۱- برای شین‌های بار که P_i^{sch} و Q_i^{sch} معلوم هستند، اندازه ولتاژها و زاویه‌های فاز آن‌ها مساوی مقادیر شین مرجع یا ۱ و ۰ در نظر گرفته می‌شوند، یعنی $\left|V_i^{(\cdot)}\right| = ۱.۰$ و $\delta_i^{(\cdot)} = ۰.۰$. در شین با ولتاژ تنظیم شده که P_i^{sch} و $\left|V_i\right| = ۱.۰$ معلوم هستند، زاویه‌های فاز آن‌ها مساوی زاویه شین مرجع یا ۰,۰ در نظر گرفته می‌شود، یعنی $\delta_i^{(\cdot)} = ۰.۰$.

۲- برای شین‌های بار $P_i^{(k)}$ و $Q_i^{(k)}$ به ترتیب از معادلات (۵۲.۵) و (۵۳.۵) محاسبه شده و $\Delta P_i^{(k)}$ و $\Delta Q_i^{(k)}$ به ترتیب از روابط (٦۳.۵) و (٦٤.۵) بدست می‌آیند.

۳- برای شین‌های با ولتاژ کنترل‌شده، $P_i^{(k)}$ و $\Delta P_i^{(k)}$ به ترتیب از معادلات (۵۲.۵) و (٦۳.۵) محاسبه می‌شوند.

٤- عناصر ماتریس ژاکوبین ($J_۱$، $J_۲$، $J_۳$ و $J_۴$) از معادلات (۵۵.۵) الی (٦۲.۵) بدست می‌آیند.

دستگاه معادلات خطی همزمان (۵٤.۵) مستقیما با روش فاکتورگیری مثلثی بهینه مرتب شده و حذف گوسی حل می‌شود.

٦- اندازه‌ها و زوایای فاز جدید ولتاژ با استفاده از معادلات (٦۵.۵) و (٦٦.۵) محاسبه می‌شوند.

۷- این فرآیند آن‌قدر ادامه می‌یابد تا پس‌ماندهای $\Delta P_i^{(k)}$ و $\Delta Q_i^{(k)}$ کوچکتر از دقت تعیین‌شده گردند، یعنی:

$$\begin{aligned} \left|\Delta P_i^{(k)}\right| &\le \varepsilon \\ \left|\Delta Q_i^{(k)}\right| &\le \varepsilon \end{aligned} \qquad (٦۷.۵)$$

مثال: در سیستم مثال قبل پخش‌بار را با روش نیوتن رافسون بدست آورید.

با تبدیل امپدانس خطوط به ادمیتانس‌ها داریم:

$$y_{۱۲} = ۱۰ - j۲۰, y_{۱۳} = ۱۰ - j۳۰, y_{۲۳} = ۱۶ - j۳۲$$

ماتریس ادمیتانس شین مطابق زیر بدست می‌آید:

$$Y_{bus}=\begin{bmatrix} ۲۰-j۵۰ & -۱۰+j۲۰ & -۱۰+j۳۰ \\ -۱۰+j۲۰ & ۲۶-j۵۲ & -۱۶+j۳۲ \\ -۱۰+j۳۰ & -۱۶+j۳۲ & ۲۶-j۶۲ \end{bmatrix}$$

با تبدیل ماتریس ادمیتانس شین به صورت قطبی که در آن زاویه‌ها برحسب رادیان هستند، خواهیم داشت:

$$Y_{bus}=\begin{bmatrix} ۵۳.۸۵۱۶۵\angle-۱.۹۰۲۹ & ۲۲.۳۶۰۶۸\angle۲.۰۳۴۴ & ۳۱.۶۲۲۷۸\angle۱.۸۹۲۵ \\ ۲۲.۳۶.۶۸\angle۲.۰۳۴۴ & ۵۸.۱۳۷۷۷\angle-۱.۱۰۷۱ & ۳۵.۷۷۷۰۹\angle۲.۰۳۴۴ \\ ۳۱.۶۲۲۷۸\angle۱.۸۹۲۵ & ۳۵.۷۷۷۰۹\angle۲.۰۳۴۴ & ۶۷.۲۳۰۹۵\angle-۱.۱۷۳۷ \end{bmatrix}$$

با استفاده از معادلات (۵۲.۵) و (۵۳.۵)، روابط زیر برای توان اکتیو شین‌های ۲ و ۳ و توان راکتیو شین ۲ بدست می‌آیند:

$$P_{۲}=|V_{۲}||V_{۱}||Y_{۲۱}|\cos(\theta_{۲۱}-\delta_{۲}+\delta_{۱})+|V_{۲}|^{۲}|Y_{۲۲}|\cos\theta_{۲۲}+|V_{۲}||V_{۳}||Y_{۲۳}|\cos(\theta_{۲۳}-\delta_{۲}+\delta_{۳})$$

$$P_{۳}=|V_{۳}||V_{۱}||Y_{۳۱}|\cos(\theta_{۳۱}-\delta_{۳}+\delta_{۱})+|V_{۳}||V_{۲}||Y_{۳۲}|\cos(\theta_{۳۲}-\delta_{۳}+\delta_{۲})+|V_{۳}|^{۲}|Y_{۳۳}|\cos\theta_{۳۳}$$

$$Q_{۲}=-|V_{۲}||V_{۱}||Y_{۲۱}|\sin(\theta_{۲۱}-\delta_{۲}+\delta_{۱})-|V_{۲}|^{۲}|Y_{۲۲}|\sin\theta_{۲۲}-|V_{۲}||V_{۳}||Y_{۲۳}|\sin(\theta_{۲۳}-\delta_{۲}+\delta_{۳})$$

عناصر ماتریس ژاکوبین با مشتق‌گیری از معادلات بالا برحسب $\delta_{۲}$، $\delta_{۳}$ و $|V_{۲}|$ تعیین می‌شوند:

$$\frac{\partial P_{۲}}{\partial\delta_{۲}}=|V_{۲}||V_{۱}||Y_{۲۱}|\sin(\theta_{۲۱}-\delta_{۲}+\delta_{۱})+|V_{۲}||V_{۳}||Y_{۲۳}|\sin(\theta_{۲۳}-\delta_{۲}+\delta_{۳})$$

$$\frac{\partial P_{۲}}{\partial\delta_{۳}}=-|V_{۲}||V_{۳}||Y_{۲۳}|\sin(\theta_{۲۳}-\delta_{۲}+\delta_{۳})$$

$$\frac{\partial P_{۲}}{\partial|V_{۲}|}=|V_{۱}||Y_{۲۱}|\cos(\theta_{۲۱}-\delta_{۲}+\delta_{۱})+۲|V_{۲}||Y_{۲۲}|\mathrm{co}\,\theta_{۲۲}+|V_{۳}||Y_{۲۳}|\cos(\theta_{۲۳}-\delta_{۲}+\delta_{۳})$$

$$\frac{\partial P_{۳}}{\partial\delta_{۲}}=-|V_{۳}||V_{۲}||Y_{۳۲}|\sin(\theta_{۳۲}-\delta_{۳}+\delta_{۲})$$

$$\frac{\partial P_{۳}}{\partial\delta_{۳}}=|V_{۳}||V_{۱}||Y_{۳۱}|\sin(\theta_{۳۱}-\delta_{۳}+\delta_{۱})+|V_{۳}||V_{۲}||Y_{۳۲}|\sin(\theta_{۳۲}-\delta_{۳}+\delta_{۲})$$

$$\frac{\partial P_{۳}}{\partial |V_{۲}|} = |V_{۳}||Y_{۳۲}|\cos\left(\theta_{۳۲} - \delta_{۳} + \delta_{۲}\right)$$

$$\frac{\partial Q_{۲}}{\partial \delta_{۲}} = |V_{۲}||V_{۱}||Y_{۲۱}|\cos\left(\theta_{۲۱} - \delta_{۲} + \delta_{۱}\right) + |V_{۲}||V_{۳}||Y_{۲۳}|\cos\left(\theta_{۲۳} - \delta_{۲} + \delta_{۳}\right)$$

$$\frac{\partial Q_{۲}}{\partial \delta_{۳}} = -|V_{۲}||V_{۳}||Y_{۲۳}|\cos\left(\theta_{۲۳} - \delta_{۲} + \delta_{۳}\right)$$

$$\frac{\partial Q_{۲}}{\partial |V_{۲}|} = -|V_{۱}||Y_{۲۱}|\sin\left(\theta_{۲۱} - \delta_{۲} + \delta_{۱}\right) - ۲|V_{۲}||Y_{۲۲}|\sin\theta_{۲۱} - |V_{۳}||Y_{۲۳}|\sin\left(\theta_{۲۳} - \delta_{۲} + \delta_{۳}\right)$$

مقادیر بار و تولید برحسب pu عبارتند از:

$$S_{۲}^{sch} = -\frac{\left(۴۰۰ + j\,۲۵۰\right)}{۱۰۰} = -۴.۰ - j\,۲.۵ \qquad pu, P_{۳}^{sch} = \frac{۲۰۰}{۱۰۰} = ۲.۰ \quad pu$$

ولتاژ شین مرجع $V_{۱} = ۱.۰۵\angle ۰^{\circ}\ pu$ بوده و اندازه ولتاژ شین ۳ عبارت از $|V_{۳}| = ۱.۰۴\,pu$ می‌باشد. با شروع از تخمین اولیه $|V_{۲}^{(۰)}| = ۱.۰$، $\delta_{۲}^{(۰)} = ۰.۰$ و $\delta_{۳}^{(۰)} = ۰.۰$، باقیمانده توان‌ها با استفاده از معادلات (٦٣.٥) و (٦٤.٥) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\Delta P_{۲}^{(۰)} = P_{۲}^{sch} - P_{۲}^{(۰)} = -۴.۰ - \left(-۱.۱۴\right) = -۲.۸۶۰۰$$
$$\Delta P_{۳}^{(۰)} = P_{۳}^{sch} - P_{۳}^{(۰)} = ۲.۰ - \left(۰.۵۶۱۶\right) = ۱.۴۳۸۴$$

$$\Delta Q_{۲}^{(۰)} = Q_{۲}^{sch} - Q_{۲}^{(۰)} = -۲.۵ - \left(-۲.۱۲۸\right) = -۰.۲۲۰۰$$

با محاسبه عناصر ماتریس ژاکوبین به ازای تخمین‌های اولیه، مجموعه معادلات خطی درتکرار اول مطابق زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} -۲.۸۶۰۰ \\ ۱.۴۳۸۴ \\ -۰.۲۲۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۴.۲۸ & -۳۳.۲۸ & ۲۴.۸۶ \\ -۳۳.۲۸ & ۶۶.۰۴ & -۱۶.۶۴ \\ -۲۷.۱۴ & ۱۶.۶۴ & ۴۹.۷۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_{۲}^{(۰)} \\ \Delta \delta_{۳}^{(۰)} \\ \Delta |V_{۲}^{(۰)}| \end{bmatrix}$$

با حل معادله ماتریسی فوق، ولتاژ جدید شین‌ها در تکرار اول به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\Delta\delta_{۲}^{(۰)} = -۰.۰۴۵۲۶۳,\ \delta_{۲}^{(۱)} = ۰+\left(-۰.۰۰۴۵۲۶۳\right) = -۰.۰۴۵۲۶۳$$
$$\Delta\delta_{۳}^{(۰)} = -۰.۰۰۷۷۱۸,\ \delta_{۳}^{(۱)} = ۰+\left(-۰.۰۰۷۷۱۸\right) = -۰.۰۰۷۷۱۸$$
$$\Delta\left|V_{۲}^{(۰)}\right| = -۰.۰۲۶۵۴۸,\ \left|V_{۲}^{(۱)}\right| = ۱+\left(-۰.۰۲۶۵۴۸\right) = ۰.۹۷۳۴۵$$

زاویه فاز ولتاژها برحسب رادیان هستند. در تکرار دوم، داریم:

$$\begin{bmatrix} -۰.۰۹۹۲۱۸ \\ ۰.۰۲۱۷۱۵ \\ -۰.۲۲۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۱.۷۲۴۶۷۵ & -۳۱.۷۶۵۶۱۸ & ۲۱.۳۰۲۵۶۷ \\ -۳۲.۹۸۱۶۴۲ & ۶۵.۶۵۶۳۶۸ & -۱۵.۳۷۹۰۸۶ \\ -۲۸.۵۳۸۵۷۷ & ۱۷.۴۰۲۸۳۸ & ۴۸.۱۰۳۵۸۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_{۲}^{(۱)} \\ \Delta\delta_{۳}^{(۱)} \\ \Delta\left|V_{۲}^{(۱)}\right| \end{bmatrix}$$

و

$$\Delta\delta_{۲}^{(۱)} = -۰.۰۰۱۷۹۵,\ \delta_{۲}^{(۲)} = -۰.۰۴۵۲۶۳+\left(-۰.۰۰۱۷۹۵\right) = -۰.۰۴۷۰۵۸$$
$$\Delta\delta_{۳}^{(۱)} = -۰.۰۰۰۹۸۵,\ \delta_{۳}^{(۲)} = -۰.۰۰۷۷۱۸+\left(-۰.۰۰۰۹۸۵\right) = -۰.۰۰۸۷۰$$
$$\Delta\left|V_{۲}^{(۱)}\right| = -۰.۰۰۱۷۶۷,\ \left|V_{۲}^{(۲)}\right| = ۰.۹۷۳۴۵+\left(-۰.۰۰۱۷۶۷\right) = ۰.۹۷۱۶۸۴$$

در تکرار سوم، داریم:

$$\begin{bmatrix} -۰.۰۰۰۰۲۱۶ \\ ۰.۰۲۱۷۱۵ \\ -۰.۲۲۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۱.۵۹۶۷۰۱ & -۳۱.۶۹۳۸۶۶ & ۲۱.۱۴۷۴۴۷ \\ -۳۲.۹۳۳۸۶۵ & ۶۵.۵۹۷۵۸۵ & -۱۵.۳۵۱۶۲۸ \\ -۲۸.۵۴۸۲۰۵ & ۱۷.۳۹۶۹۳۲ & ۴۸.۹۵۴۸۷۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_{۲}^{(۲)} \\ \Delta\delta_{۳}^{(۲)} \\ \Delta\left|V_{۲}^{(۲)}\right| \end{bmatrix}$$

و

$$\Delta\delta_{۲}^{(۲)} = -۰.۰۰۰۰۳۸,\ \delta_{۲}^{(۲)} = -۰.۰۴۷۰۵۸+\left(-۰.۰۰۰۰۳۸\right) = --۰.۰۴۷۰۶$$
$$\Delta\delta_{۳}^{(۱)} = -۰.۰۰۰۰۰۲۴,\ \delta_{۳}^{(۲)} = -۰.۰۰۸۷۰۳+\left(-۰.۰۰۰۰۰۲۴\right) = -۰.۰۰۸۷۰۵$$
$$\Delta\left|V_{۲}^{(۱)}\right| = -۰.۰۰۰۰۰۴۴,\ \left|V_{۲}^{(۲)}\right| = ۰.۹۷۱۶۸۴+\left(-۰.۰۰۰۰۰۴۴\right) = ۰.۹۷۱۶۸$$

همگرائی در تکرار سوم با حداکثر عدم تطابق توان ۲.۵×۱۰^{-۴}حاصل می‌شود که در آن خواهیم داشت:

$$V_{۲} = ۰.۹۷۱۶۸\angle-۲.۶۹۶^{\circ}, V_{۳} = ۱.۰۴\angle-۰.۴۹۸۸^{\circ}$$

با استفاده از معادلات (٥٢.٥) و (٥٣.٥)، رابطه توان راکتیو شین ٣ و توان‌های اکتیو و راکتیو شین مرجع عبارتند از:

$$Q_3=-|V_3||V_1||Y_{31}|\sin(\theta_{31}-\delta_3+\delta_1)-|V_3||V_2||Y_{32}|\sin(\theta_{32}-\delta_3+\delta_2)-|V_3^2||Y_{33}|\sin\theta_{33}$$

$$P_1=|V_1^2||Y_{11}|\cos\theta_{11}+|V_1||V_2||Y_{12}|\cos(\theta_{12}-\delta_1+\delta_2)+|V_1||V_3||Y_{31}|\cos(\theta_{13}-\delta_1+\delta_3)$$

$$Q_1=-|V_1^2||Y_{11}|\sin\theta_{11}-|V_1||V_2||Y_{12}|\sin(\theta_{12}-\delta_1+\delta_2)-|V_1||V_3||Y_{31}|\sin(\theta_{31}-\delta_1+\delta_3)$$

با جایگزینی، مقادیر متغیرهای بالا، خواهیم داشت:

$$Q_3=1.4617\ pu, P_1=2.1842\ pu, Q_1=1.4085\ pu$$

در نهایت، محاسبه پخش توان در خطوط مشابه پخش توان در روش گوس- سایدل مانند مثال قبل بوده و نمایش پخش توان مطابق شکل ٩.٥ می‌باشد.

٩.٥ حل پخش بار با روش مجزای سریع

خطوط انتقال سیستم قدرت دارای نسب $\frac{X}{R}$ بالائی می‌باشند. در چنین سیستمی، حساسیت تغییرات توان حقیقی ΔP به تغییرات اندازه ولتاژ $\Delta|V|$ کمتر و به تغییرات زاویه فاز $\Delta\delta$ بیشتر خواهد بود.

به همین ترتیب، تغییرات توان راکتیو به تغییرات زاویه کمتر حساس بوده و وابستگی زیادی به تغییرات اندازه ولتاژ دارد؛ بنابراین، قابل توجیه است که عناصر J_2 و J_3 از ماتریس ژاکوبین برابر صفر قرار داده شوند؛ بنابراین معادله (٥٤.٥) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\Delta P\\ \Delta Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_1 & 0\\ 0 & J_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta\\ \Delta|V|\end{bmatrix} \qquad (٦٨.٥)$$

$$\Delta P=J_1\Delta\delta=\left[\frac{\partial P}{\partial\delta}\right]\Delta\delta \qquad (٦٩.٥)$$