امتحانات نیمسال اول ۹۷ – ۹۶		
نام درس: تجزیه و تحلیل سیگنال و سیستم	مدت زمان امتحان: ۱۲۰ دقیقه	مبنای نمره کل: ۱۰۰
مشخصه درس:	نام و نام‌خانوادگی دانشجو:	نمره فعالیت کلاسی:
نام و نام‌خانوادگی استاد: بهروز آدینه	شماره دانشجویی:	نمره میان‌ترم:
تاریخ امتحان: ۱۳۹۶/۱۰/۲۰	رشته تحصیلی و مقطع: کارشناسی ناپیوسته برق	نمره پایان نیمسال:
ساعت امتحان: ۱۰:۳۰	شماره صندلی:	نمره کل:
امتحان جزوه باز ☐ جزوه بسته ☑	دانشجو مجاز به استفاده از ماشین حساب می‌باشد ☑ نمی‌باشد ☐	

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد شهریار

سوال	نمره

در جدول زیر چیزی ننویسید.

سوال ۱	سوال ۲	سوال ۳	سوال ۴	سوال ۵	سوال ۶	جمع
۱۴	۱۶	۲۵	۱۴	۲۰	۱۱	۱۰۰

سوال ۱: دوره تناوب اصلی سیگنال‌های زیر را بیابید.

آ–

$$x[n] = e^{j\frac{\pi}{3}n} + e^{j\frac{\pi}{4}n}$$

حل:

$$N_1 = m\frac{2\pi}{\omega} = m\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6m \xrightarrow{m=1} N_1 = 6$$

$$N_2 = m\frac{2\pi}{\omega} = m\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8m \xrightarrow{m=1} N_2 = 8 \Rightarrow N = 24$$

ب–

$$x(t) = \sin(4t + \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{2}{5}t)$$

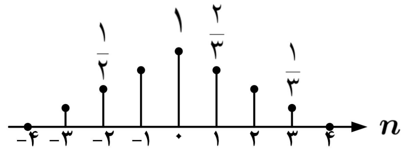
حل:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{2}{5}} = 5\pi \Rightarrow T = 10\pi$$

سوال ۲: مطلوبست $x[2n]$ و $x[\frac{1}{2}n]$، اگر $x[n]$ به صورت شکل زیر باشد.

$\boldsymbol{x[n]}$



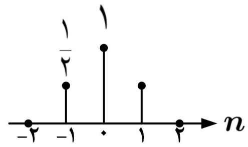
حل: تعریف می‌کنیم: $y[n] = x[2n]$ در این صورت داریم:

سوال	نمره

$$y[-۲]=x[-۴]=۰ \quad y[-۱]=x[-۲]=\frac{۱}{۲} \quad y[۰]=x[۰]=۱$$
$$y[۱]=x[۲]=\frac{۱}{۲} \quad y[۲]=x[۴]=۰$$

بنابراین دنباله $y[n]=x[۲n]$ بصورت شکل زیر است (مقادیر موجود در nهای فرد حذف شده‌اند).

$\boldsymbol{x[۲n]}$

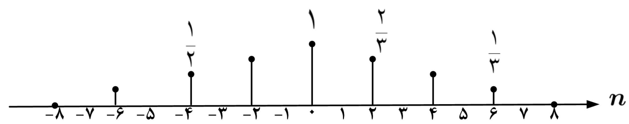


برای قسمت بعد تعریف می‌کنیم: $y[n]=x[\frac{۱}{۲}n]$ بنابراین، مشاهده می‌شود که به ازای nهای فرد $y[n]$ تعریف نشده است و به ازا nهای زوج داریم:

$$y[-۸]=x[-۴]=۰ \qquad y[-۶]=x[-۳]=\frac{۱}{۳} \quad y[-۴]=x[-۲]=\frac{۱}{۲}$$
$$y[-۲]=x[-۱]=\frac{۲}{۳} \qquad y[۰]=x[۰]=۰ \quad y[۲]=x[۱]=\frac{۲}{۳}$$
$$y[۴]=x[۲]=\frac{۱}{۲} \qquad y[۶]=x[۳]=\frac{۱}{۳} \quad y[۸]=x[۴]=۰$$

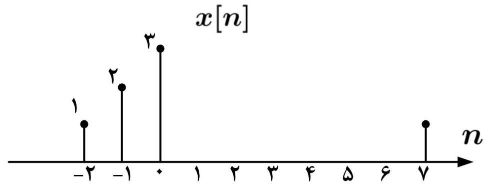
بنابراین شکل این دنباله مشابه شکل زیر خواهد شد با این تفاوت که مقادیر n باید هر یک دو برابر شوند و در نقاطی که در آنجا n فرد است دنباله تعریف نشده است.

$\boldsymbol{x[\frac{۱}{۲}n]}$



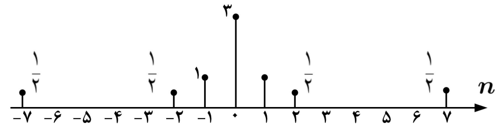
سوال ۳: بخش‌های زوج و فرد سیگنال نشان داده شده در شکل زیر را تعیین و رسم کنید. ترسیم‌های خود را به دقت مدرج کنید.

$\boldsymbol{x[n]}$

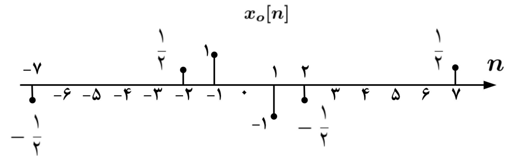


$$x[n]=\delta[n+۲]+۲\delta[n+۱]+۳\delta[n]+\delta[n-۷]$$
$$x[-n]=\delta[n-۲]+۲\delta[n-۱]+۳\delta[n]+\delta[n+۷]$$
$$x_e[n]=\frac{۱}{۲}\{x[n]+x[-n]\}=\frac{۱}{۲}\delta[n+۲]+\delta[n+۱]+۳\delta[n]+\frac{۱}{۲}\delta[n-۷]+\frac{۱}{۲}\delta[n-۲]+\delta[n-۱]+\frac{۱}{۲}\delta[n+۷]$$
$$x_o[n]=\frac{۱}{۲}\{x[n]-x[-n]\}=\frac{۱}{۲}\delta[n+۲]+\delta[n+۱]+\frac{۱}{۲}\delta[n-۷]-\frac{۱}{۲}\delta[n-۲]-\delta[n-۱]-\frac{۱}{۲}\delta[n+۷]$$

$\boldsymbol{x_e[n]}$



$x_o[n]$



نمره	سوال

سوال ۴: مقدار انرژی و توان سیگنال‌های زیر را بدست آورید.

آ- $x_1(t) = 2e^{-t}u(t), \quad \alpha > 0$

حل:

$$E_\infty = \int_0^{+\infty} |2e^{-t}u(t)|^2 dt = 2^2 \int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{4}{-2}[0-1] = 2$$
$$P_\infty = 0$$

ب- $x_2(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

حل:

$$P_\infty = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |A\cos(\omega_0 t+\theta)|^2 dt = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{T}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t+\theta)]dt = \frac{A^2}{2}$$
$$E_\infty = \infty$$

ج- $x_3(t) = \begin{cases} 2 & t < -10 \\ 4 & -10 < t \leqslant 10 \\ 6 & t \geqslant 10 \end{cases}$

حل:

$$P_\infty = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{-10} 4dt + \frac{-10}{10}16dt + \frac{10}{T}36dt\right) = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{4(-10+T)+16(10+10)+36(T-10)}{2T}$$
$$= \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{40T+160}{2T} = 20, \quad E_\infty = \infty$$

سوال ۵: سیستم‌های زیر را از لحاظ خواص خطی بودن، متغیر با زمان بودن، پایداری، حافظه‌دار بودن و علیت مورد بررسی قرار دهید.

آ- $y[n] = x[n]x[n-1]$

ب- $y(t) = \cos(t)x(t)$

حل:

آ- بررسی خطی بودن:

$$\begin{aligned} y[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] &= (a_1x_1[n] + a_2x_2[n])(a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1]) \\ &= a_1(x_1[n]x_1[n-1]) + a_2(x_2[n]x_2[n-1]) + a_1a_2(x_1[n]x_2[n-1]) \\ &+ a_1a_2(x_2[n]x_1[n-1]) \end{aligned}$$

اما می‌دانیم که شرط خطی بودن عبارتست از اینکه عبارت فوق باید مساوی عبارت زیر باشد:

$$a_1y_1[n] + a_2y_2[n] = a_1(x_1[n]x_1[n-1]) + a_2(x_2[n]x_2[n-1])$$

پس این سیستم غیرخطی است. بررسی نامتغیر با زمان بودن:

$$y_2[n] = x[n-n_0]x[n-n_0-1] = y_1[n-n_0]$$

پس سیستم نامتغیر با زمان است. از لحاظ پایداری، از شکل ضابطه می‌فهمیم که تا هنگامی که ورودی محدود است، خروجی نمی‌تواند به طور نامحدود بزرگ شود، پس سیستم پایدار است. سیستم دارای حافظه است. چون در هر لحظه حاوی اطلاعاتی از ورودی لحظه قبل است. سیستم علی است، چون قبل از اعمال ورودی، خروجی نمی‌تواند ظاهر شود.

ب- بررسی خطی بودن سیستم

$$\begin{aligned} y(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) &= \sin(6t)(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)) = a_1\sin(6t)x_1(t) + a_2\sin(6t)x_2(t) \\ &= a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \end{aligned}$$

پس خطی است. بررسی تغییرپذیری با زمان: $y(t-t_0) = \sin(6(t-t_0))x(t-t_0) \neq \sin(6t)x(t-t_0)$ پس سیستم تغییرپذیر با زمان است. سیستم دارای حافظه نیست و پایدار و علی می‌باشد.

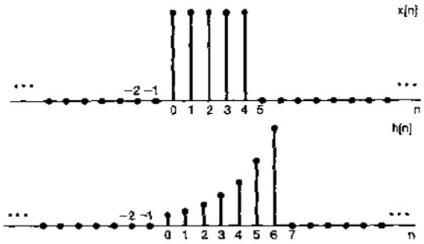
نمره	سوال

سوال ۶: دو دنباله زیر را در نظر بگیرید. $x[n]$ ورودی سیستم و $h[n]$ پاسخ ضربه آن است. پاسخ خروجی سیستم به ورودی $x[n]$ را بیابید. (رسم شکل‌ها الزامی است.)

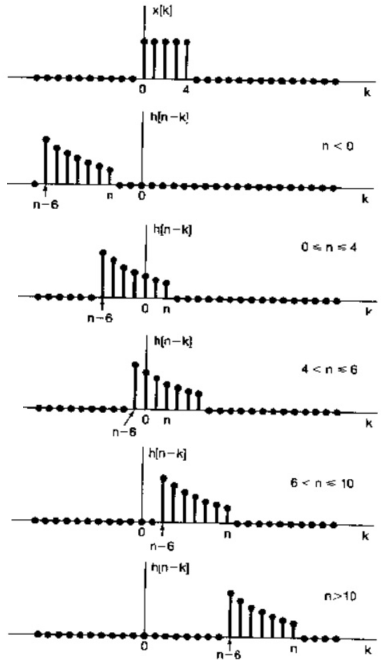
$$x[n] = \begin{cases} ۱ & ۰ \leqslant n \leqslant ۴ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & ۰ \leqslant n \leqslant ۶ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



به منظور محاسبه کانولوشن دو سیگنال مناسب است که پنج بازه مجزا برای n در نظر گرفته شود.



بازه اول: به ازای $n < ۰$، بین قسمت‌های غیر صفر $x[k]$ و $h[n-k]$ هیچ همپوشانی‌ای وجود ندارد و در نتیجه $y[n] = ۰$ است.
بازه دوم: به ازای $۰ \leqslant n \leqslant ۴$،

$$x[n]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & ۰ \leqslant k \leqslant n \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین در این بازه داریم؛

$$y[n] = \sum_{k=۰}^{n} \alpha^{n-k}$$

این مجموع را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$y[n] = \sum_{r=۰}^{n} \alpha^{r} = \frac{۱-\alpha^{n+۱}}{۱-\alpha}$$

سوال	نمره

بازه سوم: به ازای $n > ۴$ و $۰ \leqslant n - ۶$ (یعنی $۴ < n \leqslant ۶$) داریم:

$$x[n]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & ۰ \leqslant k \leqslant ۴ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین در این بازه داریم:

$$y[n] = \sum_{k=۰}^{۴} \alpha^{n-k} \tag{۱}$$

خواهیم داشت:

$$y[n] = \alpha^{n} \sum_{k=۰}^{۴} (\alpha^{-۱})^{k} = \alpha^{n} \frac{۱-(\alpha^{-۱})^{۵}}{۱-\alpha^{-۱}} = \frac{\alpha^{n-۴}-\alpha^{n+۱}}{۱-\alpha} \tag{۲}$$

بازه چهارم: به ازای $n > ۶$ و $n - ۶ \leqslant ۴$ (یعنی، برای $۶ < n \leqslant ۱۰$)، داریم:

$$x[n]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k} & n-۶ \leqslant k \leqslant ۴ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چنان که:

$$y[n] = \sum_{k=n-۶}^{۴} \alpha^{n-k}$$

برای محاسبه این مجموع خواهیم داشت:

$$y[n] = \sum_{r=۰}^{۱۰-n} \alpha^{۶-r} = \alpha^{۶} \sum_{r=۰}^{۱۰-n} (\alpha^{-۱})^{r} = \alpha^{۶} \frac{۱-\alpha^{n-۱۱}}{۱-\alpha^{-۱}} = \frac{\alpha^{n-۴}-\alpha^{۷}}{۱-\alpha}$$

بازه پنجم: به ازای $n - ۶ > ۴$، یا به طور معادل $n > ۱۰$، بین قسمت‌های غیر صفر $x[k]$ و $h[n-k]$ هیچ همپوشانی‌ای وجود ندارد و از این رو داریم: $y[n] = ۰$.
پس بطور خلاصه داریم:

$$y[n] = \begin{cases} ۰ & n < ۰ \\ \dfrac{۱-\alpha^{n+۱}}{۱-\alpha} & ۰ \leqslant n \leqslant ۴ \\ \dfrac{\alpha^{n-۴}-\alpha^{n+۱}}{۱-\alpha} & ۴ < n \leqslant ۶ \\ \dfrac{\alpha^{n-۴}-\alpha^{۷}}{۱-\alpha} & ۶ < n \leqslant ۱۰ \\ ۰ & n > ۱۰ \end{cases}$$

که در شکل زیر رسم شده است.