فصل ۲

سینماتیک در یک بُعد

۲-۱) دونده‌ی ماراتن، مسافت mi ۲۶ (تقریبا km ۴۲) را در ۲ ساعت و ۹ دقیقه می‌دود. سرعت متوسط او را بر حسب مایل بر ساعت و متر بر ثانیه به دست آورید. به طور متوسط، یک مایل را در چند دقیقه می‌دود؟

حل:

$$t' = ۹ \ \text{min} \Rightarrow t' = ۹ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t' = ۰/۱۵ \ \ h$$

t زمان کل حرکت:

$$t = ۲ + ۰/۱۵ \Rightarrow t = ۲/۱۵ \ \ h$$

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب مایل بر ساعت:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \overline{v} = \frac{۲۶}{۲/۱۵} \Rightarrow \overline{v} = ۱۲/۱ \ \ \frac{mi}{h}$$

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب متر بر ثانیه:

$$\overline{v} = ۱۲/۱ \ \ \frac{mi}{h} \Rightarrow \overline{v} = ۱۲/۱ \times \frac{۱۶۰۹}{۳۶۰۰} \Rightarrow \overline{v} = ۵/۴۱ \ \ \frac{m}{s}$$

Δt زمان لازم برای طی مسافت یک مایل:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۱۲/۱ = \frac{۱}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{۱}{۱۲/۱} \Rightarrow \Delta t = ۰/۰۸۳ \ \ h$$

$$\Delta t = ۰/۰۸۳ \ \ h \Rightarrow \Delta t = ۰/۰۸۳ \times ۶۰ \Rightarrow \Delta t = ۴/۹۶ \ \ \text{min}$$

۲-۲) قهرمان دوی سرعت، مسافت m ۱۰۰ را در مدت s ۹/۸۵ می‌دود. سرعت متوسط او را بر حسب کیلومتر بر ساعت و مایل بر ساعت به دست آورید.

حل:

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب متر بر ثانیه:

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \overline{v}=\frac{۱۰۰}{۹/۸۵}\Rightarrow \overline{v}=۱۰/۲\ \frac{m}{s}$$

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب کیلومتر بر ساعت:

$$\overline{v}=۱۰/۲\ \frac{m}{s}\Rightarrow \overline{v}=۱۰/۲\times\frac{\frac{۱}{۱۰۰۰}}{\frac{۱}{۳۶۰۰}}\Rightarrow \overline{v}=۳۶/۷\ \frac{km}{h}$$

$\overline{v}$ سرعت متوسط دونده بر حسب مایل بر ساعت:

$$\overline{v}=۳۶/۷\ \frac{km}{h}\Rightarrow \overline{v}=۳۶/۷\times\frac{۱}{۱/۶۰۹}\Rightarrow \overline{v}=۲۲/۸\ \frac{mi}{h}$$

۲-۳) راننده‌ای برای صرفه‌جویی در مصرف سوخت، مسافت mi ۱۲۸ را با سرعت $\frac{mi}{h}$ ۵۵ می‌پیماید. اگر این راننده با سرعت $\frac{mi}{h}$ ۶۴ حرکت می‌کرد چند دقیقه، زودتر به مقصد می‌رسید؟

حل:

$t_۱$ مدت زمان لازم برای حرکت با سرعت $\frac{km}{h}$ ۵۵:

$$x=vt_۱\Rightarrow ۱۲۸=۵۵t_۱\Rightarrow t_۱=۲/۳۳\ h$$

$t_۲$ مدت زمان لازم برای حرکت با سرعت $\frac{km}{h}$ ۶۴:

$$x=vt_۲\Rightarrow ۱۲۸=۶۴t_۲\Rightarrow t_۲=۲\ h$$

Δt مدت زمانی که زودتر می‌رسد:

$$\Delta t=t_۱-t_۲\Rightarrow \Delta t=۲/۳۳-۲\Rightarrow \Delta t=۰/۳۳\ h$$
$$\Delta t=۰/۳۳\ h\Rightarrow \Delta t=۰/۳۳\times۶۰\Rightarrow \Delta t=۱۹/۸\ \min$$

۲-۴) در مساله‌ی ۲-۳ فرض کنید راننده، دو بار توقف می‌کند. یک بار به مدت min ۱۸ برای صرف غذا و بار دیگر به مدت min ۵ برای بنزین زدن می‌ایستد. سرعت متوسط او را طوری به دست آورید تا کل زمان حرکت او برابر زمان حرکت با سرعت $\frac{mi}{h}$ ۵۵ (بدون توقف) باشد.

حل:

t' کل زمان توقف‌های اتومبیل:

$t' = ۱۸ + ۵ \Rightarrow t' = ۲۳ \ \ \min \Rightarrow t' = ۲۳ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t' = ۰/۳۸ \ \ h$

$t_۱$ زمان کل حرکت و t زمان کل حرکت بدون توقف است. با استفاده از مساله‌ی ۲-۳ می‌توان نوشت:

$t_۱ = t' + t \Rightarrow ۲/۳۳ = ۰/۳۸ + t \Rightarrow t = ۲/۳۳ - ۰/۳۸ \Rightarrow t = ۱/۹۵ \ \ h$

$x = vt \Rightarrow ۱۲۸ = v \times ۱/۹۵ \Rightarrow v = ۶۵/۶۴ \ \ \frac{mi}{h}$

۲-۵) راننده‌ای با سرعت $۱۰۰ \ \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند. به مدت $۱ \ s$ به آینه، نگاه می‌کند. در این مدت، اتومبیل چه مسافتی را طی کرده است؟

حل:

$v = ۱۰۰ \ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۱۰۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۲۷/۸ \ \ \frac{m}{s}$

x مسافت طی شده در مدت نگاه راننده به آینه با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$x = vt \Rightarrow x = ۲۷/۸ \times ۱ \Rightarrow x = ۲۷/۸ \ \ m$

۲-۶) در آگهی تبلیغاتی اتومبیل مسابقه‌ای، ادعا شده است این اتومبیل می‌تواند در مدت $۶/۸۵ \ s$ به سرعت $۹۰ \ \frac{km}{h}$ برسد. شتاب متوسط اتومبیل را به دست آورید. شتاب اتومبیل چند برابر شتاب گرانش زمین است؟ (شتاب گرانش زمین $g = ۹/۸ \ \frac{m}{s^۲}$ فرض شود.)

حل:

$v = ۹۰ \ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۹۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۲۵ \ \ \frac{m}{s}$

$\overline{a}$ شتاب متوسط با استفاده از تعریف شتاب متوسط به دست می‌آید:

$\overline{a} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow \overline{a} = \frac{۲۵ - ۰}{۶/۸۵ - ۰} \Rightarrow \overline{a} = ۳/۶۵ \ \ \frac{m}{s^۲}$

نسبت شتاب متوسط به شتاب گرانش زمین:

$\frac{\overline{a}}{g} = \frac{۳/۶۵}{۹/۸} \Rightarrow \frac{\overline{a}}{g} = ۰/۳۷ \Rightarrow \overline{a} = ۰/۳۷ g$

۲-۷) $۳۰ \ s$ پس از پرتاب فضاپیمایی، سرعتش به $۱۲۰۰ \ \frac{km}{h}$ می‌رسد. شتاب متوسط فضاپیما را به دست آورید. شتاب فضاپیما چند برابر شتاب گرانش زمین است؟ (شتاب گرانش زمین $۹/۸ \ \frac{m}{s^۲}$)

حل

$v = ۱۲۰۰ \ \ \frac{km}{h} \Rightarrow v = ۱۲۰۰ \times \frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰} \Rightarrow v = ۳۳۳/۳ \ \ \frac{m}{s}$

$\bar{a}$ شتاب متوسط با استفاده از تعریف شتاب متوسط به دست می‌آید:

$$\bar{a}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow \bar{a}=\frac{۳۳۳/۳-۰}{۳۰-۰}\Rightarrow \bar{a}=۱۱/۱\ \frac{m}{s^۲}$$

نسبت شتاب متوسط به شتاب گرانش زمین:

$$\frac{\bar{a}}{g}=\frac{۱۱/۱}{۹/۸}\Rightarrow \frac{\bar{a}}{g}=۱/۱۳\Rightarrow \bar{a}=۱/۱۳g$$

۲-۸) راننده‌ای برای طی مسافت $۴۸۴\ mi$ ابتدا $۱/۷۵\ h$ با سرعت $۶۰\ \frac{mi}{h}$ حرکت می‌کند سپس به مدت $۲۰\ \min$ توقف می‌کند. پس از آن $۳/۲۰\ h$ با سرعت $۶۲/۵\ \frac{mi}{h}$ حرکت می‌کند سپس $۴۵\ \min$ توقف می‌کند. دوباره به راه می‌افتد و مسافت $۱۰۸\ mi$ را با سرعت $۶۵\ \frac{mi}{h}$ می‌پیماید سپس $۱۵\ \min$ توقف می‌کند. اگر مسافت باقی‌مانده را با سرعت متوسط $۶۰\ \frac{mi}{h}$ طی کند کل زمان مسافرت او را به دست آورید. سرعت متوسط او را در این سفر به دست آورید.

حل:

$$x_۱=v_۱t_۱\Rightarrow x_۱=۶۰\times ۱/۷۵\Rightarrow x_۱=۱۰۵\ mi$$

$$t'_۱=۲۰\ \min\Rightarrow t'_۱=۲۰\times\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow t'_۱=۰/۳۳\ h$$

$$x_۲=v_۲t_۲\Rightarrow x_۲=۶۲/۵\times ۳/۲\Rightarrow x_۲=۲۰۰\ mi$$

$$t'_۲=۴۵\ \min\Rightarrow t'_۲=۴۵\times\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow t'_۲=۰/۷۵\ h$$

$$x_۳=v_۳t_۳\Rightarrow ۱۰۸=۶۵t_۳\Rightarrow t_۳=۱/۶۶\ h$$

$$t'_۳=۱۵\ \min\Rightarrow t'_۳=۱۵\times\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow t'_۳=۰/۲۵\ h$$

$x=۴۸۴\ mi$ کل مسافت طی شده:

$$x=x_۱+x_۲+x_۳+x_۴\Rightarrow ۴۸۴=۱۰۵+۲۰۰+۱۰۸+x_۴\Rightarrow ۴۸۴=۴۱۳+x_۴\Rightarrow x_۴=۷۱\ mi$$

$$x_۴=v_۴t_۴\Rightarrow ۷۱=۶۰t_۴\Rightarrow t_۴=۱/۱۸\ h$$

t زمان کل حرکت:

$$t=t_۱+t'_۱+t_۲+t'_۲+t_۳+t'_۳+t_۴\Rightarrow t=۱/۷۵+۰/۳۳+۳/۲+۰/۷۵+۱/۶۶+۰/۲۵+۱/۱۸\Rightarrow$$
$$t=۹/۱۲\ h$$

$\bar{v}$ سرعت متوسط در طی سفر:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow \bar{v}=\frac{۴۸۴}{۹/۱۲}\Rightarrow \bar{v}=۵۳/۱\ \frac{mi}{h}$$

۲-۹) شخصی از شهر A به شهر B رانندگی می‌کند. $۷۵\ \min$ با سرعت $۹۰\ \frac{km}{h}$ حرکت می‌کند سپس

min ۱۵ توقف می‌کند. پس از آن min ۴۵ با سرعت $\frac{km}{h}$ ۷۵ به سفر خود، ادامه می‌دهد. سپس h ۲/۲۵ با سرعت $\frac{km}{h}$ ۱۰۵ حرکت می‌کند تا به مقصد برسد. فاصله‌ی شهرهای A و B را به دست آورید. سرعت متوسط اتومبیل را در این سفر به دست آورید.

حل:

$$t_1 = ۷۵ \ \ min \Rightarrow t_1 = ۷۵ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t_1 = ۱/۲۵ \ \ h$$

$$x_1 = v_1 t_1 \Rightarrow x_1 = ۹۰ \times ۱/۲۵ \Rightarrow x_1 = ۱۱۲/۵ \ \ km$$

$$t_1' = ۱۵ \ \ min \Rightarrow t_1' = ۱۵ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t' = ۰/۲۵ \ \ h$$

$$t_2 = ۴۵ \ \ min \Rightarrow t_2 = ۴۵ \times \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow t_2 = ۰/۷۵ \ \ h$$

$$x_2 = v_2 t_2 \Rightarrow x_2 = ۷۵ \times ۰/۷۵ \Rightarrow x_2 = ۵۶/۲۵ \ \ km$$

$$x_3 = v_3 t_3 \Rightarrow x_3 = ۱۰۵ \times ۲/۲۵ \Rightarrow x_3 = ۲۳۶/۲۵ \ \ km$$

x فاصله‌ی دو شهر A و B:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow x = ۱۱۲/۵ + ۵۶/۲۵ + ۲۳۶/۲۵ \Rightarrow x = ۴۰۵ \ \ km$$

t کل زمان حرکت:

$$t = t_1 + t_1' + t_2 + t_3 \Rightarrow t = ۱/۲۵ + ۰/۲۵ + ۰/۷۵ + ۲/۲۵ \Rightarrow t = ۴/۵ \ \ h$$

$\bar{v}$ سرعت متوسط در کل سفر:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{۴۰۵}{۴/۵} \Rightarrow \bar{v} = ۹۰ \ \ \frac{km}{h}$$

t' کل زمان رانندگی:

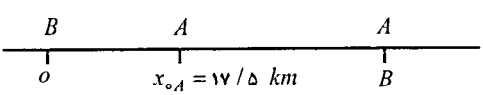
$$t' = t_1 + t_2 + t_3 = ۱/۲۵ + ۰/۷۵ + ۲/۲۵ \Rightarrow t' = ۴/۲۵ \ \ h$$

$\bar{v}'$ سرعت متوسط، هنگام رانندگی:

$$\bar{v}' = \frac{\Delta x}{\Delta t'} \Rightarrow \bar{v}' = \frac{۴۰۵}{۴/۲۵} \Rightarrow \bar{v}' = ۹۵/۳ \ \ \frac{km}{h}$$

۲-۱۰) دوچرخه‌سوار A با سرعت ثابت $\frac{km}{h}$ ۲۵ و دوچرخه‌سوار B با سرعت ثابت $\frac{km}{h}$ ۳۲ حرکت می‌کنند. سر ظهر، A به اندازه‌ی km ۱۷/۵ از B جلوتر است. پس از چه مدت B از A، سبقت می‌گیرد؟ در این مدت، دوچرخه سواران از محلی که ظهر در آن‌جا بودند چه قدر دور شده‌اند؟

حل: معادلات مکان ـ زمان دوچرخه‌سواران با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:



$$x = vt + x_o \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t + x_{oA} \\ x_B = v_B t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۲۵t + ۱۷/۵ \\ x_B = ۳۲t \end{cases}$$

وقتی دوچرخه‌سوار B به دوچرخه‌سوار A می‌رسد:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲۵t + ۱۷/۵ = ۳۲t \Rightarrow ۳۲t - ۲۵t = ۱۷/۵ \Rightarrow ۷t = ۱۷/۵ \Rightarrow t = ۲/۵ \ h$$

Δx_A جابجایی دوچرخه‌سوار A از محلی که ظهر در آن‌جا بود:

$$\Delta x_A = x_A - x_{۰A} \Rightarrow \Delta x_A = ۲۵ \times ۲/۵ + ۱۷/۵ - ۱۷/۵ \Rightarrow \Delta x_A = ۶۲/۵ \ km$$

Δx_B جابجایی دوچرخه‌سوار B از محلی که ظهر در آن‌جا بود:

$$\Delta x_B = x_B - x_{۰B} \Rightarrow \Delta x_B = ۳۲ \times ۲/۵ - ۰ \Rightarrow \Delta x_B = ۸۰ \ km$$

۲-۱۱) دو دانش‌آموز قهرمان دوی صحرانوردی، یکی با سرعت ثابت $۵/۲ \frac{m}{s}$ و دیگری با سرعت ثابت $۴/۵ \frac{m}{s}$ می‌دود. این دو دانش‌آموز در مسابقه‌ی دو به مسافت $۱/۶ \ km$ شرکت می‌کنند. دانش‌آموز سریع، وقتی شروع به دویدن می‌کند که دیگری از یک نقطه‌ی مشخص مسیر، عبور کند. این نقطه در چه فاصله‌ای از خط شروع مسابقه باشد تا هر دو دونده با هم به خط پایان برسند؟

حل:

$$x = ۱/۶ \ km \Rightarrow x = ۱/۶ \times ۱۰۰۰ \Rightarrow x = ۱۶۰۰ \ m$$

t زمان دویدن دانش‌آموز سریع با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

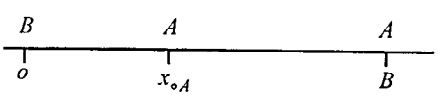
$$x = vt \Rightarrow ۱۶۰۰ = ۵/۲t \Rightarrow t = ۳۰۷/۷ \ s$$

$x_۰$ فاصله‌ی دانش‌آموز دیگر از دانش‌آموز سریع با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow ۱۶۰۰ = ۴/۵ \times ۳۰۷/۷ + x_۰ \Rightarrow ۱۶۰۰ = ۱۳۸۵ + x_۰ \Rightarrow x_۰ = ۲۱۵ \ m$$

۲-۱۲) دو دانش‌آموز در مسیری می‌دوند. دانش‌آموز A با سرعت ثابت $۴ \frac{m}{s}$ می‌دود و دانش‌آموز B سریع‌تر از A می‌دود. دانش‌آموز B، $۶ \ s$ پس از A شروع به دویدن می‌کند و پس از $۲۰ \ s$ به او می‌رسد. سرعت دانش‌آموز B را به دست آورید. قبل از این که به هم برسند چه مسافتی را می‌دوند؟

حل: $x_{۰A}$ مسافتی که دانش‌آموز A در مدت $۶ \ s$ می‌دود با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به دست می‌آید:



$$x = vt \Rightarrow x_{۰A} = ۴ \times ۶ \Rightarrow x_{۰A} = ۲۴ \ m$$

معادلات مکان ـ زمان دانش‌آموزان با استفاده از رابطه‌ی حرکت با سرعت ثابت به صورت زیر است:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_A = v_A t + x_{۰A} \\ x_B = v_B t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۴۰ \times ۲۰ + ۲۴ \\ x_B = v_B \times ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = ۱۰۴ \ m \\ x_B = ۲۰ v_B \end{cases}$$

وقتی دانش‌آموز B به دانش‌آموز A می‌رسد:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲۰ v_A = ۱۰۴ \Rightarrow v_A = ۵/۲ \ \frac{m}{s}$$

Δx_A جابه‌جایی دانش‌آموز A از وقتی که دانش‌آموز B شروع به حرکت می‌کند:

$$\Delta x_A = ۴ \times ۲۰ + ۲۴ \Rightarrow x_A = ۱۰۴ \ m$$