

## دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

### آزمون نهایی نظری دوم

پنج‌شنبه ۱۹ شهریور ۱۳۹۴

وقت: ۴ ساعت و ۴۵ دقیقه

#### مسئله‌ی یکم. جدول تنتنی! ..... امتیاز ۳۵

پس از بازی جدول منهتی<sup>۱</sup>، فرهاد و علی رضا تصمیم گرفتند بازی جدول تنتنی را انجام دهند. آن‌ها در این بازی یک جدول  $m \times n$  دارند ( $m, n > 2$ ) و روی آن بازی می‌کنند. خانه‌ی واقع در سطر  $i$ -ام و ستون  $j$ -ام جدول را با  $(i, j)$  نشان می‌دهیم. فاصله‌ی دو خانه‌ی  $(r_1, c_1)$  و  $(r_2, c_2)$  را، برابر  $|r_1 - r_2| + |c_1 - c_2|$  تعریف می‌کنیم. برای مثال، در جدول زیر، فاصله‌ی دو خانه‌ی مشخص شده، برابر ۵ است:


فرهاد  $k$  خانه‌ی  $a_1, a_2, \dots, a_k$  از جدول را انتخاب می‌کند و به علی رضا می‌گوید؛ سپس علی رضا یک خانه از جدول مانند  $X$  را انتخاب می‌کند. فرض کنید فاصله‌ی خانه‌ی  $a_i$  تا  $X$  برابر  $b_i$  باشد. علی رضا دنباله‌ی اعداد  $b_1, b_2, \dots, b_k$  را در نظر می‌گیرد و این  $k$  عدد را به ترتیبی دل‌خواه به فرهاد می‌گوید. در واقع تفاوت این بازی با بازی جدول منهتی این است که فرهاد نمی‌داند هر عدد علی رضا مربوط به کدام یک از  $a_i$  ها است. حال باید فرهاد با توجه به این  $k$  عدد، خانه‌ی مورد نظر علی رضا ( $X$ ) را پیدا کند. فرهاد در صورتی می‌برد که خانه‌ی مورد نظر علی رضا را بفهمد. فرض کنید هر دو نفر به به‌ترین نحو ممکن بازی می‌کنند و  $k$  کم‌ترین عددی باشد که فرهاد روشی برای انتخاب  $k$  خانه داشته باشد که ببرد.  $k$  را بیابید.

#### مسئله‌ی دوم. رنگ آمیزی جبلی! ..... امتیاز ۴۶

یک گراف ساده‌ی جهت‌دار در نظر بگیرید. یک رنگ آمیزی از رأس‌های این گراف را جبلی گوییم؛ هرگاه زیرگراف القایی روی رؤس هر رنگ، دور جهت‌دار نداشته باشد. به این ترتیب، یک گراف ساده‌ی جهت‌دار را  $k$ -رنگ پذیر گوییم؛ هرگاه بتواند با  $k$  رنگ به صورت جبلی رنگ آمیزی شود.

فرض کنید  $k$  یک عدد طبیعی و  $D$  یک گراف ساده‌ی جهت‌دار باشد. می‌دانیم در  $D$  به ازای هیچ عدد طبیعی  $r$ ، دور جهت‌دار به طول  $r+1$  وجود ندارد. ثابت کنید  $D$ ،  $k$ -رنگ پذیر است.

## مسئله سوم. بازی شرطی! ..... ۵۲ امتیاز

یک گراف کامل  $n$  - رأسی در نظر بگیرید. ابوالفضل و روزبه به نوبت روی این گراف بازی می‌کنند. هر فرد در نوبت‌ش یک یال را جهت‌دار می‌کند؛ طوری که مثلث جهت‌دار به وجود نیاید. کسی که نتواند حرکت کند می‌بازد. اگر ابوالفضل بازی را آغاز کند و هر دو نفر به‌ترین بازی ممکن را انجام دهند، چه کسی استراتژی برد دارد؟