

فصل اول - کسرتل خاص: که در تمام ریاضی تکرار می شود.

« آسان با مفاهیم اولیه سیستم های کسرتل »

کسرتل به لغت به معنای تحت اختیار در آوردن و دهری کردن و تنصیف کردن است.

1. تعاریف و اصطلاحات پایه

دستگاه یا پلنت: دستگاهی می تواند بخشی از یک وسیله باشد، مثلاً مجموعه ای از اجزایی که ماشین که یک کار را انجام می دهد. البته در این کلاس دستگاه به هر جسم فیزیکی تحت کنترل گفته می شود. مثلاً یک وسیله کششی، کوره گرمایی و ...

فرآیند: یک عمل ترتیبی پیش رفته است که تا دست یابی به یک هدف خاص، یک نتیجه یا یک محصول مفای ادامه می یابد. معمولاً هر کاری که باید کنترل شود نیز فرآیند نامیده می شود.

سیستم: ترکیبی از اجزاء است که با هم برای رسیدن به یک هدف خاص کار می کنند به طوری که انجام این کار توسط هیچ یک از عناصر به تنهایی قابل انجام نباشد.

ورود سیستم: مجموعه ای از سیگنال های خواسته یا ناخواسته که از بیرون بر سیستم وارد می شوند.

خروجی سیستم: مجموعه سیگنال های دریافتی از سیستم به عبارت دیگر خروجی همان پاسخ سیستم است. متغیر کنترل شونده: متغیری که اندازه گیری یا کنترل می شود و معمولاً خروجی سیستم است.

متغیر کسرتل: متغیری که تغییر داده می شود تا بر متغیر کنترل شونده تأثیر بگذارد.

اهداف و نتایج کنترل: ورود سیستم اهداف کنترل و خروجی آن ها نتیجه کنترل می باشد بنابراین عملکرد

سیستم کنترل با مقایسه ورود و خروجی ارزیابی می شود.

اعتکاش و نویز: به مجموعه ای سیگنال ها یا ناهماهنگی گفته می شود که روی خروجی عملکرد سیستم اثر نامطلوب

می گذارند و عملکرد آن را تضعیف می کند. هر چه این عوامل بیشتر باشد کنترل بدیهه تر می شود و به

طوری که می توان اعتکاش را به صورت تابعی از زمان بیان نمود و پاسخ سیستم نسبت به آن را مشخص

نمود. در حالی که نویز سیگنال ناخواسته تصادفی است که نمی توان آن را به صورت تابع ریاضی بیان

حس زمان بیان نمود از این رو از تابع آماری طیف توان برای بیان مشخصات آن استفاده می شود.

اعتکاش و نویز به در صورت به سیستم وارد می شوند (افزاینده ای) دافنی است که در ورود سیستم

تولید شده و دیگری خارج است که به عنوان ورودی ناخواسته به سیستم وارد می شود.

سفتور: قطعه ای است که برای اندازه گیری متغیر کنترل شونده استفاده می شود.

ترنسلاسیون: قطعه ای است که سیگنال را از سنسور به کنترل کننده تبدیل می کند.

ترنسپوزر: قطعه ای است که سیگنال را از نقطه ای به نقطه دیگر انتقال می دهد.

فیدبک یا پیچش: محس است که در آن خروجی به ورودی باز خوانده می شود. خروجی فیدبکی معمولاً از

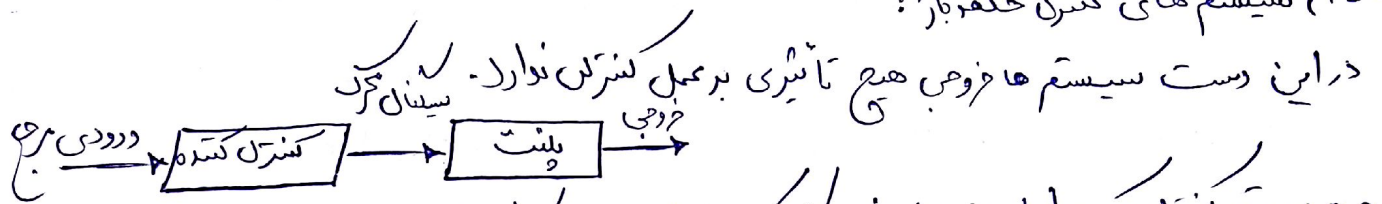
ناهم ناز با ورودی است. که به ترتیب فیدبک مثبت و فیدبک منفی نامیده می شوند.

کنترل فیدبکی: مجموعه است که می گویند در حضور اغتشاش اختلاف بین خروجی سیستم و ورودی مرجع را مینیمم کنند و این کوشش براساس این اختلاف صورت می گیرد. اغلب سیستم های کنترلی دارای فیدبک منفی هستند و از فیدبک مثبت در نوسان سازها استفاده می شود.

2- سیستم های کنترلی حلقه باز و حلقه بسته

سیستم های کنترلی با توجه به حضور و عدم حضور فیدبک به ترتیب به سیستم های کنترلی حلقه بسته و حلقه باز طبقه بندی می شوند.

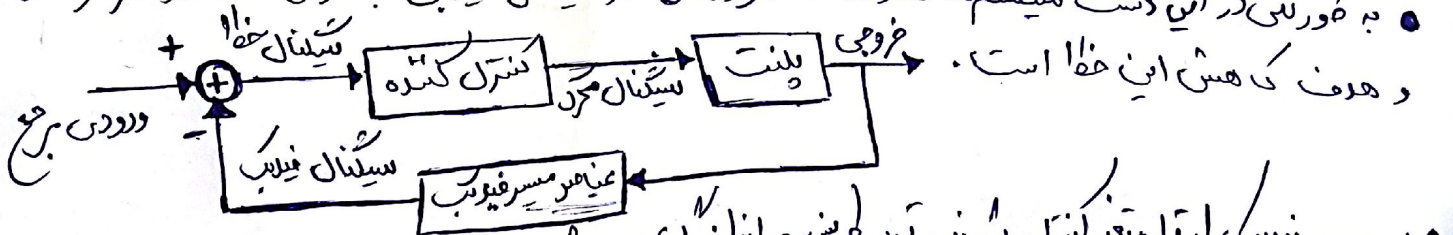
2-1- سیستم های کنترلی حلقه باز:



- هر سیستم کنترلی که براساس زمان بندی کار کرده و دارای فیدبک نباشد سیستم حلقه باز است.
- در این دست سیستم ها دقت سیستم تنها به کالیبراسیون آن بستگی دارد.
- سیستم حلقه باز در حضور اغتشاش به درستی عمل نمی کند.
- زمانی می توان از کنترلی حلقه باز استفاده نمود که رابطه ورودی خروجی سیستم معلوم بوده و سیستم در حضور هیچ یک از اغتشاشات داخلی و خارجی قرار نگذرد.

2-2- سیستم های کنترلی حلقه بسته

- سیستمی که برای ایجاد ارتباط مطلوب بین خروجی و ورودی مرجع از مقایسه آن ها و تفاضلسازی استفاده می کند سیستم کنترلی فیدبک نامیده می شود. سیستم های کنترلی فیدبکدار اغلب سیستم های کنترلی حلقه بسته نامیده می شوند.
- در عمل مبررات کنترلی حلقه بسته و فیدبکی به جای یک دیگر استفاده می شوند.
- سیگنال فیدبکی می تواند سیگنال خروجی یا تابعی از آن، مشتقات یا انتگرال های آن باشد.
- به طور کلی در این دست سیستم ها تفاوت مقدار ورودی از سیگنال فیدبکی به عنوان خطا در نظر گرفته می شود و هدف ک هشی این خطا است.



- در مسیر فیدبک ابتدا متغیر کنترلی شوند و توسط انوساز اندازه گیری می شوند.
- سپس توسط ترانسندوسر سیگنال اندازه گیری شده معمولاً به شکل سیگنال الکتریکی تبدیل می شوند زیرا نتایج کار با سیگنال های الکتریکی آسان است بلکه به آسانی تقویت و انتقال می یابند.

• اگر مقایسه کنده در نامه دورتر از متغیر خروجی قرار گیرد. از ترسیم جهت انتقال کمیت تبدیل شده (خروجی ترسیم یوس) به طرف مقایسه کنده استفاده می شود.

• در واقع عناصر مسیر فیدبک خروجی را می بیند و واحد سیگنال مرجع تبدیل می کند. سیگنال فیدبک متنا با سیگنال خروجی است و به آشکارساز خطا خوراندن می شود.

• سیگنال خطا که توسط آشکارساز خطا تولید می گردد تفاوت بین سیگنال مرجع و سیگنال فیدبکی است.

• کنترل کنده سیگنال خطا را مدار تولید عمل کنترلی مبدل، اصلاح و تقویت می کند.

• سیگنال خطای اصلاح شده به عنوان متغیر کنترلی برای تصحیح خروجی به پلنت مورادده می شود.

مثال هایی از سیستم های کنترل حلقه باز و حلقه بسته (2-3).

1- سیستم گرمایش اتاق 2- سیستم کنترل ترافیکی 3- ماشین لباسشویی

2-4: مقایسه سیستم های کنترل حلقه باز و حلقه بسته

یک سیستم کنترل حلقه باز را می توان توسط فیدبک اصلاح نمود و به یک سیستم حلقه بسته تبدیل نمود. وجود فیدبک به طور اتوماتیک تغییرات را در خروجی به واسطه اغتشاش ها اصلاح می کند. از این دو سیستم کنترل حلقه بسته یک سیستم کنترل اتوماتیک است. مزیت سیستم حلقه بسته این است که حساسیت سیستم نسبت به اغتشاش و تغییرات در پارامترهای داخلی سیستم کاهش یافته یا از بین می رود. از این رو می توان با هزینه کم و وسایلی با دقت مترس به منظور کنترل دقیق یک پلنت معین استفاده نمود در حالی که این کار توسط سیستم حلقه باز تقریباً غیر ممکن است. از نظر پایداری، پایداری در سیستم حلقه باز ساده بوده ولی در حلقه بسته با مشکلاتی از قبیل تصحیح بیش اندازه خطا و بروز واکنش شد که سبب نوسانات ثابت یا متغیر دامنه می شود. به طور کلی سیستم های حلقه باز از حلقه بسته ارزان قیمت تر هستند از این رو در مسائلی که ورودی ها کاملاً مشخص بوده و اغتشاش وجود ندارد بهتر است که از سیستم حلقه باز استفاده می شود. در بسیاری از مسائل ترکیب مناسب کنترل حلقه باز و حلقه بسته می تواند سبب عملکرد مناسب تر و حتی

3- سیستم های خطی و غیر خطی

اگر سیستم را با استفاده از یک معادله دیفرانسیل توصیف کنیم. سیستم های که معادله دیفرانسیل آن ها دارای ضرایب متغیر مستقل یا ضرایب ثابت باشد و اصل جمع آثار در آن برقرار باشد آن را سیستم خطی می گویند. البته متأسفانه هیچ سیستم فیزیکی که طبیعتاً کمالات خطی نیست و باید با اتمام فرضیات و خطای

هوس به یک مدل خطی تبدیل شود. ولی دست یابی به مدل خطی در بسیاری از مسائل امکان پذیر نیست. سیستم های کنترل خطی مدل های ایده آل سازی شده ای هستند که توسط تحلیلگر صحبت سازگاری در طرح و تحلیل استفاده می شوند. وقتی اندازه سیگنال در یک سیستم به گستره ای محدود شود که در آن اجزاء سیستم مشخصات خطی از خود نشان می دهند، سیستم اساساً خطی است. در غیر این صورت بسته به شدت غیر خطی نوی سیستم نباید خیلی خطی فرض شود. همچنین اثرات غیر خطی وجود دارند که در سیستم های کنترل نوی آن ها متمرکز می شوند عبارت اند از: اشباع، خستگی، بازه مرده، باین اجزاء، کوپل شده، نریبلنس، مشخصات غیر خطی، نیرو یا گسار اصطکاک غیر خطی بین اجزاء متحرک و غیره. اغلب شخم های غیر خطی به طور عمد در یک سیستم کنترل به منظور به منظور تأمین کنترل موثر بیشتر در آن قرار داده می شوند. برای سیستم های خطی ابزارهای قدرتمندی تغییر تبدیل فوریه، لاپلاس و تبدیل های تحلیلی دیگر افقی زیادی وجود دارند. از طرف دیگر، سیستم های غیر خطی معمولاً تحلیل ریاضی دشواری داشته و روش های کلی قابل دسترسی برای حل طبیعت و سعی از سیستم های کنترل وجود ندارد.

4- سیستم های کنترل متغیر بازمان و نامتغیر بازمان (LTV, LTI)

وقتی پارامترهای یک سیستم کنترل در طول محلول سیستم نسبت به زمان ثابت باشند، سیستم نامتغیر بازمان نامیده می شود. اگر پارامترهای سیستم کنترل در طول کارکرد سیستم نسبت به زمان تغییر کنند، سیستم متغیر بازمان نامیده می شود. در محادله ریاضی توصیف کننده یک سیستم خطی اگر ضرایب معادله تابعی از زمان باشند، آن ماه سیستم خطی متغیر بازمان است و اگر ضرایب ثابت باشد آن ماه سیستم خطی نامتغیر بازمان است.

5- سیستم کنترل داده - پیوسته و داده - گسسته

یک سیستم کنترل داده - پیوسته، سیستمی است که در آن سیگنال ها در قسمت های مختلف سیستم توابعی پیوسته از زمان هستند که می توان به ac یا dc باشد البته در حالت محلول سیستم ها متعلق از ترکیب از این دو سیگنال هستند و از مدولاتور و دمدولاتور برای تطبیق سیگنال ها در تقاطع مختلف در سیستم استفاده می شود. سیستم های کنترل داده - گسسته، سیستم های هستند که در آن ها سیگنال ها به صورت قطار ضرب یا کو دیجیتالی می باشد. این سیستم ها به دو بخش سیستم های کنترل داده نمونه ای و دیجیتالی تقسیم می شوند.

6- سیستم های کنترل رگولاتور و ردیاب

سیستم های کنترل با توجه به نوع سیگنال ورودی مرجع به دو دسته رگولاتور و ردیاب تقسیم می شوند. سیستم های که در آن ها هدف کنترل و تنظیم خروجی در یک مقدار مطلوب و ثابت است را سیستم های

سیستم های کنترل رگولاتوری مانند خروجی چنین سیستم هایی سطح مایع ، غلظت ، فشار ، دما و ... است و سیستم هایی که در آن ها هدف کنترل دنبال کردن یک مقدار مطلوب متغیر با زمان است را سیستم های کنترل دینامیک گویند که معمولاً خروجی آن ها ، سرعت ، شتاب ، نیرو ، کشاوری ، فرکانس ، ولتاژ یا جریان است مانند دنبال کردن هواپیما توسط موشک .

۱۷ سیستم های کنترل سروکاینزیم و فرایند
سیستم های کنترل با توجه به نوع متغیر تحت کنترل به سیستم های سروکاینزیم و فرایند طبقه بندی می شوند. سیستم کنترل اتوماتیک با فیدبک معنی که در آن متغیر کنترل شوند ، موقعیت مکانیکی یا مشتقات زمان مانند سرعت و شتاب است را سیستم کنترل کاینزیم می نامند. سیستم کنترل اتوماتیک که در آن خروجی یک متغیر مانند دما ، فشار ، جریان ، سیال ، سطح مایع و ... است را سیستم کنترل فرایند گویند.

۱۸ سیستم های کنترل اتوماتیک دستی
سیستم های کنترل با توجه به حضور انسان به عنوان بخشی از سیستم به سیستم های کنترل دستی و اتوماتیک طبقه بندی می شوند. سیستمی که به طور خودکار خروجی واقعی را در حضور اغتشاش در یک مقدار مطلوب نگه می دارد و یا برای یک ورودی مرجع به آسانی تغییر می کند ، سیستم کنترل اتوماتیک نامیده می شود. ولی در سیستم های که انسان به عنوان بخشی از سیستم یا مسئول عمل می کند ، سیستم کنترل دستی نامیده می شود.

۱۹ سیستم های کنترل ISO و MIMO
سیستم های کنترل با توجه به تعداد ورودی و خروجی ها به چهار دسته تقسیم می شوند.

- سیستم های SISO (تک ورودی ، تک خروجی)
- سیستم های MISO (چند ورودی ، تک خروجی)
- سیستم های SIMO (تک ورودی ، چند خروجی)
- سیستم های MIMO (چند ورودی ، چند خروجی)

۱۱۰ کنترل مستقیم و کنترل غیرمستقیم
بعضی وقتها اندازه گیری مقدار خروجی مورد نظر مشکل است یا غیر قابل اندازه گیری است ، آن ها به یک متغیر ثانویه برای کنترل لازم می شود ، که این رویکرد را کنترل غیرمستقیم گویند . اما همیشه اندازه گیری و کنترل مستقیم متغیر اولیه (که حالت سیستم را مشخص می کند) به متغیر دست آوردن بهترین نتیجه مطلوب است ، که این کار کنترل مستقیم نامیده می شود .

نمایش سیستم های کنترل

مدل ریاضی یک سیستم کتبیافته و نسبت به نگرش طرح، شرایط کار و اینز نوع تأکید در مدل سازی، مدل های ریاضی متفاوتی برای یک سیستم وجود دارند. وقتی مدل ریاضی یک سیستم بدست آورده شد، آن گاه ابزارهای ریاضی در

دسترس رami توان برای تحلیلی و طراحی سیستم کاربرد. برای نمایش مدل ریاضی سیستم های کنترل روشی های گوناگون وجود دارد که برخی تنها برای سیستم های خطی و برخی برای نمایش هر دو سیستم خطی و غیرخطی مورد استفاده قرار می گیرند.

- 1- معادله دیفرانسیل 2- پاسخ ضرب 3- تابع تبدیل 4- نمودار بلوکی 5- نمودار گذر سیگنال
- 6- نمایش فضای حالت. پاسخ روش اول به طور کامل در این بخش بیان می شود و در روش ششم (در فصل سوم بیان می کنیم).

1. نمایش با معادله دیفرانسیل

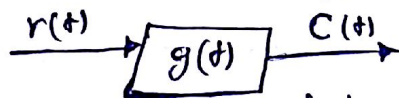
در یک سیستم LTI رابطه میان ورودی و خروجی سیستم را با معادله دیفرانسیل مرتبه n می توان نشان داد:

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + \dots + b_0 r(t)$$

که ضرایب a_i ($i=0, \dots, n$) و b_j ($j=0, \dots, m$) ثابت است و حقیقی، $c(t)$ خروجی و $r(t)$ ورودی سیستم می باشد. اگر ورودی $r(t)$ به ازای $t > t_0$ و شرایط اولیه خروجی و مشتقات آن تا مرتبه $n-1$ در زمان اولیه $t = t_0$ معلوم باشند می توان پاسخ خروجی $c(t)$ را به ازای $t > t_0$ از حل معادله فوق بدست آورد.

2. نمایش با پاسخ ضرب

فرض کنید یک سیستم LTI دارای ورودی $r(t)$ و خروجی $c(t)$ باشد. اگر ورودی سیستم تابع ضرب واحد $\delta(t)$ خروجی سیستم را پاسخ ضرب سیستم $g(t)$ می نامیم. می توان یک سیستم LTI را به شکل زیر نمایش داد.



نمایش با پاسخ ضرب

از روش پاسخ ضرب می توان خروجی را به ازای سایر ورودی ها نیز محاسبه کرد زیرا سیستم های LTI از نوع از نوع سیستم های کانولوشن می باشند به این معنی که خروجی آن ها را می توان از کانولوشن پاسخ ضرب سیستم با ورودی دلخواه محاسبه نمود.

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) r(t-\tau) d\tau \quad c(t) = g(t) * r(t)$$

3. نمایش با تابع تبدیل

همان طور که در دو نمایش قبلی نشان دادیم، محاسبات ریاضی غنوی است که پیش رو می آید. از این رو در سیستم های کنترل خطی تبدیل لاپلاس خود را در ابزار قدرتمندی به نام تابع تبدیل $G(s)$ نشان می دهد

3-1، تابع تبدیل و مفهوم آن :
نسبت تبدیل لا بلاس خروجی به تبدیل لا بلاس ورودی تحت شرایط اولیه صفر را تابع تبدیل می نامند .

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{تبدیل لا بلاس خروجی} \\ \text{تبدیل لا بلاس ورودی} \end{array} \right. = \text{تابع تبدیل}$$

شرایط اولیه صفر

که در آن $G(s)$ تابع تبدیل سیستم و $C(s)$ تبدیل لا بلاس $R(s)$ تبدیل لا بلاس خروجی می باشد .

$$C(s) = G(s) R(s) \xrightarrow{L^{-1}} L^{-1}\{C(s)\} = C(t) = L^{-1}\{G(s) R(s)\}$$

از طرفی چون ضرب در حوزه لا بلاس برابر با تفریق در حوزه زمان است داریم :

$$C(s) = G(s) R(s) \Rightarrow C(t) = \int_0^t g(\tau) r(t-\tau) d\tau ; t > 0$$

3-2، تابع تبدیل و پاسخ ضربه :

اگر $r(t) = \delta(t)$ آن گاه با توجه به $R(s) = 1$ و رابطه $C(s) = G(s) R(s)$ خواهیم داشت :

$$C(s) = G(s) \Rightarrow C(t) = L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$$

$g(t)$ همان پاسخ ضربه سیستم است در نتیجه « تبدیل لا بلاس پاسخ ضربه وقتی که شرایط اولیه صفر باشند » تابع تبدیل

$$G(s) = L[g(t)] \quad \leftarrow g(t) = L^{-1}[G(s)]$$

سیستم LTI می باشد .

3-3، تابع تبدیل و معادله دیفرانسیل سیستم :

اگر فرض کنیم معادله دیفرانسیل یک سیستم LTI با مرتبه n و ضرایب ثابت حقیقی به شرح ذیل باشد :

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + \dots + b_0 r(t)$$

با گرفتن تبدیل لا بلاس از طرفین رابطه بالا تحت شرایط اولیه صفر خواهیم داشت :

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) C(s) = (b_m s^m + \dots + b_0) R(s)$$

از این رو تابع تبدیل $G(s)$ به صورت زیر بر مبنای s بیان می شود .

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

که جند جمله ای صورت را با $N(s)$ و جند جمله ای مخرج $D(s)$ نشان می دهند .

3-4، تابع تبدیل و خواص آن :

1- تابع تبدیل تنها برای سیستم های LTI کاربرد دارد .

2- از تعریف تابع تبدیل، بلاشکاف است که تابع تبدیل شرایط اولیه سیستم را حفظ نمی کند .

3- تابع تبدیل تنها برای سیستم های SISO قابل ترفیع است و برای سیستم های چند متغیره ساترین انتقال ترفیع می شود که به وسیله جمع آنها ر بدست می آید.

4- تابع تبدیل مشخصه ای از خود سیستم، مستقل از اندازه و طبیعت ورودی است.

5- تابع تبدیل هیچ اطلاعاتی از فیزیک دستگاه نمی دهد از این رو تابع تبدیل سیستم های فیزیکی متفاوت می تواند یکسان باشند.

6- اگر تابع تبدیل یک سیستم موجود باشد، می توان پاسخ به ورودی های مختلف را بررسی کرد.

7- تابع تبدیل سیستم را می توان از لحاظ ریاضیاتی سیستم بدست آورد.

8- تابع تبدیل سیستم مشخصات دینامیکی سیستم را به طور کامل توصیف می کند اما درباره فیزیک سیستم حرف نمی زند.

9- تابع تبدیل یک سیستم دارد - پیوسته تغییر صورت تابعی از متغیر مختلف بیان می شود.

3-5 صفحها و قطب ها در تابع تبدیل سیستم :

• تابع تک مقداره : تابع خطی $Q(s)$ یک تابع تک مقداره از s است هرگاه به ازای هر مقدار از s تقاضای مقدار یکانه قطب برای $Q(s)$ بدست آید : $Q(s) = 1/s(s+1)$

• تابع تحلیلی : تابع $Q(s)$ در ناحیه ای از صفحه s تحلیلی است اگر نمود و مشتقاتش در آن ناحیه موجود باشد.

$Q(s) = 1/s(s+1)$ در $s=0$ و $s=-1$ تحلیلی نمی باشد و $Q(s) = 2/s+1$ هر تمام نقاط صفحه s تحلیلی است.

به تقاضی از صفحه s که در آن $Q(s)$ تحلیلی است نقاط محاذی و در غیر این صورت نقاط تکین گویند.

قطب ها : به نقاط تکین که در آن $Q(s)$ یا مشتقات آن به بی نهایت میل کنند قطب گویند. به عبارت دیگر قطب ها همان ریشه های معادله ای مخبر تابع تبدیل می باشد.

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

مرتبه قطب : اگر در و بر و ستان و مخالف منف باشد : $\lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i)^q Q(s)$ که در آن $s = s_i$ را یک قطب مرتبه q می نامند و اگر $q=1$ باشد قطب را ساده گویند.

صفحه های سیستم : تقاضی که در آن $Q(s)$ برابر مع 1 باشد یعنی همان ریشه های چند جمله ای صورت $Q(s)$

$$N(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 = 0$$

مرتبه ای صفر : اگر در زیر ستان و مخالف منف باشد.

$$\lim_{s \rightarrow s_i} \left[\frac{Q(s)}{(s - s_i)^q} \right] \neq 0 \quad \text{که } s = s_i \text{ یک صفر مرتبه } q \text{ نامیده می شود اگر } q=1 \text{ باشد صفر را ساده گویند.}$$

* اگر s_0 صفری از $Q(s)$ باشد که سبب مسدود شدن انتقال سینتال $r(t) = k e^{s_0 t}$ شود، صفر انتقال

$$b_m \frac{d^m(r(t))}{dt^m} + \dots + b_0 r(t) = b_m (k s_0^m) e^{s_0 t} + \dots + b_0 k e^{s_0 t}$$

$$= (b_m s_0^m + b_{m-1} s_0^{m-1} + \dots + b_0) k e^{s_0 t} = N(s_0) k e^{s_0 t} = 0$$

مثال 1- تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید و قطب‌های آن را محاسبه کنید :

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+3)^2} \quad \begin{cases} N(s) = 0 \Rightarrow s+2=0 \Rightarrow s=-2 \\ D(s) = 0 \Rightarrow s(s+1)(s+3)^2=0 \Rightarrow s=0, -1, -3, -3 \end{cases}$$

نکته ۱: در حالت کلی صفرها و قطب‌های یک تابع تبدیل کسری برابر است به شرطی که صفرها و قطب‌ها در بی‌نهایت نیز در نظر گرفته شود این نکته در رسم مکان هندسی ریشه‌ها بسیار کاربرد دارد است.

مثال 2- تابع تبدیل قبل را در نظر گرفته و صفرها و قطب‌ها را در بی‌نهایت در صورت وجود محاسبه کنید.
از آن جایی که در مکان قبل یک صفر و چهار قطب داریم با توجه به نکته ذکر شده باید سه صفر دیگر در بی‌نهایت داشته باشیم که به راحتی می‌توان آن را از محاسبه نیز بدست آورد.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+3)^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10s}{s^4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10}{s^3} = 0$$

بنابراین $G(s)$ سه عدد صفر در بی‌نهایت دارد. به این گونه صفرها و قطب‌ها نامحدود گویند و سایر صفرها یا قطب‌ها را محدود گویند.

توجه ۱۱ اگر درجه چندجمله‌ای مخرج n و درجه چندجمله‌ای صورت m باشد آن‌گاه $r = n - m$ درجه نسبی سیستم است. که در آن تعداد قطب‌ها محدود برابر n و تعداد صفرها محدود برابر m است و اگر $n > m$ باشد آن‌گاه $n - m$ بیانگر تعداد صفرها نامحدود بوده و قطب نامحدود نداریم و اگر $n \leq m$ باشد آن‌گاه $n - m$ بیانگر تعداد قطب‌ها نامحدود بوده و صفر نامحدود نداریم.

3-6) تابع تبدیل و معادله مسطحه :

معادله مسطحه سیستم LTI، $\Delta(s)$ عبارت است از معادله‌ای که از صفر قرار دادن چندجمله‌ای مخرج تابع تبدیل بدست می‌آید:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad \Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

نکته ۲: ریشه‌های معادله مسطحه همان قطب‌های سیستم و رفتار پاسخ زمانی سیستم را مشخص می‌کنند و بنابراین سیستم‌های LTI که ریشه‌های معادله مسطحه نسبتی دارند.

3-7) تابع تبدیل و سر و تاسره بودن سیستم :

با توجه به درجه نسبی r تابع تبدیل به صورت زیر طبقه‌بندی می‌شوند:

- ۱- اگر $r > 0$ آید آسره ۲ اگر $r = 0$ سره ۳ اگر $r < 0$ تاسره (البته اگر سیستم‌های فیزیکی سره می‌باشند)

3-8) تابع تبدیل و تعیین مقدار اولیه و نهایی :

در صورت داشتن تبدیل Δ بدست خروجی $C(s) = G(s)R(s)$ به راحتی مقدار اولیه $C(0^+)$ و مقدار نهایی

$C(\infty)$ را محاسبه کنیم :

حقیقت مقدار اولیه : $C(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sC(s)$

حقیقت مقدار نهایی : $C(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s)$

نمونه حقیقت مقدار اولیه برای هر تابعی قابل استفاده است و من در استفاده از حقیقت مقدار نهایی باید توجه کرد که $sC(s)$ قطب روی محور موهومی یا در نیمه راست صفحه s نداشته باشد.

مثال 3: تابع زیر را در نظر گرفته و مقدار اولیه و نهایی را بدست آورید:

از آن جایی که شرایط مقدار نهایی در این تابع برقرار است به راحتی داریم:

$$C(s) = \frac{5}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

$C(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sC(s) = 0$, $C(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \frac{5}{2}$

مثال 4: تابع زیر را در نظر گرفته و مقدار اولیه و نهایی آن را بدست آورید:

به راحتی واضح است که $sC(s)$ دارای قطب $s=0$ است که روی محور محور موهومی قرار می گیرد از این رو مقدار $C(\infty)$ ندارد و فقط داریم:

$$C(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$C(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = 1$

" موردی بر تبدیل لاپلاس "

لاپلاس یک عملگر خطی است که بدون تغییری با (شرط 1) اگر $f: R \rightarrow R$ یک تابع حقیقی باشد آنگاه به ازای هر بازه متناهی از محور t اشتغال پذیر باشد. (2) f به ازای کلیه مقادیر منفی t صفر باشد. اگر عملگر لاپلاس را با L نشان دهیم شرط خطی بودن یعنی: $L\{af + bg\} = aL\{f\} + bL\{g\}$ که در این f و g دو تابع که در شرط لاپلاس تیری صدق کنند و a و b دو عدد ثابت باشند.

حال فرض کنید f تابع لاپلاس پذیر باشد آنگاه اشتغال تابع $f(t)e^{-st}$ به ازای هر $s > s_0$ بر بازه $[s_0, +\infty)$ موجود و متناهی است. در این صورت تقریباً می گوییم:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s > s_0$$

مثال 5: تبدیل لاپلاس $f(t)=1$ را محاسبه کنید:

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \left. -\frac{1}{s} e^{-st} \right|_0^t = -\left(-\frac{1}{s} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} e^{-st} \right) = \frac{1}{s}$$

مشتق و تبدیل لاپلاس:

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

$$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

قضیه: مشتق از تابع لاپلاس نیز: اگر به ازای $s > s_0$ داشته باشیم $L\{f(t)\} = F(s)$ ، آن آنگاه

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n L\{t^n f(t)\} \quad \text{و} \quad L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{f(t)\}.$$

 انتگرال و تبدیل لاپلاس :-

قضیه: (انتگرال از تابع لاپلاس نیز) اگر $F(s) = L\{f(t)\}$ آن آنگاه $F(s) = \frac{1}{s} L\{f(t)\}$ یا $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$
 قضیه: (انتگرال از تابع لاپلاس گرفته شده) اگر $\int_0^\infty F(s) ds$ همواره باشد آن آنگاه

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s) ds$$

قضیه: اگر $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$ همواره باشد آن آنگاه

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(s) ds$$

تغییر مقیاس و انتقال در لاپلاس :

قضیه (تغییر مقیاس) اگر a عددی مثبت و $s > s_0$ ای $L\{f(t)\} = F(s)$ ، آن آنگاه

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

قضیه (انتقال در تابع لاپلاس نیز) : اگر به ازاء هر $s > s_0$ ای $L\{f(t)\} = F(s)$ ، a عددی مثبت
 باشد در این صورت

$$L\{u_0(t-a)f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

 که $u_0(t)$ تابع پله‌ای واحد است :
 $u_0(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

 قضیه (انتقال در تابع لاپلاس گرفته شده)

با توجه به مطالب گفته شده داریم :

- 1) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$, 2) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$, 3) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
- 4) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a} \sin at$, 5) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$, 6) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$
- 7) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$, 8) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s} F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau) d\tau$
- 9) $L^{-1}\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{1}{t} f(t)$, 10) $L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{a} L^{-1}\{f(t/a)\}$
- 11) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s} e^{-at}\right\} = u_0(t-a)$, 12) $L^{-1}\{1\} = \delta(t)$, 13) $L^{-1}\{e^{-as}\} = \delta(t-a)$
- 14) $L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$, 15) $L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = u_0(t-a) f(t-a)$

$$16) L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t), \quad 17) L^{-1}\{s(t-a)f(t)\} = e^{-at} f(a).$$

مثال 6) لا یلاس معکوس $F(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+4}$ را بیابید.

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+2s+4}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+1)^2+3}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right\} \\ &= 2e^{-t} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\} - e^{-t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\} = 2e^{-t} \cos \sqrt{3}t - e^{-t} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t \end{aligned}$$

مثال 7) پاسخ نهایی سیستم زیر را به ازای ورودی $r(t) = tu(t)$ بدست آورید.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$$

حل: تبدیل لا یلاس خروجی با توجه به رابطه $C(s) = G(s)R(s)$ به صورت زیر است:

$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}, \quad C(s) = \frac{1}{s^2(s+1)(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{B_1}{s+1} + \frac{C_1s+C_2}{s^2+1}$$

$$A_1(s+1)(s^2+1) + A_2s(s+1)(s^2+1) + B_1s^2(s^2+1) + (C_1s+C_2)s^2(s+1) = 1$$

$$\Rightarrow A_1(s^3+s^2+s+1) + A_2(s^4+s^3+s^2+s) + B_1(s^4+s^2) +$$

$$C_1s(s^3+s^2) + C_2(s^3+s^2) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2s^4 + B_1s^4 + C_1s^4 = 0 \\ A_1s^3 + A_2s^3 + C_1s^3 + C_2s^3 = 0 \\ A_1s^2 + A_2s^2 + B_1s^2 + C_2s^2 = 0 \\ A_1s + A_2s = 0 \\ A_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 + B_1 + C_1 = 0 \\ 1 + A_2 + C_1 + C_2 = 0 \\ 1 + A_2 + B_1 + C_2 = 0 \\ 1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -1 \end{cases}$$

$$B_1 + C_1 = 1, \quad C_1 + C_2 = 0, \quad B_1 + C_2 = 0 \Rightarrow B_1 = C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{-1}{s} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/2s - 1/2}{s^2+1} \Rightarrow C(t) = t - 1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$$

$$\Rightarrow C(\infty) = \infty, \quad C(0^+) = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

شرط پیوستگی پاسخ: اگر $C(0) = 0$ شرط پیوستگی پاسخ پله در $t = 0$ به صورت زیر است.

$$C(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s C(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) \cdot 1/s = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$$

برای برقراری شرط فوق باید $n > m$ باشد.

نتیجه ۱۱: شرط پیوستگی پاسخ فزونی در زمان $t = 0$ به شرح ذیل می باشد.

شرط پیوستگی	ورودی	
$n > m + 1$	$s(t)$	ضربه
$n > m$	$u(t)$	پله
$n > m - 1$	$t u(t)$	شیب
$n > m - 2$	$t^2 u(t)$	سهمی

مثال ۸: برای هر یک از سیستمهای زیر ورودی لازم برای پیوسته بودن پاسخ در $t = 0$ را بدست آورید:

$$1) G(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad 2) \frac{1}{s^2 + 1.4s + 1}, \quad 3) \frac{s-2}{s^2 + 4s + 2}$$

۱) برای ورودی های شیب و سهمی پیوسته است. ۲) برای ورودی های ضربه، پله، شیب و سهمی پیوسته است.

۳) برای ورودی های پله، شیب و سهمی پیوسته است.

۳-۱۹: فرم های مختلف تابع تبدیل مرتبه و نوع آن ها:

۱- فرم نسبت دو جمله ای

$$G(s) = k \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad n > m$$

$$G(s) = k \frac{(1 + sT_{z1})(1 + sT_{z2}) \dots (1 + sT_{zm})}{s^N (1 + sTP_1)(1 + sTP_2) \dots (1 + sTP_l)}, \quad N + l > m$$

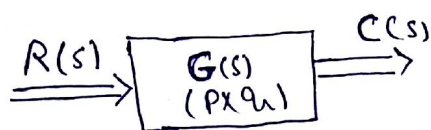
۲- فرم ثابت زمانی

$$G(s) = k \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{s^N (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_l)}, \quad N + l > m$$

۳- فرم قطب - صفر

تعداد قطب های موجود در مبدأ نوع سیستم را تعیین می کنند. فرم های ۲ و ۳ سیستم نوع N و مرتبه آن $N + l$ می باشد. باید تأکید شود که همی ترابع تبدیل گویا نبوده و دارای عبارتی به فرم e^{-st} می باشد بیان گذر تا فیز زمان سیستم است.

تابع تبدیل سیستم‌های چند متغیره (3-10) با بهره گیری از جمع آثار، می‌توان تعریف تابع تبدیل از SISO به سیستم‌های MIMO گسترش داد



یک سیستم خطی با P ورودی و q خروجی

تابع تبدیل بین ورودی نام و خروجی نام (و قتی همی ورودی ها به عنوان $R_j(s)$ معرفی هستند) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$C_i(s) = \frac{C_i(s)}{R_j(s)} \quad ; \quad R_k(s) = 0, \quad k=1, 2, \dots, P; \quad k \neq j$$

حال با توجه به اصل جمع آثار، خروجی نام در حضور همی ورودی ها به صورت زیر بیان می‌شود

$$C_i(s) = C_{i1}(s) R_1(s) + C_{i2}(s) R_2(s) + \dots + C_{ip}(s) R_p(s)$$

در کس، رابطه ورودی - خروجی سیستم چند متغیره در فرم برداری - ماتریسی به صورت زیر است

$$\bar{C}(s) = \bar{G}(s) \bar{R}(s) \quad \begin{bmatrix} C_1(s) \\ \vdots \\ C_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1P}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{q1}(s) & \dots & G_{qP}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ \vdots \\ R_P(s) \end{bmatrix}$$

مثال ۱۰) اگر تابع تبدیل یک سیستم چند متغیره به صورت زیر باشد پاسخ پله آن را بدست آورید:

$$\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

حل: سیستم تابع انتقال 2×2 است پس 2 ورودی و 2 خروجی دارد. داریم:

$$\bar{C}(s) = \bar{G}(s) \bar{R}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{s(s+2)} \\ \frac{1}{s(s+2)} + \frac{1}{s(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{3/2}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1/2}{s+2} \\ \frac{5/6}{s} - \frac{1/2}{s+2} - \frac{1/3}{s+3} \end{bmatrix} \Rightarrow C(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t} \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{3} e^{-3t} \end{bmatrix}$$

مثال ۱۱) هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر یک سیستم LTI را نشان می‌دهد. تابع تبدیل هر یک از سیستم‌ها را بیابید.

$$\ddot{C}(t) + 2\dot{C}(t) + 5C(t) + 6C(t) = 3\dot{r}(t) + r(t) \quad \text{الف}$$

$$C^{(4)}(t) + 10\ddot{C}(t) + \dot{C}(t) + 5C(t) = 5r(t) \quad \text{ب}$$

$$\ddot{C}(t) + 10\ddot{C}(t) + 2\dot{C}(t) + 2\int_0^t C(\tau) d\tau = \frac{dr(t)}{dt} + 2r(t) \quad \text{ج}$$

$$2\ddot{C}(t) + \dot{C}(t) + 5C(t) = r(t) + 2r(t-T) \quad \text{د}$$

$$(s^3 + 2s^2 + 5s + 6)C(s) = (3s + 1)R(s) \Rightarrow G(s) = \frac{3s + 1}{s^3 + 2s^2 + 5s + 6} \quad \text{حل: الف}$$

$$(s^4 + 10s^2 + s + 5)C(s) = 5R(s) \Rightarrow G(s) = \frac{5}{s^4 + 10s^2 + s + 5} \quad \text{ب}$$

ج) با مشتق گیری عامل انتگرال را از بین ببرد و سپس لاپلاس می گیریم.

$$C^{(4)}(t) + 10C^{(3)}(t) + 2\dot{C}(t) + 2C(t) = \ddot{r}(t) + 2\dot{r}(t)$$

$$\Rightarrow (s^4 + 10s^3 + 2s^2 + 2)C(s) = (1 + 2s)R(s) \Rightarrow G(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^4 + 10s^3 + 2s^2 + 2}$$

$$(2s^2 + s + 5)C(s) = (1 + 2e^{-Ts})R(s) \Rightarrow G(s) = \frac{1 + 2e^{-Ts}}{2s^2 + s + 5} \quad \text{د}$$

مثال 10) یک سیستم LTI چند متغیره با ورودی های $r_1(t)$ و $r_2(t)$ و خروجی های $C_1(t)$ و $C_2(t)$ با دستگاه معادلات زیر توصیف می شود.

$$\ddot{C}_1 + 2\dot{C}_1 + 3C_1 = r_1(t) + r_2(t)$$

$$\ddot{C}_2 + 3\dot{C}_2 - C_1 - C_2 = r_2 + \dot{r}_1$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 3)C_1(s) = R_1(s) + R_2(s)$$

$$(s^2 + 3s - 1)C_2(s) - C_1(s) = R_2(s) + sR_1(s)$$

$$G_{11}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \Rightarrow \frac{C_1}{R_1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \Rightarrow C_1 = \frac{R_1}{s^2 + 2s + 3}$$

$$G_{21}(s) = \left. \frac{C_2}{R_1} \right|_{R_2=0} = \frac{C_1}{(s^2 + 3s - 1)R_1} + \frac{s}{s^2 + 3s - 1}$$

$$= \frac{1}{(s^2 + 3s - 1)(s^2 + 2s + 3)} + \frac{s}{s^2 + 3s - 1}$$

$$G_{12}(s) = \left. \frac{C_1}{R_2} \right|_{R_1=0} = \frac{1}{s^2 + 2s + 3}, \quad G_{22}(s) = \left. \frac{C_2}{R_2} \right|_{R_1=0} = \frac{C_1}{(s^2 + 3s - 1)R_2} + \frac{1}{s^2 + 3s - 1}$$

$$\frac{1}{s^2 + 3s - 1} = \frac{1}{(s^2 + 3s - 1)(s^2 + 2s + 3)} + \frac{1}{s^2 + 3s - 1}$$

مثال ۱۱) پاسخ پله واحد یک سیستم به صورت زیر می باشد تابع تبدیل سیستم را تعیین کنید :

$$C(t) = 1 - \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

* در سیستم های LTI از مشتق زمانی پاسخ پله ، پاسخ فریب بدست می آید .

$$g(t) = \dot{C}(t) = + \frac{7}{3}e^{-t} - 3e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-4t}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{7/3}{(s+1)} - \frac{3}{(s+2)} + \frac{2/3}{(s+4)} = \frac{s+8}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

مثال ۱۲) خروجی $C(t)$ معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید :

$$C''(t) + C'(t) = e^{4t}, \quad C(0) = 2, \quad C'(0) = 0$$

$$(s^2 C(s) - s C(0) - C'(0)) + (s C(s) - C(0)) = \frac{1}{s-4}$$

$$s^2 C(s) - 2s + s C(s) - 2 = \frac{1}{s-4} \Rightarrow C(s)(s^2 + s) = 2s + 2 + \frac{1}{s-4}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{2s^2 - 6s - 7}{(s^2 + s)(s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-4}$$

$$A(s+1)(s-4) + Bs(s-4) + Cs(s+1) = 2s^2 - 6s - 7$$

$$\begin{aligned} AS^2 + BS^2 + CS^2 &= 2S^2 \\ -3AS - 4BS + CS &= -6S \\ -4A &= -7 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=2 \\ 3A+4B-C=6 \\ 4B-C=3/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=1/4 \\ 4B-C=3/4 \end{cases}$$

$$-4A = -7 \Rightarrow A = 7/4, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{7/4}{s} + \frac{1/5}{s+1} + \frac{1/20}{s-4} \Rightarrow C(t) = \frac{7}{4} + \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{20}e^{4t}$$

مثال ۱۳) پاسخ پله واحد سیستمی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{3(s+2)}{(s+4)(s+1)^2}$ را بدست آورید .

$$C(s) = G(s)R(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+4)(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

$$A(s+4)(s+1)^2 + Bs(s+1)^2 + C(s+1)(s+4)s + Ds(s+4) = 3(s+2)$$

$$\Rightarrow A(s^3 + 6s^2 + 9s + 4) + B(s^3 + 2s^2 + s) + C(s^3 + 5s^2 + 4s) + D(s^2 + 4s) = 3s + 6$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9 - 3 + 3C + D &= 0 \\ \Rightarrow B + C &= \frac{-3}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ 6A+2B+5C+D=0 \\ 9A+B+4C+4D=3 \\ 4A=6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 6 \times 3/2 + 2(-3/2) + 3C + D = 0 \\ 9 \times 3/2 + 3C - 3/2 + 4D = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow A = 3/2 &\Rightarrow B = 1/6, \quad C = -5/3, \quad D = -1 \end{aligned}$$

$$C(s) = \frac{3/2}{s} + \frac{1/6}{s+4} - \frac{5/3}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow C(t) = 3/2 + 1/6 e^{-4t} - \frac{5}{3} e^{-t} - t e^{-t}$$

مثال ۱۴) پاسخ سیستمی به ورودی پله واحد با شرایط اولیه صفر به صورت زیر است پاسخ ضربه سیستم را

$$C(t) = (1.5 - 0.5 e^{-2t} - t e^{-t} - e^{-t}) u(t)$$

نبت آورد:

$$\begin{aligned} g(t) = C'(t) &= (1.0 e^{-2t} + t e^{-t} - e^{-t} + e^{-t}) u(t) + (1.5 - 0.5 e^{-2t} - t e^{-t} - e^{-t}) \delta(t) \\ &= (e^{-2t} + t e^{-t}) u(t) + (1.5 - 0.5 e^{-2t} - t e^{-t} - e^{-t}) \delta(t) \\ &= (e^{-2t} + t e^{-t}) u(t) + (1.5 - 0.5 - 1) \delta(t) = (e^{-2t} + t e^{-t}) u(t) \end{aligned}$$

* نکته: $\delta(t-t_0) f(t) = \delta(t-t_0) f(t_0)$

مثال ۱۵) تابع تبدیل حلقه بسته و پاسخ سیستمی به صورت زیر داده شده است مقادیر a ، b و c را تعیین کنید:

$$C/R = \frac{10(s+a)}{s^2 + 8s + 15}, \quad C(t) = 1.33 + b e^{-3t} - 3 e^{ct}$$

$$C(s) = \frac{10(s+a)}{s(s^2 + 8s + 15)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+5)} + \frac{C}{s}$$

$$A(s^2 + 5s) + B(s^2 + 3s) + C(s^2 + 8s + 15) = 10s + 10a$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 5A + 3B + 8C = 10 \\ 15C = 10a \end{cases} \Rightarrow C = \frac{10a}{15} \Rightarrow \begin{cases} A + B = -\frac{2}{3}a \\ 5A + 3B = -\frac{16}{3}a + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3A - 3B = 2a \\ 5A + 3B = -\frac{16}{3}a + 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2A = -\frac{10}{3}a + 10 \Rightarrow A = -\frac{5}{3}a + 5$$

$$\Rightarrow B = \frac{5}{3}a - 5 - \frac{2}{3}a = a - 5$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{5(3-a)/3}{s+3} + \frac{a-5}{s+5} + \frac{\frac{2}{3}a}{s}$$

$$\Rightarrow C(t) = \frac{2}{3}a + (a-5)e^{-3t} + \frac{5(3-a)}{3}e^{-5t} \Rightarrow a=2, c=-5$$

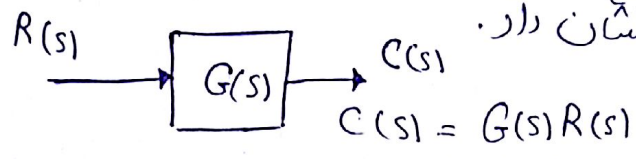
$$b = 5/3$$

۴) نمایش نمودارهای بلوکی

اگر سیستم از اتصال چند زیر سیستم ریز تشکیل شده باشد، ارتباط آن ها از طریق جبر و معادلات دیفرانسیل کار دشواری است و سیستم حاصل از آن نیز پیچیده می شود. از آنجا که مدل نمودار بلوکی پیشنهاد داده شد. نمودار بلوکی یک سیستم، نمایشی تصویری از عملکرد هر عنصر و عبور سیگنال ها است و ارتباط مورد بین عناصر آن را نشان می دهد.

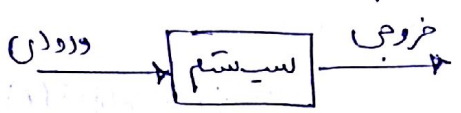


در نمودار بلوکی متغیرهای سیستم را با بلوک نشان داد، و سیگنال‌ها از طریق پیکان‌ها جهت دار بین متغیرها عبور می‌کنند. نمودار بلوکی و توابع تبدیل را می‌توان با هم استفاده نمود و روابط علت و معلول موجود در یک سیستم LTI را نشان داد.

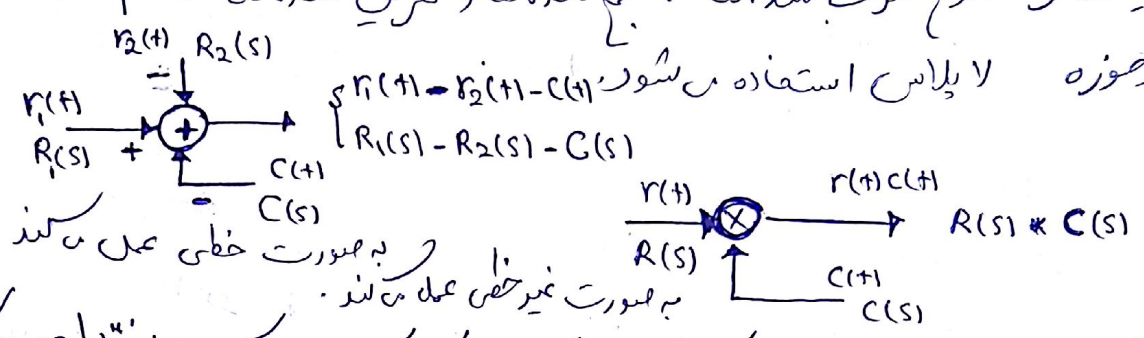


اجزاء نمودار بلوکی:

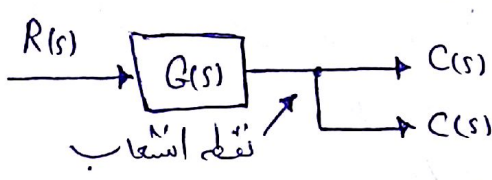
۱) بلوک و پیکان: بلوک بیانگر مدل سیستم و پیکان متغیرها و سیگنال‌های ورودی - خروجی و داخلی سیستم را بیان می‌کنند.



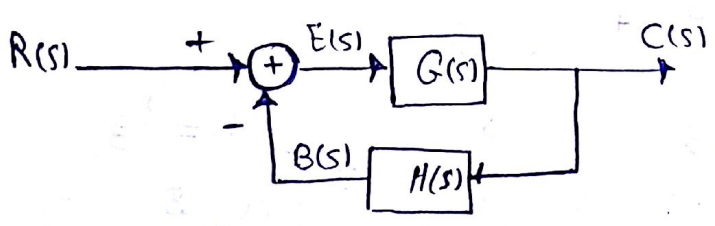
۲) دریافت‌کننده: انواع ضرب، جمع، کسره‌ها و تفریق کسره‌ها که هم در حالت زمان و هم در حوزه لاپلاس استفاده می‌شوند.



۳) نقطه اشعاب: نقطه‌ای است که از آن سیگنال یک بلوک به بلوک‌ها یا نقاط جمع دیگر می‌آید.



۴) بررسی نمودار بلوکی یک سیستم حلقه بسته: سیستم حلقه بسته یا فیدبک منفی:



۱) ورودی مرجع (فرمان) $R(s)$

۲) خروجی (متغیر کنترل شونده) $C(s)$

۳) سیگنال فیدبک $B(s)$

۴) سیگنال خطا $E(s)$

۵) تابع تبدیل فیدبک $H(s)$

۶) تابع تبدیل مسیر پیشرو $G(s)$

(1) $E(s)G(s) = C(s)$ و (2) $E(s) = R(s) - B(s)$ (3) $B(s) = C(s)H(s)$

$\Rightarrow (1, 2, 3) \Rightarrow (R(s) - C(s)H(s))G(s) = C(s) \Rightarrow$

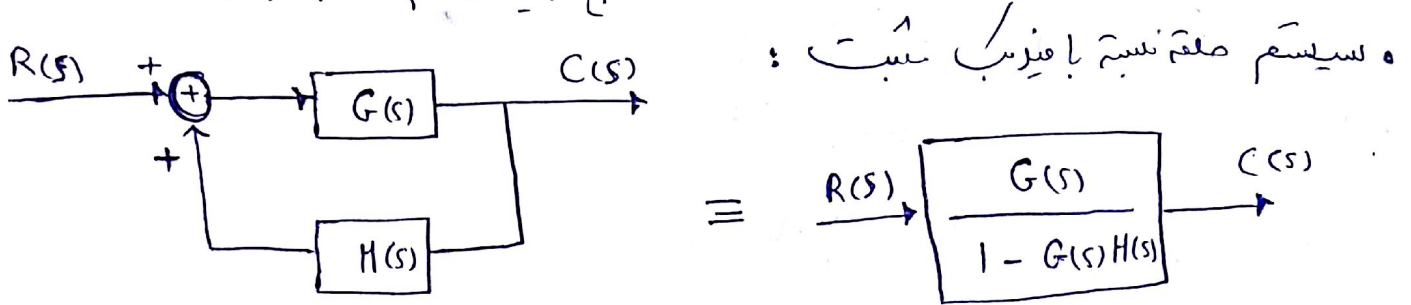
$R(s)G(s) - C(s)H(s)G(s) = C(s) \Rightarrow R(s)G(s) = C(s)(H(s)G(s) + 1)$

$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$

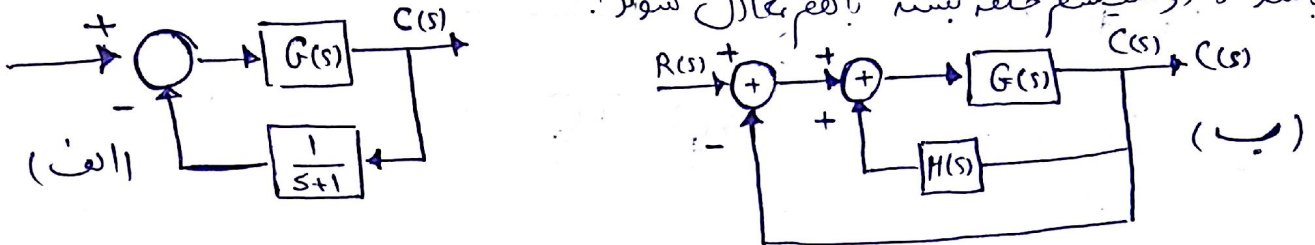
پس اگر تابع تبدیل حلقه بسته را با $T(s)$ نشان دهیم داریم :

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

« تابع تبدیل سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی »



مثال « در شکل الف) دیاگرام بلوک یک سیستم داده شده است. $H(s)$ در شکل ب) و باید باشد تا دو سیستم حلقه بسته با هم معادل شوند؟ »



الف : $T_1(s) = \frac{G(s)}{1 + \frac{G(s)}{s+1}}$

ب : $T_2(s) = \frac{G(s)/(1 - H(s)G(s))}{1 + G(s)/(1 - H(s)G(s))}$

حل :

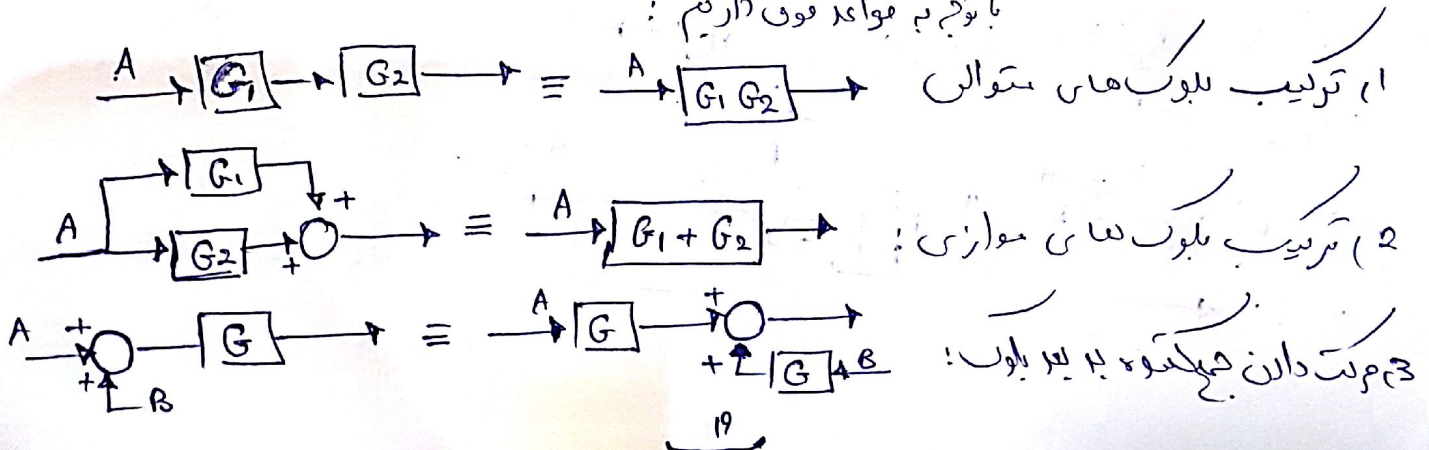
$$\Rightarrow T_2(s) = \frac{G(s)}{1 - H(s)G(s) + G(s)} = \frac{G(s)}{1 + (1 - H(s))G(s)}$$

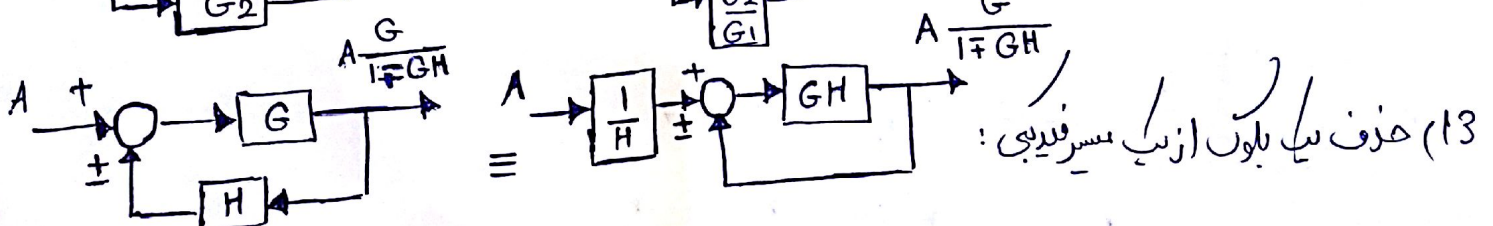
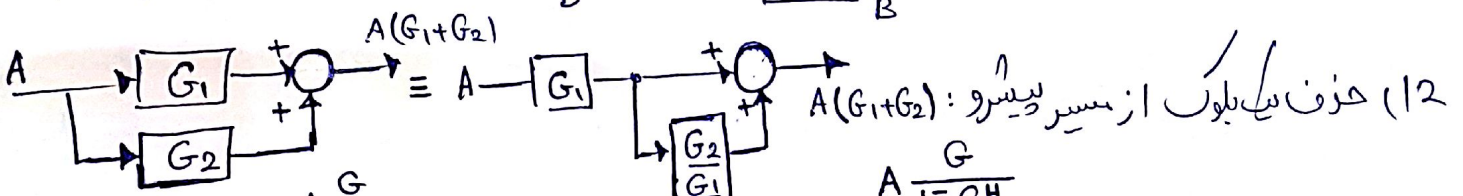
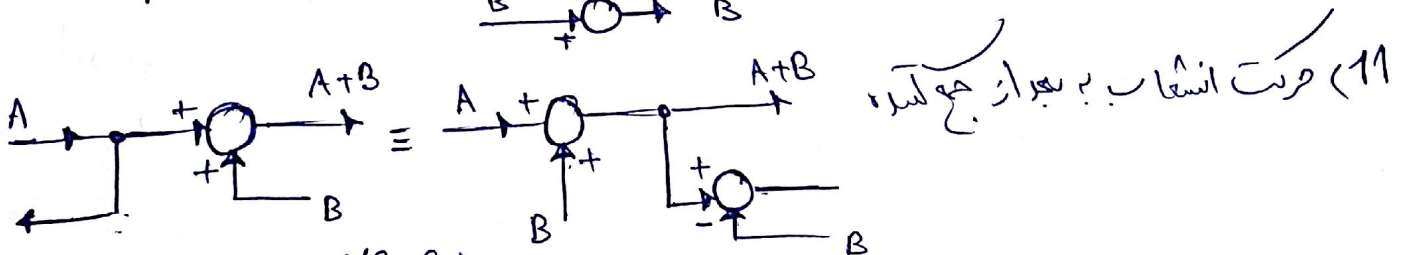
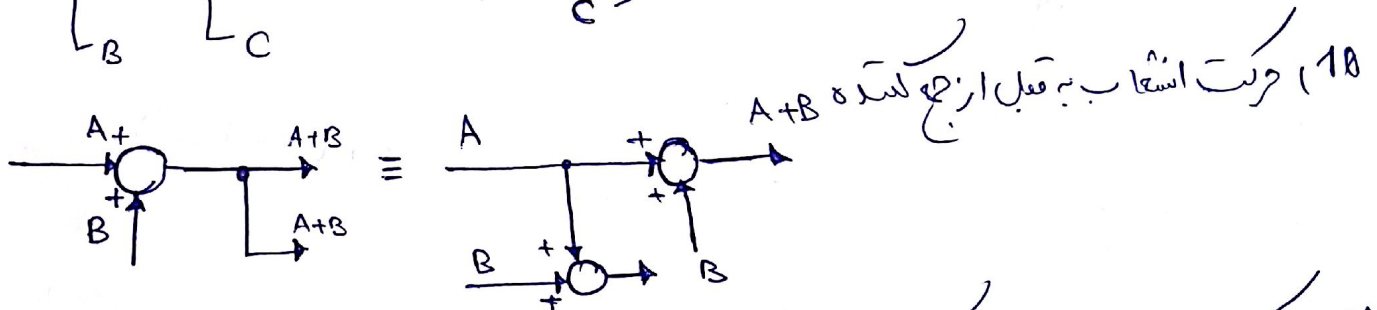
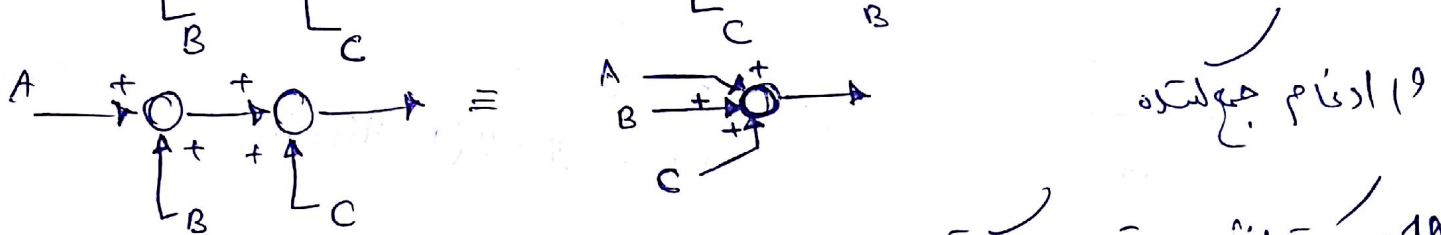
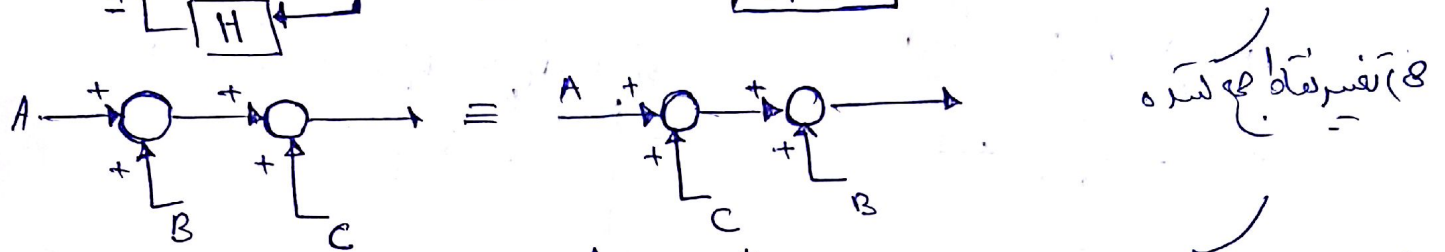
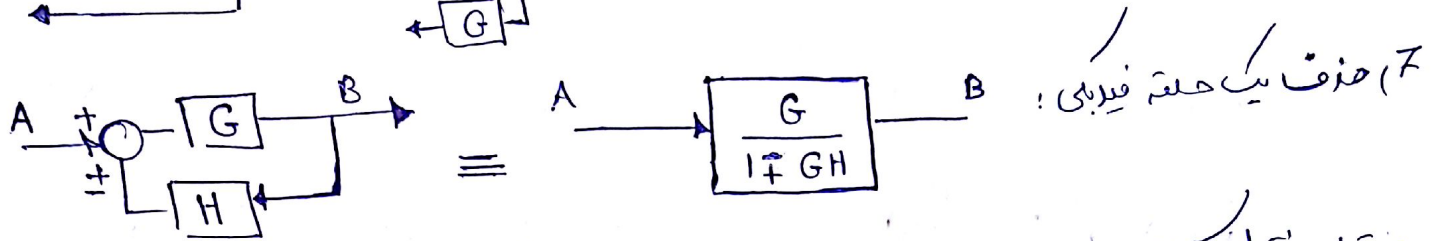
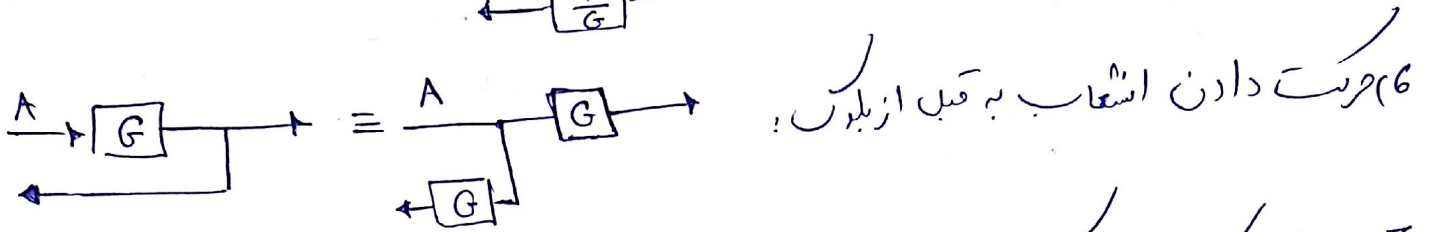
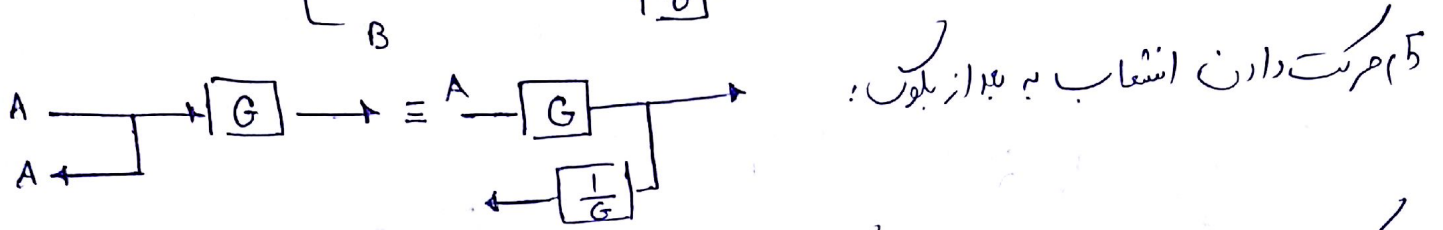
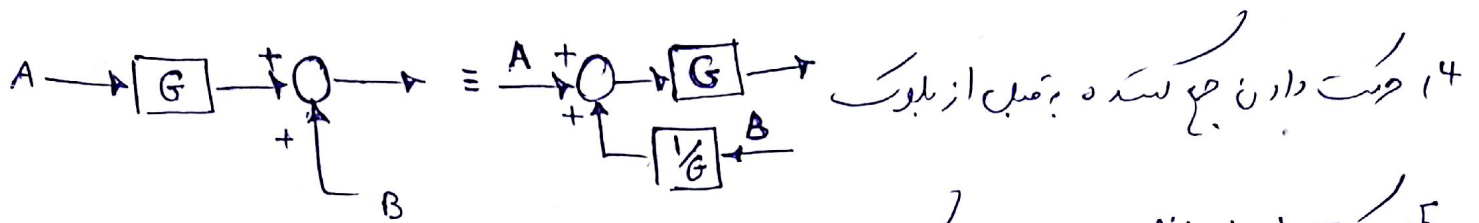
$$\Rightarrow 1 - H(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow H(s) = \frac{s}{s+1}$$

« قواعد معم در ساده سازی نمودار بلوک »

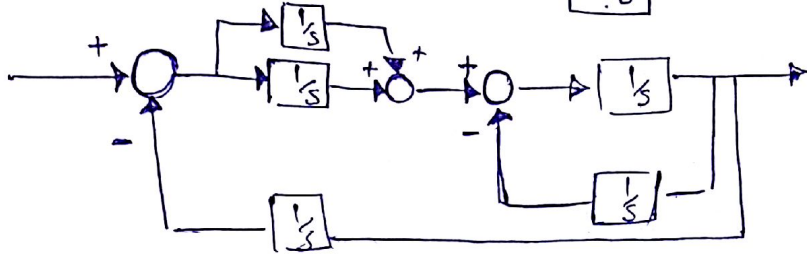
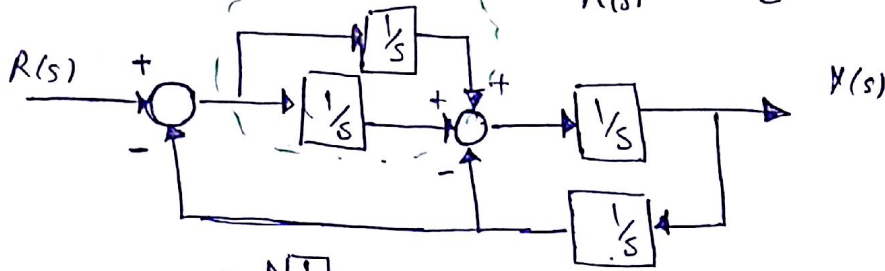
- 1- حاصل ضرب توابع تبدیل در مسیر بیرون باید بدون تغییر بماند.
- 2- حاصل ضرب توابع تبدیل حول حلقه با بیرون تغییر بماند.

با توجه به قواعد فوق داریم :

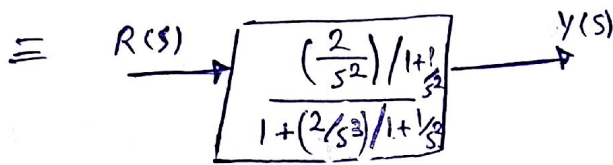
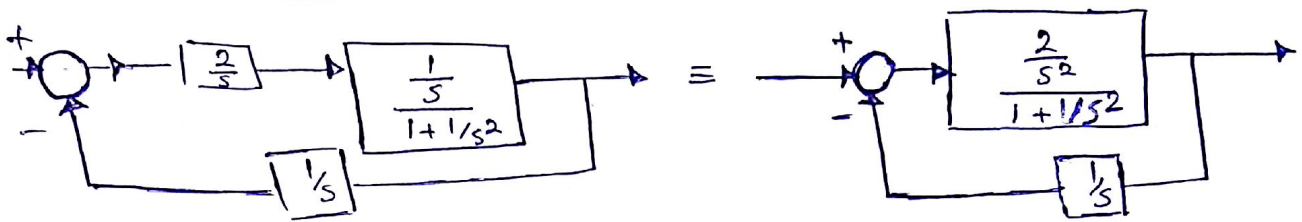




مثال ۱۱ نمودار بلوکی زیر را ساده سازی کرده تابع تبدیل $\frac{Y(s)}{R(s)}$ را بدست آورید.



حل داریم :



$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2/s^2}{1 + 1/s^2 + 2/s^3} = \frac{2s}{s^3 + s + 2}$$

5. نمودار کلاسیک سیستم :

برای سیستم های پیچیده نمودار بلوکی بسیار وقت گیر و مشکل است. از این رو فردی به نام سیون مولارهای کلاسیکال و فرمول قدرتمندی را پیشنهاد نمود که در آن تابع تبدیل و رابطه بین متغیرها را بدون نیاز به روش های گام به گام ساده سازی بلوکی و تنها در یک نام بدست آورد.

تعاریف مربوط به نمودار کلاسیکال :

- 1) **گره** : یک گره، متغیر سیستم را نشان می دهد که مقدار آن برابر با مجموع همه سیگنال های وارد شونده به آن است. سیگنال های خارج شونده از گره هیچ تأثیری روی مقدار متغیر گره ندارند.

- 2) **شافت** : یک شافت، پاره خطی جهت دار است که دو گره را به هم وصل می کند. سیگنال ها بر روی شافت ها و تنها در جهت پیکان های مشخص شده عبور می کنند.

- 3) **ضریب انتقال یا بهره** : ضریب انتقال سیگنال بین دو گره را بهره شافت نامند و موقع عبور سیگنال از یک شافت، مقدار سیگنال در بهره آن ضرب می شوند.

- 4) **گره ورودی** : گره ورودی آن است که فقط دارای شافت های خارج شونده باشد و دارای شافت وارد

نشونده نیست.

5) گره فردی یا جاده: گرهی که تنها دارای شاخه‌ها و شونده‌ها و هیچ شاخه خارج شونده از آن ندارد.

نقطه: گرهی که ورودی را می‌توان با اضافه نمودن یک شاخه اضافی با بهره یک به یک گره فردی تبدیل کرد
 آنگاه یک گره غیر ورودی را می‌توان با حذف عمل تبدیل به یک گره ورودی نمود.

6) مسیر (Path): مجموعه‌ای از چند شاخه نیست هر چه و پیوسته که در یک جهت طی می‌شوند و به طوری که عبور از یک گره بیش از یکبار نباشد.

7) مسیر بسته: مسیری که از یک گره ورودی آغاز می‌شود و به یک گره فردی یا این می‌پایزد و هر طول آن عبور از هر گره‌ای بیش از یک بار نباشد.

8) حلقه: مسیری است که از یک حلقه گره شروع و به همان گره خاتمه می‌یابد و در طول آن با هیچ گره‌ای بیش از یکبار برخورد نمی‌کند.

9) حلقه مجزا: حلقه‌هایی که هیچ گره مشترکی ندارند یا غیر تماسی یا مجزای می‌گویند.

10) بهره مسیر: حاصل ضرب بهره‌های موجود در شاخه‌هایی که در طی مسیر با آن‌ها برخورد می‌کنیم.

11) بهره مسیر بسته: حاصل ضرب بهره‌های موجود در شاخه‌هایی که در طی مسیر بیش از یک بار با آن‌ها برخورد می‌کنیم.

12) بهره حلقه: حاصل ضرب بهره‌های موجود در شاخه‌هایی که در طی حلقه با آن‌ها برخورد می‌کنیم.

13) خور حلقه: حلقه‌ای است که تنها شامل یک شاخه می‌باشد.

* با SFG می‌توان یک سیستم خطی با n معادله‌ی جبری را توصیف نمود. حلقه باید به نکات زیر توجه کرد.

1) جهت شاخه‌ها SFG یا ضرب در منفی تغییر نمی‌کند

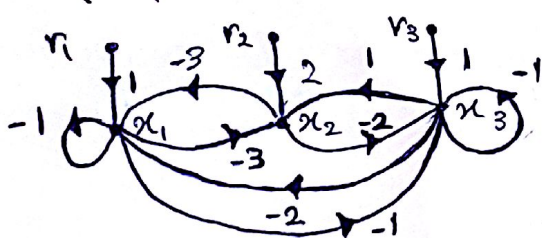
2) شاخه‌ای که از گره x_k به x_l کشیده می‌شود وابستگی x_l به x_k را نشان می‌دهد و برعکس آن همان

3) در حالت جبری $x_1 = \frac{1}{a_{12}} x_2 \Leftrightarrow a_{12} x_1 = x_2$ ولی در SFG $\frac{1}{a_{12}}$

مثال: نمودار گذر سیگنال دستگاه خطی زیر را رسم نمایید.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = r_1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2r_2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = r_3 \end{cases}$$

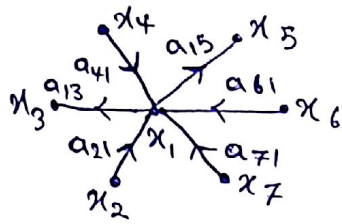
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 + r_1 \\ x_2 = -3x_1 + x_3 + 2r_2 \\ x_3 = -x_1 - 2x_2 - x_3 + r_3 \end{cases}$$



این نمایش لیک و متعصب به فرد نیست.

خیبر نمودار گذر سیگنال :

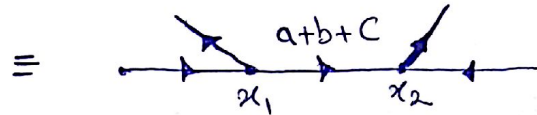
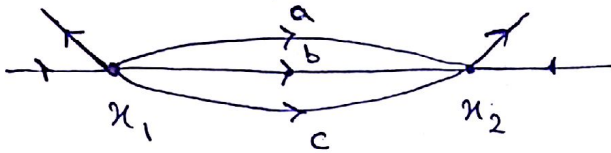
1) مقدار متغیری یک گره برابر است با مجموع همه سیگنال‌هایی که به گره وارد می‌شود.



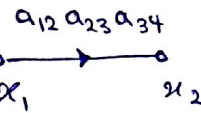
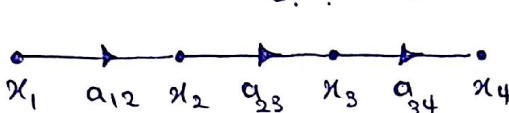
$$\Rightarrow x_1 = a_{21}x_2 + a_{41}x_4 + a_{61}x_6 + a_{71}x_7$$

2) به جان شاف‌ها موازن دهیم جهت که دو گره را متصل

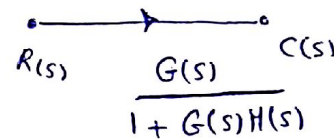
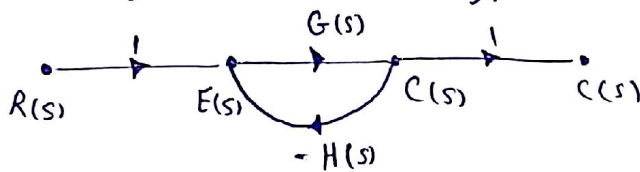
کنند می‌توان یک شاف با بهره برابر مجموع بهره‌ها موازن قرار داد.



3) به جان چند شاف‌سری و هم‌جهت می‌توان یک شاف با بهره‌ای برابر حاصل ضرب بهره‌ها موازن قرار داد.



4) یک حلقه فیدبک تنها می‌تواند به وسیله یک شاف تنها با بهره‌شان داده شده جایگزین کرد.



* فرمول بهره میسون :

رابطه بین یک متغیر ورودی و یک متغیر خروجی در یک نمودار گذر سیگنال به وسیله بهره بین گره‌های ورودی و خروجی تعیین می‌شود و به بهره کلی سیستم (تابع تبدیلی) معروف است. فرمول بهره میسون برای بدست آوردن بهره کلی سیستم به صورت زیر می‌باشد.

$$T = x_{out} / x_{in} = \sum_{k=1}^N P_k \Delta_k / \Delta$$

T: بهره کلی سیستم، x_{in} : متغیر گره ورودی، P_k : بهره مسیر پیشرو k ام بین گره ورودی و گره خروجی

N: تعداد کس مسیرهای پیشرو بین گره ورودی و گره خروجی

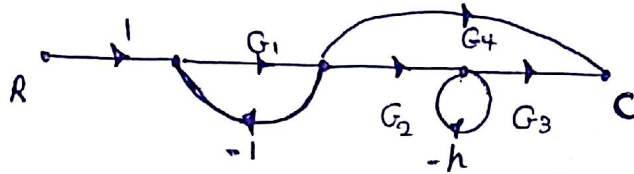
Δ_k : دترمینان نمودار گذر سیگنال است وقتی که مسیر پیشرو k ام حذف می‌شود.

$$\Delta = \text{دترمینان نمودار گذر سیگنال} = \begin{bmatrix} \text{مجموع حاصل ضرب بهره‌های هادی} \\ \text{بهره‌های هادی} \\ \text{ترکیب‌های ممکن} \\ \text{دو حلقه مجزا} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{مجموع حاصل ضرب بهره‌های} \\ \text{بهره‌های هادی ترکیبات} \\ \text{ممکن هر سه حلقه مجزا} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{مجموع بهره‌های} \\ \text{تک تک حلقه‌ها} \end{bmatrix} - 1$$

$$\Delta = 1 - \sum_m L_{m1} + \sum_m L_{m2} - \sum_m L_{m3} + \dots$$

L_{mr} : حاصل ضرب بهره m امین ترکیب ممکن از هر r حلقه مجزا

مثال، در گراف گذر سیگنال زیر تابع انتقال بین ورودی R و خروجی C چیست؟



$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + (1+h) G_1 G_4}{1+h+G_1+h G_1}$$

$$P_2 = G_1 G_4 \quad P_1 = G_1 G_2 G_3 \quad \Delta = 1+h+G_1+h G_1$$

$$\Delta_2 = 1+h \quad \Delta_1 = 1$$