

سیستمی مرتبه دوم

تابع تبدیل یک سیستم مرتبه دوم در حالت طریقی اول است: $G(s) = \frac{K}{s^2 + a_1s + a_0}$

توجه کنید که مرتبه 2 بودک تابع تبدیل به واسطه عبارت مرتبه دوم در خروجی آن است.

این حالت مانند سیستم مرتبه دوم به ورودی پله واحد (از تقسیم مقدار پله)

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s^2 + a_1s + a_0}, \quad R(s) = \frac{K}{a_0}$$

← این سیستم مرتبه دوم به ورودی پله پیچیده تر از این سیستم مرتبه اول به ورودی پله است.
 ← این تابع تبدیل به محل ریشه های خروجی تابع تبدیل هلقه بسته (مغلقه) متغیر دارد.

این حالت ندر او ماندگار

این حالت ماندگار سیستم: آن صورت از این که به از آن $\rightarrow +$ باقی خواهد ماند، در مقابل:
 این حالت ندر ای سیستم: آن صورت از این که به از آن $\rightarrow +$ صفر خواهد شد.
 نکته: برای این که این سیستم متغیر داشته باشد که به از آن $\rightarrow +$ به سمت صفر میل کند و
 دامنه آن با افزایش زمان به سمت بی نهایت میل کند، سیستم باید محقق خاصی به نام پایداری
 را برآورده سازد.

برای بررسی این حالت ندر فرض می کنیم:

1. کنترل ورودی به سیستم پله واحد است. (این ورودی در کنترل بیدار از سیستمای علمی و صنعتی به دلیل سادگی و اطلاعات کافی که به دست می دهد استفاده می شود)
2. سیستم مرتبه دوم است.

(استفاده از یک مدل تابع تبدیل مرتبه دوم هم به هیچ وجه محدود کننده نیست در کنترل این حالت ندر، زیرا اگر چه ممکن است بیداری از سیستم های محلی و صنعتی مرتبه سوم یا بالاتر باشند،
 لیکن می توان آن ها را به خوبی با یک مدل مرتبه دوم تقریب زد. در اکثر موارد مدل مرتبه دوم
 مدل غالب سیستم است به عبارت دیگر، در صورت کلی این سیستم توسط صورت مرتبه دوم آن
 تقریب می شود.

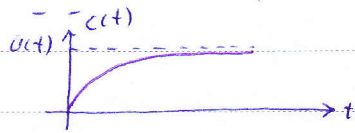
پایخ یک سیستم مرتبه دوم به ورودی پله طبق به ترتیب معطای آن (در پیچ های هندسی) مرتبه دوم از خروجی تابع تبدیل می تواند به یکی از سه صورت زیر باشد:

1- پایخ برای سبیل

2- پایخ برای بحرانی

3- پایخ برای ضعیف

توجه کنید: پایخ پله برای سیستم مرتبه اول، تنها صورت پایخ پله را در حالت فایده دار یک سیستم مرتبه اول است. با تغییر دالان محل قطب سیستم مرتبه اول ثابت زمانی آن تغییر می کند و در نهایت سرعت پایخ آن کم یا زیاد خواهد شد. لیکن صورت پله آن همواره به صورت زیر است:

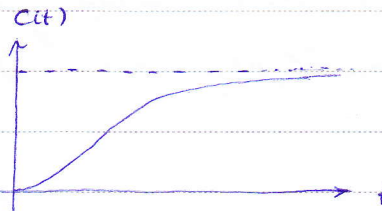


پایخ برای سبیل:

آخر تابع تبدیل سیستم دور به حقیقی داشته باشد

$$\frac{C}{R} = G(s) = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{K}{(s + \alpha)(s + \beta)} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) = \frac{K}{\frac{\alpha \beta}{a_0}}$$



$$\frac{dc(t)}{dt} = 0 \quad t = \infty$$

همانند پایخ سیستم مرتبه اول به ورودی پله، پایخ برای سبیل به شکل خودی همواره از یک طرف به مقدار نهایی خود میل می کند، به عبارت دیگر هیچگاه قبل از رسیدن به مقدار نهایی خود نمی باشد.

پایخ برای بحرانی:

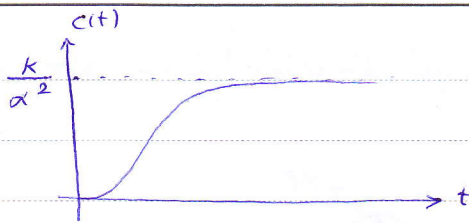
آخر معطای یک تابع تبدیل سیستم مرتبه دوم در یک شکل از یک خود حقیقی منفی قرار داشته باشد.

$$G(s) = \frac{K}{(s + \alpha)^2}$$

این حالت می تواند یک حالت حدی برای حالت پایخ برای سبیل در نظر گرفته شود.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \frac{k}{\alpha^2}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = 0 \rightarrow t = \infty$$

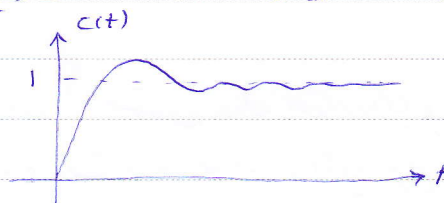


در حد نرم بالا از ک (فرار رفت) از مقدار حالت ماندگار پاسخ $\frac{k}{\alpha^2}$ محاسبه می شود (بر عکس در نظر پاسخ در صحن زمانی مقداری بیش از $\frac{k}{\alpha^2}$ را اختیار کنید) پاسخ برای اجرای در بین پاسخ های بدون بالا از ک بر عکس است که می تواند برای یک سیستم مرتبه دوم بدست آورد.

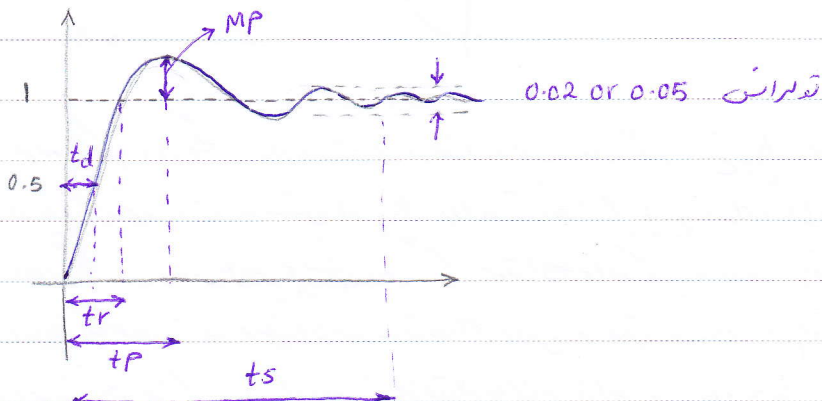
این خاصیت در برخی از سیستم های عملی و صنعتی بسیار مهم است. به عنوان مثال در یک ربات خوشه کار، فرار رفت از مقدار زمانی می تواند بسیار خطرناک باشد و حال آنکه کمتری سرعت در زمان یک در رسیدن به حالت نهایی حالت برای شتاب نیز اصلاً مطلوب نیست لذا در این حالت می تواند از حالت برای اجرای استفاده شود.

پاسخ برای ضعیف :

نقطه اصلی پاسخ برای ضعیف آن است که برخلاف دو حالت قبلی در اثر اعمال ورودی به خروجی از مقدار زمانی خروجی (مقدار حالت ماندگار) فراتر رفته و بالایی زند در این حالت در راس (نقطه) خروج پاسخ تبدیل سیستم اعداد مختلف هستند. و عضو قطری مختلف پاسخ می شود پاسخ به ورودی به نوسانی شود سرعت از بین رفتن این نوسانات بستگی به مقدار برای پاسخ تبدیل خواهد داشت. اگر پاسخ فراتر رفته و در کمتری این نوسانات همواره باقی خواهند ماند اما در محل هر سیستمی همواره مقداری برای پاسخ خواهد داشت. با افزایش مقدار برای، نوسانات سرعت از بین می روند و با افزایش برای به پاسخ برای برای می رسم که در آن نوسانات امکان وقوع شده را پیدا می کنند.



مقدارهای عملکردی معمولاً در محدوده زمان برای بررسی و کنترل سیستم که کنترل خطی کاربرده
می شود به صورت زیر است :



1- فراجهش حداکثری : $C_{max} - C_{ss}$ و $C_{max} > C_{ss}$ (MP)

حالت پایداری پایانی $C(t)$ سی از ایدل ورودی پیم

$$\% \text{ فراجهش حداکثری} = \frac{C_{max} - C_{ss}}{C_{ss}} \times 100$$

در حد تراشه حداکثری : 0.02 or 0.05 به صورت درصد

overshoot (بالا زنی)

کنترل محکم که عملکرد یک سیستم در محدوده زمان ، فراجهش حداکثری آن است در واقع فراجهش حداکثری
بسیار زیاد در عمل مطلوب نیست زیرا باعث کاهش میزان پایداری سیستم می شود .

2- زمان تأخیر : زمانی که لازم است تا پاسخ به 50٪ مقدار پایانی هدف برسد (t_d)

3- زمان صعود : زمانی که لازم است تا پاسخ از 10 به 90 درصد یا از 5 به 95 درصد یا از 0 به

100 درصد مقدار پایانی خروجی برسد . برای سیستم های برای ضعیف معمولاً از 0.5 تا 100

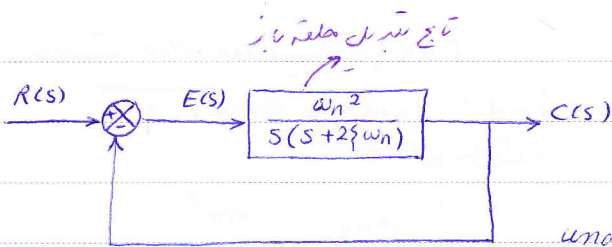
درصد برای سیستم های برای در اکثر از 10 تا 90 درصد استفاده می شود . (t_r)

4- زمان استقرار : زمانی که لازم است تا پاسخ به یک محدوده مشخص حول مقدار پایانی پاسخ

رسیده و پس از آن نیز در آن محدوده باقی بماند . معمولاً به صورت درصدی از مقدار پایانی پاسخ مانند

2٪ ، 5٪ یا 10٪ می شود .

چهارگیت تعریف شده بالا معیارهای انتخابی برای سنجش عملکرد و محکم های یک سیستم
کنترل هستند .



سیستم استاندارد مرتبه دوم :

Attenuation = ζ تضعیف

ω_n = فرکانس طبیعی میرایی

under damped Frequency

$$2\zeta\omega_n = 2\sigma$$

ζ = نسبت میرایی

$$\frac{C}{R} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

فرم استاندارد تایخ تبدیل حلقه بسته سیستم مرتبه دوم :

رفتار دینامیک سیستم مرتبه دوم را می توان بر حسب دو پارامتر ω_n و ζ توصیف کرد.

اگر $0 < \zeta < 1$: مقابله حلقه بسته نقطه فرکانس هستند و در نیمه چپ صفحه s قرار دارند.

در این حالت سیستم را میرایی ضعیف می نامند و تایخ ندرای آن نوسانی است.

اگر $\zeta = 0$: تایخ ندرای از بین نمی رود.

اگر $\zeta = 1$: سیستم را میرایی بحرانی نامند.

اگر $\zeta > 1$: میرایی شدید.

تایخ سیستم استاندارد شده به ورودی پله را در سیستم می بینیم

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

تعیین که تایخ سیستم مرتبه دوم به ورودی پله به محل مقابله متکثر دارد :

مقادیر ζ و ω_n را می توانیم با توجه به اینکه ζ چه باشد و ω_n چه باشد نقطه حلقه بسته را در صفحه s مشخص کنیم.

نکته : $0 < \zeta < 1$ ریشه ها مثبت و منفی است محور موهومی قرار می گیرند و سیستم

ناپایدار نخواهد بود (در این حالت $\omega_n > 0$ - می شود)

1) حالت برای ضعیف ($0 < \zeta < 1$):

$$0 < \zeta < 1 \rightarrow S_{1,2} = -\{\omega_n \pm j\omega_d \rightarrow \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

فرکانس طبیعی میرا شده

$$\frac{C}{R} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \rightarrow C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$\text{پارامتری برای} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

ω_d فرکانس نوسان آزاد، فرکانس طبیعی میرا شده است. برای ζ تغییر می کند.

$$C(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \quad t \geq 0$$

نکته: اگر $\zeta = 0$ $C(t) = 1 - \cos \omega_n t$ $t \geq 0$ $(\omega_n = \omega_d)$ از این معادله می بینیم که ω_n یعنی فرکانس طبیعی ناپیچیده سیستم ظاهر شده است. یعنی آن که ω_n فرکانس است که در آن خروجی سیستم در حد دردت میفرستد برای نوسان خواهد کرد. اگر سیستم خطی مقداری میرایی داشته باشد، فرکانس طبیعی میرا شده ω_n را می توان با دوره می و در این حالت فرکانس را که می توان با دوره می و فرکانس طبیعی میرا شده ω_d است که برابر $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ می باشد. این فرکانس همواره از فرکانس طبیعی میرا شده کمتر است. افزایش در ζ فرکانس طبیعی میرا شده ω_d را کاهش می دهد. اگر ζ بزرگتر از یک شود پاسخ میرایی شده و خواهد شد و نوسان نخواهد کرد.

2) حالت برای بحرانی ($\zeta = 1$) اگر مقادیر $\frac{C}{R}$ مادی باشند سیستم را برای بحرانی می نامند

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \rightarrow C(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad t \geq 0$$

(3) معادلات برای ϕ (1) و (2) : (از این معادلات دو معادله برای $\frac{C}{R}$ معین و منفی و برابر هستند)

$$C(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1} (1 - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n t}$$

$$= 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right), \quad t \gg 0$$

نکته: هنگامی که $\zeta \gg 1$ است آن گاه کمر از منحنی ϕ صغیر برای ϕ معین است
 $|s_1| \ll |s_2|$ است یعنی s_2 نزدیکتر به محور دماز است می توان از s_1 صرف نظر کرده زیرا عبارت
 شامل s_1 - صغیر گاه می باشد و می توان سیستم را با یک سیستم مرتبه اول تقریب زد.

$$\frac{C}{R} = \frac{s_2}{s_1 + s_2}$$

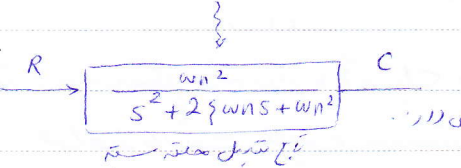
نکته: می توان نشان داد یک سیستم برای ضریب ζ بین 0.5 و 0.8 صغیر از
 یک سیستم برای بحرانی و یا برای ζ بزرگ مقدار زیادی نزدیک به ϕ در بین سیستم های
 پاسخ درون نوسان یک سیستم برای بحرانی صغیر بین پاسخ دارد یک سیستم
 برای ζ در صفر در پاسخ به هر ورودی گذشت.

تأخیر تبدیل حتمی باز با قطب $S=0$
 $S = -2\zeta\omega_n$

ملاحظه درسی حلقه تنبلی میبرای این:

فرم استاندارد سیستم دوم 2:

نوع سیستم: (1) منبج با نرخ در دردی حفظ ندارد!



تأخیر - تحول

در دردی تنبلی دارد

$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad *$$

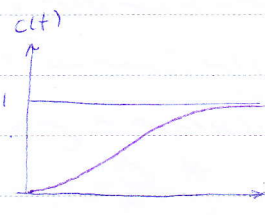
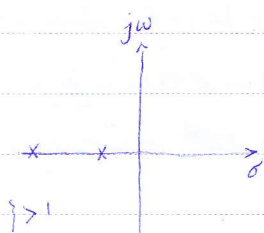
$\zeta = 0$ و ضریب میرایی

$\zeta > 1$ و نسبت میرایی

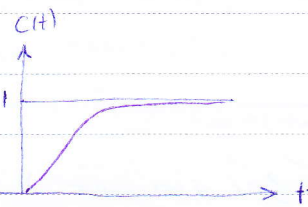
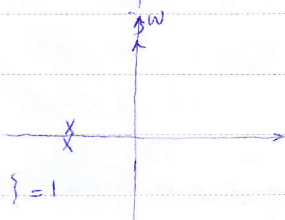
ω_n و فرکانس طبیعی میرا

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{فرکانس طبیعی میرا}$$

میرایی دوم 2

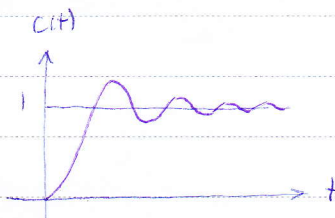
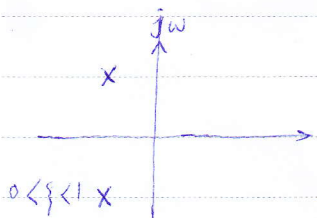


$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n$$

میرایی بحرانی



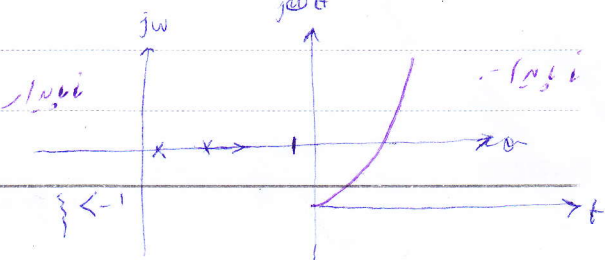
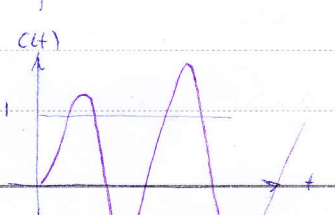
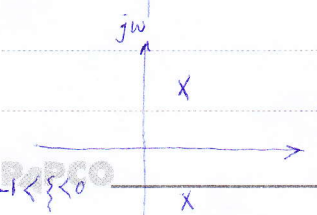
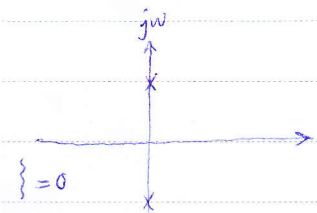
میرایی ضعیف
 بعد از گذشتن از میرایی بحرانی و میرایی دوم

$$S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

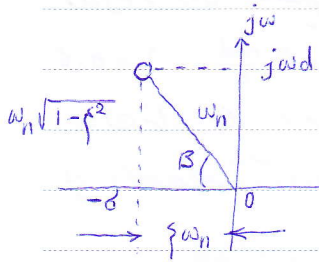
بیشتر میرایی - فرکانس میرایی

$$S_{1,2} = -j\omega_n$$



تحقیق های اندازه سیستم دوم (برای برای مقیاس)

از جمله t_r ، t_p ، M_p ، t_s (بر حسب ζ و ω_n)



$$\sigma = -\zeta \omega_n \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\cos B = \frac{\zeta \omega_n}{\omega_n} = \zeta \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \cos^{-1} \zeta}$$

(Rise time) : t_r مقدار t_r

$$t_r = \frac{\pi - B}{\omega_d} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad , \quad B = \cos^{-1} \zeta$$

زمان فراخشی : (t_p)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

M_p فراخشی حداکثر

فراخشی حداکثر در زمان $t = t_p$ رخ می دهد ، با فرض یک بزرگ مقدار یابی

$$M_p = C(t_p) - 1 = e^{-\zeta \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right)} = e^{-\zeta \left(\frac{\pi}{\omega_d} \right)}$$

اگر مقدار یابی فرو می $C(\infty)$ یک نباشد ، باید از مقدار زیر استفاده کرد ،

$$M_p = \frac{C(t_p) - C(\infty)}{C(\infty)}$$

نکته : حداکثر فراخشی در $\zeta = 0$ رخ می دهد

در $\zeta = 1$ فراخشی وجود ندارد = صفراست

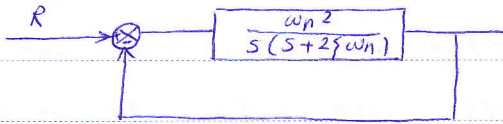
نکته : فراخشی تنها به مقدار ζ بستگی دارد

زمان استقرار t_s

زمان استقرار را با شرط $\pm 2\%$ ، یا $\pm 5\%$ و موجب ثابت زمانی $T = \frac{1}{\zeta \omega_n}$

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (\text{معیار } 2\%)$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (\text{معیار } 5\%)$$



مثال: برای سیستم یک دارد $\omega_n = 5 \text{ rad/sec}$ و $\zeta = 0.6$

زمان تر t_r ، زمان پیک t_p ، زمان استقرار t_s ، و درصد overshoot M_p را محاسبه کنید.

پاسخ: $t_r = 0.55 \text{ sec}$, $t_p = 0.785 \text{ sec}$, $t_s = 1.33 \text{ sec}$, $M_p = 0.095$

$$1) \quad t_r = \frac{\pi - B}{\omega_d} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \cos^{-1} \zeta = \cos^{-1} 0.6 = 53^\circ = 0.93 \text{ rad} = \tan^{-1} \frac{\omega_d}{\sigma} \\ \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4 \end{array} \right.$$

$$t_r = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55 \text{ sec}$$

$$2) \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3.14}{4} = 0.785 \text{ sec}$$

$$3) \quad M_p = e^{-\pi \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)} = e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = 0.095$$

نسبت overshoot 9.5٪

$$\sigma = \zeta \omega_n = 3$$

$$4) \quad t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ sec}$$

برای 2٪

$$t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{3} = 1 \text{ sec}$$

برای 5٪

$$\text{تبدیل درصد به رادیان} : \quad \frac{\text{درصد} \times \pi}{180} = \text{رادیان}$$