به نام آنکه هستی نام ازو یافت فلک جنبش، زمین آرام ازو یافت

نظامی

یاداشت جلسه‌ی چهارم

ترکیبیات و استقرا:

صفر) نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف_ $\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+...+\frac{۱}{n^۲}\leq\frac{۳}{۴}$

ب_ $\frac{۱^۲}{۲^۲}+\frac{۳^۲}{۳^۲}+...+\frac{(۲n-۱)^۲}{n^۲}\leq\frac{۱}{۳n}$

ج_ $\frac{۱}{۲\sqrt{۱}}+\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}+...+\frac{۱}{(n+۱)\sqrt{n}}\leq۲$

یک) ثابت کنید می‌توان هر عدد طبیعی مثل N را به صورت مجموع اعداد فیبوناتچی متفاوت نوشت.

دو) ثابت کنید عدد ۱۱۱...۱۱۱ (۲۴۳ تا ۱) بر ۲۴۳ بخش‌پذیر است.

سه) یک جدول $۲^n\times۲^n$ در نظر بگیرید که یک گوشه‌ی آن حذف شده، ثابت کنید می‌توان با کاشی‌های L ـ شکل (با سه خانه) جدول مذکور را پوشاند.

چهار) ثابت کنید مسئله‌ی برج هانوی به ازای همه‌ی n های طبیعی حل می‌شود و کمترین تعداد حرکت مورد نیاز را برحسب n محاسبه کنید.

پنج) n ماشین دور دایره داریم! در باک ماشین i ـ ام، a_i لیتر بنزین وجود دارد به طوری که مجموع بنزین همه‌ی ماشین‌ها برای یک بار دور دایره زدن کافی است. ثابت کنید ماشینی وجود دارد که با شروع از آن و برداشتن سوخت دیگر ماشین‌ها در طول مسیر یک بار دور دایره را زد.

شش) n نقطه روی دایره وجود دارد، تمام وترهای بین آن‌ها کشیده شده است، درون دایره حداکثر چند ناحیه خواهد شد؟

هفت) یک مربع داریم که با قیچی به n مربع تقسیم شده، n چه اعدادی می‌تواند باشد ؟

هشت) پرنده‌ی رنگارنگ، می‌تواند به k رنگ مختلف دربیاید. پرنده هر روز یک رنگ دارد و نمی‌تواند در دو روز متوالی یک‌رنگ باشد! همچنین می‌دانیم اگر دنباله‌ای از رنگ‌های پرنده در طول زندگی‌اش مثل $a_۱,a_۲,...,a_n$ داشته باشیم، هیچ $i<j<k<w$ ایی وجود ندارد به طوری که $a_i=a_k$ و $a_j=a_w$ باشد. پرنده حداکثر چند روز عمر می‌کند؟