rightarrow c_1 + c_2(1) + c_3 2^1 = 1 \rightarrow \boxed{c_1 + c_2 + 2c_3 = 1} \rightarrow c_2 + c_3 = 1$$

$$a_2 = 2 \rightarrow c_1 + c_2(2) + c_3 2^2 = 2 \rightarrow \boxed{c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 2}$$

$$c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 2 \rightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

حل کامل نهایی

نکات بیشتری در مورد توابع موله
برابر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

اگر $n \in \mathbb{Z}$ باشد در این صورت

$$\binom{-n}{r} = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-r+1)}{r!} = \frac{(-1)^r n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{(n-1)! r!} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r} \rightarrow \boxed{\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}}$$

چند دنباله خاص به همراه توابع موله آن $\times$ خیلی مهم است

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n + \dots$$

$$(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}(ax)^2 + \dots + \binom{n}{n}a^n x^n + \dots$$

$$(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \dots + \binom{n}{n}x^{nm}$$

چون

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \dots + a^n x^n + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}x + \dots + \binom{-n}{n}x^n + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \binom{-n}{2}(-x)^2 + \dots + \binom{-n}{n}(-x)^n + \dots$$

کاربرد توابع موله در حل مسائل ترکیباتی
مثال: فردی می‌خواهد ۱۲ پرتقال و ۱۶ سیب را بین ۴ فرزند خود توزیع کند به طوری
که حسین حداقل یک پرتقال و ۳ سیب دریافت کند. سایر فرزندان x سیب کمتر
پرتقال و حداکثر ۵ سیب دریافت کنند.

برابر حل $\rightarrow$ نحوه توزیع بر مقدار
نحوه توزیع سب
راهکار توزیع بر مقدار

$$\frac{(x+x^2+x^3+\dots)(x^2+x^3+\dots)^3}{\text{حاصل ضرب}} = \text{سایه نهان}$$

جواب: ضریب x^{12} در بسط بالا = تعداد راههای توزیع بر مقدار

$$(x+x^2+x^3+\dots)(x^2+x^3+\dots)^3 =$$

$$2x(1+x+x^2+\dots)x^4(1+x+x^2+\dots)^3 = x^5(1+x+x^2+\dots)^4 =$$

$$= x^5 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} = x^5(1-x)^{-4}$$

ضریب x^5 در $(1-x)^{-4}$ را میخواهیم که برابر است با

$$= (1-x)^{-n} = \binom{-n}{0} + \binom{-n}{1}(-x) + \dots + \binom{-n}{n}(-x)^n$$

$$= (-1)^0 \binom{n}{0} = (-1)^0 (-1)^0 \binom{n+0-1}{0} = \binom{n+0}{0}$$

$$\binom{0}{-1} \binom{n}{0} \rightarrow n=4 \xrightarrow{\text{نحوه توزیع}} = \binom{4+0}{0} = \boxed{\binom{4}{0}} \text{ ①}$$

تعداد توزیع بر مقدارها

محاسبه تعداد روشهای توزیع سبها

$$(x^2+x^3+\dots)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$$

$$= x^2(1+x+\dots)\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3 = x^2 \left\{ \frac{1}{1-x} + \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3 \right\}$$

$$\frac{1}{1-x} \cdot \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^3 = (1-x^6)^3(1-x)^{-4} =$$

$$\left[1 - \binom{3}{1}x^6 + \binom{3}{2}x^{12} - \binom{3}{3}x^{18}\right] \left[\binom{-4}{0} + \binom{-4}{1}(-x) + \binom{-4}{2}(-x)^2 + \dots\right]$$

ضریب x^{12} در بسط بالا برابر است با

$$(1) \binom{-4}{3}(-1)^3 - \binom{3}{1} \binom{-4}{2}(-1)^2 + \binom{3}{2} \binom{-4}{1}(-1)^1 =$$

$$= \left[\binom{14}{13} - \binom{3}{1} \binom{10}{7} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} \right] \leftarrow \text{تعداد راه‌های توزیع سیب‌ها}$$

جواب نهایی

$$\begin{aligned} \text{تعداد راه‌های توزیع پیرستال‌ها} \times \text{تعداد راه‌های توزیع سیب‌ها} &= 2 \times 1 \\ &= \binom{8}{5} \times \left[\binom{14}{13} - \binom{3}{1} \binom{10}{7} + \binom{3}{2} \binom{4}{1} \right] \end{aligned}$$

حل روابط بازگشتی به کمک توابع موله

بایست مثال این روش را با توجه به منبع

رابطه بازگشتی زیر را به کمک توابع موله حل کنید.

$$\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} = n \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$$n=1 \rightarrow a_1 - 2a_0 = 1$$

$$n=2 \rightarrow a_2 - 2a_1 = 2$$

$$n=n \rightarrow a_n - 2a_{n-1} = n$$

$$\begin{cases} a_1 x - 2a_0 x = x \\ a_2 x^2 - 2a_1 x^2 = 2x^2 \\ a_n x^n - 2a_{n-1} x^n = nx^n \end{cases}$$

معادله اول را در x ضرب می‌کنیم

معادله دوم را در x^2 ضرب می‌کنیم

معادله n ام را در x^n ضرب می‌کنیم

کمرش معادلات را با هم جمع می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

فرض می‌کنیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$f(x)$ تابع موله دنباله

$$(f(x) - a_0) - 2x f(x) = x + 2x^2 + 2x^2 + \dots + nx^n \quad \text{رابطه (2)}$$

$$(f(x) - 1) - 2x f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{x}{(1-x)^2(1-2x)} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-2x)} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \\ C = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{-\frac{1}{K}}{1-x} + \frac{-\frac{1}{2}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{2}{K}}{(1-2x)} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{\frac{V}{K}}{1-2x} + \frac{-\frac{1}{K}}{1-x} + \frac{-\frac{1}{2}}{(1-x)^2}$$

۱. ضریب x^n در $\frac{V/K}{1-2x}$ $\leftarrow \left(\frac{V}{K} \right) 2^n$

۲. ضریب x^n در $\frac{-\frac{1}{K}}{1-x}$ $\leftarrow \left(-\frac{1}{K} \right) (1)$

۳. ضریب x^n در $\frac{-\frac{1}{2}}{(1-x)^2}$ $\leftarrow -\frac{1}{2} \binom{-2}{n} (-1)^n = -\frac{1}{2} \binom{n}{n} (-1)^n$
 $\Rightarrow = \frac{1}{2} (n+1)$

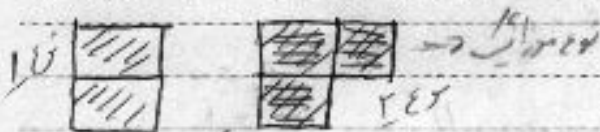
با توجه به موارد ۱ و ۲ و ۳ ضریب x^n برابر است با:

$$a_n = \frac{V}{K} 2^n - \frac{1}{K} - \frac{1}{2} (n+1) \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{V}{K} 2^n - \frac{1}{2} n - \frac{3}{2}}$$

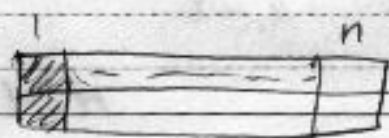
یک کاربرد روابط بازگشتی مسئله فرعی کردن است. (در این مسئله نوع کاغذ مثال یک سالن $2 \times n$ به صورت زیر داریم)



می خواهیم این سالن را با ۲ دو نوع موزاییک به فرم زیر فرسای کنیم. به عنوان مثال این کار امکان پذیر است.



فرنی کیده a_n تعداد روش فرسای کردن سالن $2 \times n$ با این موزاییک های دارد. دو حالت در نظر می گیریم:



۱- ابتدا از موزاییک نوع ۱ استفاده می کنیم.

در این صورت سابق را با a_{n-1} رومی می توان فرعی کرد.
۲- ابتدا از مورایک نوع دوم استفاده می کنیم

۱	۲	۳	...	n

در این صورت سابق را با a_{n-2} رومی می توان فرعی کرد.

در نتیجه داریم $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-4}$ که در آن داریم $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴

۴ تا نوع اول ۱ نوع اول ۲ نوع دوم ۱ نوع اول ۲ نوع دوم

۳- از یک مورایک نوع اول و یک مورایک نوع دوم استفاده می کنیم

۱	۲	۳	۴	...	n

در این صورت سابق را با a_{n-4} رومی می توان فرعی کرد.

مثال

تعداد در رومی های فرعی کردن یک سلسله $2 \times n$ با مورایک های به شکل زیر

نوع ۱	نوع ۲

۱	۲	۳	...	n

$a_0 = 0$
 $a_1 = 1$
 $a_2 = 1$
 $a_3 = 2$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

تابع مولد نمایی

از قبل می دانیم که تابع مولد دنباله $a_0, a_1, \dots, a_n$ به صورت زیر است:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

حال بگذاریم $(1+x)^n$ را در نظر بگیریم.

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

در نتیجه $(1+x)^n$ تابع مولد دنباله زیر است: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$
از طرفی می دانیم

$$C(n, i) = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \rightarrow \binom{n}{i} = \frac{P(n, i)}{i!}$$

برای صورت $(1+x)^n = P(n, 0) + P(n, 1) \frac{x}{1!} + P(n, 2) \frac{x^2}{2!} + \dots + P(n, n) \frac{x^n}{n!}$
تعریفتابع مولد نمایی دنباله $a_0, a_1, a_2, \dots$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

تابع مولد معمولی دنباله $a_0, a_1, a_2, \dots$ و $a_0 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \dots$

کاربرد تابع مولد معمولی در مسائل ترکیبی (ترتیب انتخاب مهم نیست)
نمایی در مسائل جایگزینی

جایگزینی با تکرار به کمک تابع مولد نمایی

با یک مثال توضیح می دهیم.

تعداد جایگزینی ۲ تایی از حروف aab چند تا می باشد.

aa

ba

ab

$$(x + \frac{x^2}{2!})(1 + x) = (x + \frac{1}{2}x^2)(1+x)$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 = \frac{x}{1!} + \frac{3x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!}$$

نتیجه $\frac{x^2}{2!}$ جواب مسئله ما می باشد که برابر ۳ می باشد (چون جایگزینی ۲ تایی می خواهم ضریب ۲ می باشد)

Subject:

Year:

Month:

Date:

AVA

Subject:

Year:

Month:

Date:

Subject: _____

Year: _____

Month: _____

Date: _____

AVA

Subject: _____

Year: _____

Month: _____

Date: _____

AVA

Subject: _____

Year: _____

Month: _____

Date: _____

AUA

Subject:

Year:

Month:

Date:

AVA

Subject:

Year:

Month:

Date:

AVA

Subject:

Year:

Month:

Date:

AVA

Subject:

Year:

Month:

Date:

AVA

Subject:

Year:

Month:

Date:

AVA

Subject:

Year:

Month:

Date:

Subject:

Year:

Month:

Date:

AVA

تحدید ریاضی است ۲۹، ۸، ۹۱

۱- یک مجموعه از محسوسات منطقی را به طور تابعی کامل نویسیم هرگاه سایر محسوسات منطقی را بتوان به اساس آنها بیان کرد. به عنوان مثال $\{ \neg, \vee, \wedge \}$ به طور تابعی کامل است. به هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف- آیا مجموعه $\{ \neg, \vee, \wedge \}$ به طور تابعی کامل است؟
 ب- محسوس منطقی $\neg$ را با نشان $\uparrow$ جایگزین کرده و به صورت زیر تعریف کنیم
 نشان دهید مجموعه $\{ \uparrow \}$ به صورت تابعی کامل است.

P	Q	$P \uparrow Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

۲- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را ثابت یا رد کنید.

الف- $[P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)] \leftrightarrow [(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R]$

ب- $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \rightarrow R]$

۳- سهولات زیر را در نظر بگیرید.

$P(x)$: $x > 5$ است

$Q(x)$: x زوج است

$R(x)$: x عدد صحیح کامل است

$S(x)$: x به ۴ بخش پذیر است

$T(x)$: x به ۵ بخش پذیر است

حال هر یک از گزاره های زیر را با استفاده از سورها و در زبان منطقی بیان کنید.

الف- عدد صحیح مثبتی وجود دارد که زوج است.

ب- اگر x زوج باشد آنگاه x به ۵ بخش پذیر است.

ج- هر عدد صحیح زوجی به ۵ بخش پذیر است.

د- عدد صحیح زوجی وجود دارد که به ۵ بخش پذیر است.

ه- اگر x عددی زوج و عددی کامل باشد آنگاه x به ۴ بخش پذیر است.

$$p(x): x \leq 3$$

سوال ۱

$$q(x): x+1 \text{ is odd (فرد)}$$

مقادیر ۲ دامنه اعداد صحیح

$$a) q(1) \rightarrow \text{False}$$

$$b) \neg p(3) \rightarrow \text{False}$$

$$c) p(5) \vee q(5) \rightarrow \text{False}$$

$$d) p(3) \wedge q(4) \rightarrow \text{True}$$

$$e) \neg (p(-4) \vee q(-3)) \rightarrow \text{False}$$

$$f) \neg p(-4) \wedge \neg q(-3) \rightarrow \text{False}$$

سوال ۲

مقادیر ۳: ۳ ضلعی، ۴ ضلعی، ۵ ضلعی

$$a(x): \text{عدد زوجی و داخلی } x \text{ مساوی هستند}$$

$$e(x): \text{ } x \text{ ضلع متساوی الاضلاع است}$$

$$h(x): \text{عدد اضلاع } x \text{ مساوی هستند}$$

$$i(x): \text{ } x \text{ ضلع متساوی الساقین است}$$

$$p(x): \text{ } x \text{ چند ضلعی است که تعداد یاقوتی (برای } n \geq 4) \text{ دارد}$$

$$q(x): \text{ } x \text{ یک چهار ضلعی است}$$

$$r(x): \text{ } x \text{ یک مثلث است}$$

$$s(x): \text{ } x \text{ یک مربع است}$$

$$t(x): \text{ } x \text{ یک مثلث است}$$

نتیجه عبارات زیر را به دست آورید

$$a: \forall x [q(x) \vee t(x)] \rightarrow T$$

$$b: \forall x [i(x) \rightarrow e(x)] \rightarrow T$$

$$c: \exists x [t(x) \wedge p(x)] \rightarrow T$$

$$d: \forall x [(a(x) \wedge t(x)) \leftrightarrow e(x)] \rightarrow T$$

$$e: \exists x [q(x) \wedge \neg r(x)] \rightarrow T$$

$$f: \exists x [r(x) \wedge \neg s(x)] \rightarrow T$$

$$g: \forall x [h(x) \rightarrow e(x)] \rightarrow T$$

$$h: \forall x [s(x) \leftrightarrow (a(x) \wedge h(x))] \rightarrow F$$

$$j: \forall x [f(x) \rightarrow (g(x) \leftrightarrow h(x))] \rightarrow T$$

ملف 91, 1, 29

ملف 91, 1, 29

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

ملف 91, 1, 29

ملف 91, 1, 29

$$\{ \neg, \vee \} \text{ is a functionally complete set}$$

$$\vdash p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$\vdash p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\vdash p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$$

{↑} is a functionally complete set (NAND)

$$\vdash \neg p \equiv p \uparrow p$$

$$\vdash p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(p \uparrow p) \uparrow \neg(q \uparrow q)$$

$$\vdash p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg(p \uparrow p) \uparrow \neg(q \uparrow q)$$

$$\vdash p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(p \uparrow p) \uparrow \neg(q \uparrow q)$$

$$\vdash p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \neg(p \uparrow p) \uparrow \neg(q \uparrow q)$$

$$\vdash p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \neg(p \uparrow p) \uparrow \neg(q \uparrow q)$$

$$\vdash p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \neg(p \uparrow p) \uparrow \neg(q \uparrow q)$$

$$\vdash p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \neg(p \uparrow p) \uparrow \neg(q \uparrow q)$$

۱۵

P	q	r	$P \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \leftrightarrow (P \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$										
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	F	T	T	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	T	T	F	F	T	F	T
F	T	F	F	T	T	F	F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F	F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	T	F	F	T	F	T	F	F	F

هم ارزی دارد و گزاره درست است

P	q	r	$P \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow (P \rightarrow q) \rightarrow r$										
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	F	T	T	T	F	F	F
T	F	T	T	T	F	T	T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	F	T	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	F	F	T	F	F	F

هم ارزی ندارد گزاره نادرست است (چون ۲ نتیجه F دارد)

$$\exists x [p(x) \rightarrow q(x)]$$

$$\neg \forall x [q(x) \rightarrow t(x)]$$

$$\neg \forall x [q(x) \rightarrow t(x)]$$

$$\neg \exists x [q(x) \rightarrow t(x)]$$

$$\neg \forall x [(q(x) \wedge r(x)) \rightarrow s(x)]$$

الف

وجود دارد

همه را میسر

تحدید 4, 9, 41

۱- رابطه $\sim$ بر روی مجموعه Z به صورت زیر تعریف می کنیم
 $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

(الف) ثابت کنید رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی است

(ب) مجموعه $\{x \mid x \sim 0\}$ و $\{x \mid x \sim 1\}$ را به کلاس های هم ارزی تحت $\sim$ اضافه کنید
 (ج) چه تعداد کلاس های هم ارزی تحت $\sim$ روی مجموعه $\{0, 1, \dots, n\}$ و $\{x \mid x \sim 0, \dots, n\}$ وجود دارد؟

۲- فرض کنید R رابطه روی مجموعه A بوده به طوری که $|A| = n$ است تعیین کنید
 که آیا یک از گزاره های زیر درست است. در آن موارد نام درست یک مثال نقض بیاورید.

(الف) اگر $|R| > n$ باشد آنگاه R بازتابی است.

(ب) اگر R هم ارزی باشد آنگاه $n \leq |R| \leq n^2$

(ج) اگر R_1 و R_2 دو رابطه روی A بوده و $R_2 \supset R_1$ باشد آنگاه اگر R_1 بازتابی (متقارن - یا دمتقارن - منعکس) باشد آنگاه R_2 نیز بازتابی (متقارن - یا دمتقارن - منعکس) است.

۳- فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد. تعیین کنید در هر یک از موارد زیر چند رابطه R با خواص مورد نظر روی A وجود دارد؟

(الف) بازتابی باشد

(ب) متقارن باشد

(ج) هم بازتابی و هم متقارن باشد

(د) یا دمتقارن باشد

(ه) بازتابی، متقارن و یا دمتقارن باشد

۴- رابطه R روی مجموعه $\{0, 1, \dots, n\}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y = 3k \text{ for } k \in Z$$

نشان دهید R یک رابطه هم ارزی روی A است. همچنین کلاس های هم ارزی و افراد A که توسط رابطه R القاء شده است را تعیین کنید.