

اعداد گویا

۱. اگر $a = 1400 - 1 - 2 - 3 - \dots - 1400$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را بر حسب a بدست آورید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1400$$

۲. آیا می‌توانید هر خانه از جدول زیر را با استفاده از اعداد صحیح طوری پر کنید که مجموع هر سطر عددی مثبت و مجموع هر ستون عددی منفی باشد؟

۳. اگر $\left\{ \frac{a}{b} \right\}$ آنگاه حاصل $a + b$ برابر با چه عددی است؟

۴. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right) \quad (\text{پ})$$

$$\frac{10}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{3 - \frac{1}{3}} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1+2+3+4}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \quad (\text{الف})$$

۵. اعداد زیر را از بزرگ به کوچک مرتب کنید.

$$c = 1400 + \frac{1}{1400 + \frac{1}{1400 + \frac{1}{1400}}}$$

$$b = 1400 + \frac{1}{1400 + \frac{1}{1400}}$$

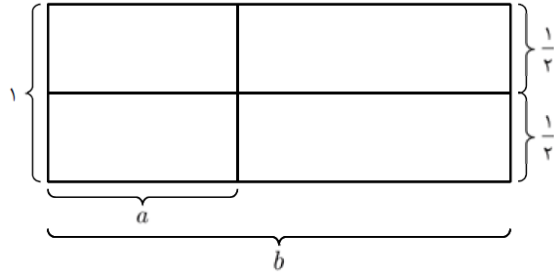
$$a = 1400 + \frac{1}{1400}$$

۶. ثابت کنید:

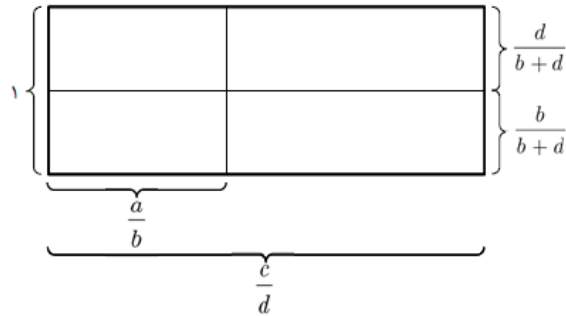
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$$

۷. کوچکترین عدد طبیعی که اگر آن را بر $\frac{9}{10}$ ، $\frac{12}{25}$ و $\frac{18}{35}$ تقسیم کنیم، خارج قسمت‌ها اعدادی طبیعی باشند، چیست؟

۸. با کمک شکل زیر ثابت کنید اگر a و b دو عدد مثبت باشند و $a < b$ آنگاه $a < \frac{a+b}{2} < b$.



۹. با کمک شکل زیر ثابت کنید اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد گویای مثبت باشند و $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ آنگاه $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.



۱۰. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$\frac{4}{9}, \frac{7}{12}, \frac{6}{11}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}$$

۱۱. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$\frac{9}{5}, \frac{10}{6}, \frac{8}{3}, \frac{8}{4}, \frac{1009}{1005}$$

۱۲. اعداد طبیعی a, b, c, d را طوری پیدا کنید که $\frac{43}{19} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$

۱۳. الف) ثابت کنید $1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200} < 1$.

ب) ثابت کنید $\frac{1}{5} > \frac{1}{81} + \frac{1}{82} + \frac{1}{83} + \dots + \frac{1}{100}$.

۱۴. از دو عدد مثبت a و $\frac{1}{a}$ کدام بزرگتر است؟ اگر a منفی باشد چطور؟

۱۵. بین دو عدد گویای $\frac{4}{5}$ و $\frac{1}{5}$:

(الف) عدد ۲ گویا پیدا کنید.

(ب) عدد ۳ گویا پیدا کنید.

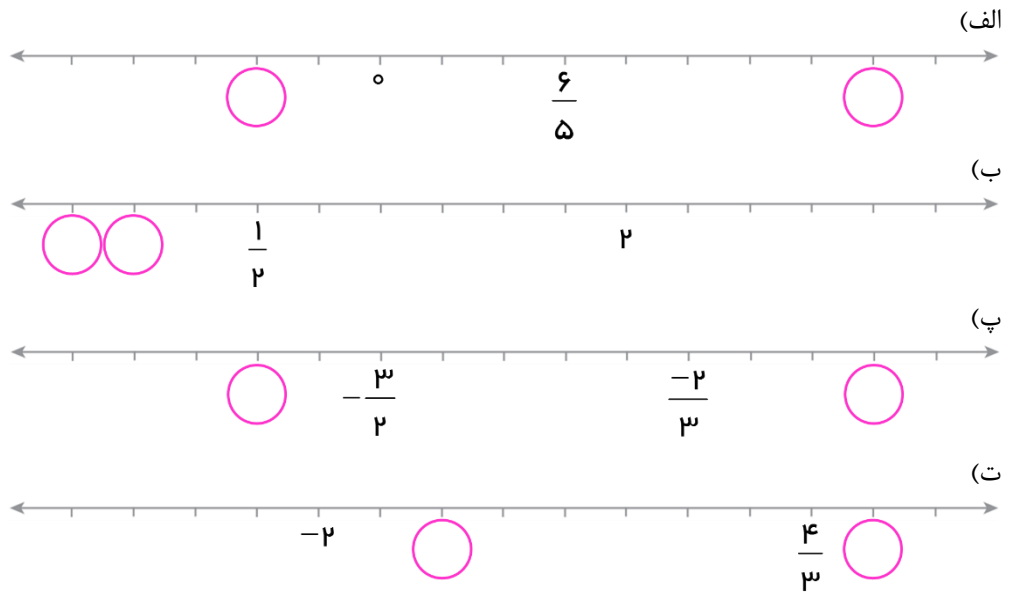
(پ) عدد ۱۰۰ گویا پیدا کنید.

۱۶. ۱۵ عدد پیدا کنید که از $\frac{1}{3}$ بزرگتر و از $\frac{1}{2}$ کوچکتر باشد.

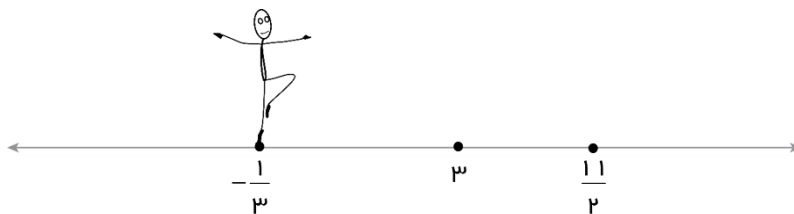
۱۷. آیا می‌توان عددی بین $\frac{23}{99}$ و $\frac{232323}{999999}$ پیدا کرد؟

روی اعداد گویا قدم بزنیم!

۱۸. هر یک از جاهای خالی متناظر با چه عددی است؟



۱۹. فرض کنید روی عدد $-\frac{1}{3}$ ایستاده‌اید و می‌خواهید با گام‌هایی برابر روی محور اعداد قدم بزنید.



(الف) اندازه هر گام شما چقدر باشد تا رد پای شما روی عدد ۳ قرار بگیرد؟

(ب) اندازه هر گام شما چقدر باشد تا رد پای شما هم روی عدد ۳ و هم روی $\frac{11}{3}$ قرار بگیرد؟

۲۰. دو عدد گویای بزرگتر از یک پیدا کنید که بین آنها عددی گویا با صورت صحیح و مخرج ۷ یافت شود؛ اما هیچ عدد گویا با صورت صحیح و مخرج ۲۰ وجود نداشته باشد.

نمایش اعشاری اعداد گویا

۲۱. اگر نمایش اعشاری کسر ساده نشدنی $\frac{a}{b}$ متناوب باشد و دوره تناوبی دارد که بلافاصله بعد از ممیز قرار گرفته است به آن متناوب ساده می‌گویند. مثلاً $\overline{1/06}$ متناوب ساده است ولی $\overline{1/06}$ متناوب ساده نیست و به آن متناوب مرکب می‌گویند.

الف) نمایش اعشاری کدام یک از اعداد زیر متناوب ساده و کدام متناوب مرکب است؟

$$\frac{8}{22}, \frac{7}{60}, \frac{2}{3}$$

(ب) نشان دهید اگر نمایش اعشاری کسر ساده نشدنی $\frac{a}{b}$ متناوب مرکب باشد آنگاه b بر ۵ یا ۲ قابل قسمت است.

(پ) با استفاده از نتیجه بند (ب) مشخص کنید نمایش اعشاری کدام یک از اعداد زیر مختوم، کدام متناوب ساده و کدام متناوب مرکب است؟

$$\frac{50}{35}, \frac{49}{35}, \frac{48}{35}, \frac{22}{8}, \frac{21}{7}, \frac{20}{6}$$

۲۲. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\overline{1/1100}, \overline{1/1101}, \overline{1/110}, \overline{1/101}, \overline{1/10}, \overline{1/01}, \overline{1/1}$$

۲۳. از ضرب $1/0230$ در هر یک از اعداد زیر چه عددی حاصل می‌شود؟

$$10 \text{ (الف)}, 10^2 \text{ (ب)}, 10^3 \text{ (پ)}, 10^4 \text{ (ت)}, 10^5 \text{ (ث)}$$

۲۴. نمایش کسری هر یک از اعداد گویای زیر را پیدا کنید.

$$2/16 \text{ (الف)}, \overline{1/09} \text{ (ب)}, \overline{1/5} - \overline{1/5} \text{ (ج)}, \overline{1/175} \text{ (د)}, \overline{1/575} \text{ (ه)}$$

۲۵. الف) نشان دهید $1/3 = \overline{1/29}$.

(ب) هر یک از اعداد مختوم زیر را به صورت یک عدد اعشاری متناوب بنویسید.

۵ ، ۱/۱ ، ۰/۱۹ ، ۹/۷۷

۲۶. حاصل هر یک از عبارات زیر را با یک عدد اعشاری نمایش دهید.

(الف) $1/2 \times 0/5$ (ب) $0/73 \times 0/05$ (پ) $3/2 - 0/5$ (ت) $1/18 \times 0/55 - 0/1$

۲۷. آیا محاسبه زیر درست انجام شده است؟

$$3/4 - 2/5 = 0/9$$

۲۸. اگر $0/6a = \frac{b}{11}$ مقدار a و b را پیدا کنید.

۲۹. با استفاده از یک ماشین حساب نمایش اعشاری عدد گویای $\frac{1}{89}$ را پیدا کنید. آیا قسمت اعشاری که در ماشین حساب می بینید

عجیب نیست؟ چه توضیحی برای این اتفاق عجیب دارید؟

اعداد گنگ

۳۰. کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست است؟ دلیل بیاورید.

(الف) هیچ عدد گویایی بین $\frac{22}{15}$ و $\frac{21}{15}$ وجود ندارد.

(ب) فقط یک عدد گنگ بین $\frac{22}{15}$ و $\frac{21}{15}$ وجود دارد و آن هم $\sqrt{2}$ است.

(پ) نمایش اعشاری $\frac{21}{15}$ مختوم است.

(ت) هر عدد حقیقی یا گویا است و یا جذر یک عدد گویا است.

۳۱. کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست است؟ دلیل بیاورید.

(الف) بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ فقط یک عدد گنگ وجود دارد.

(ب) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ عددی گویا است.

(پ) $\sqrt{\pi^2}$ هم گویا و هم گنگ است.

(ت) $\sqrt{18} \times \sqrt{8}$ عددی گویا است.

۳۲. کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

(الف) معکوس هر عدد گویا عددی گویا است.

(ب) معکوس هر عدد گنگ عددی گنگ است.

(پ) دو عدد گنگ وجود دارد که مجموع آنها عددی مثبت و گویا است.

(ت) دو عدد گنگ وجود دارد که هم مجموع و هم تفاضل آنها عددی گویا است.

(ث) اگر x^2 گنگ باشد آنگاه x نیز گنگ است.

(ج) اگر x گنگ باشد آنگاه x^2 گویا است.

(د)

۳۳. ده رقم اعشار از نمایش اعشاری $\sqrt{99999999}$ و $\sqrt{100000000}$ را می بینید:

$$\sqrt{100000000} = 3162,2776601683\dots \quad \text{و} \quad \sqrt{99999999} = 3162,2775020544\dots$$

یک عدد گنگ و یک عدد گویا بین این دو عدد پیدا کنید.

۳۴. (الف) سه عدد گویا بین π و $3/14$ پیدا کنید.

(ب) سه عدد گنگ بین $\sqrt{2}$ و $1/414$ پیدا کنید.

۳۵. درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

(الف) مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که اندازه هر سه ضلع آن گویاست.

(ب) مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که اندازه هر سه ضلع آن گنگ است.

(پ) مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که اندازه هر سه ضلع آن گویاست ولی اندازه ارتفاع وارد بر وترش گنگ است.

(ت) مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقینی وجود ندارد که اندازه هر سه ضلعش گویا باشد.

(ث) در یک مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه وتر و یک ضلع غیر وتر گویا باشد آنگاه اندازه ضلع سوم نیز گویا است.

۳۶. مجموعه $B = \{a, b, c\}$ را طوری پیدا کنید که هر سه شرط زیر برقرار باشد:

(۱) $B \subset \mathbb{Q}'$ (۲) B سه عضوی است. (۳) $a \times b \times c$ گویا است.

۳۷. کف یک اتاق مستطیلی به طول $a \in \mathbb{R}$ و عرض $b \in \mathbb{R}$ است. کف این اتاق را با سرامیک‌های مربع شکل و یک اندازه کاشی

کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{a}{b}$ عددی گویا است.

۳۸. برای هر گزاره در طرف راست یک مثال نقض از طرف چپ پیدا کنید و به هم وصل کنید:

$\frac{0}{1+\pi} = 0$
$\sqrt{3} + (1 - \sqrt{3}) = 1$
π
$\sqrt{12} \times \sqrt{12} = 12$
$0 \times \sqrt{5} = 0$
$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$

مجموع هر دو عدد گنگ عددی گنگ است.
حاصلضرب هر دو عدد گنگ عددی گنگ است.
حاصلضرب هر عدد گنگ در یک عدد گویا عددی گنگ است.
حاصل تقسیم یک عدد گویا بر عدد گنگ عددی گنگ است.
اگر مجموع دو عدد گنگ عددی گویا شود حتماً قرینه یکدیگر هستند.
توانی برای هر عدد گنگ وجود دارد که حاصل عددی گویا شود.

۳۹. ثابت کنید $\frac{1-\sqrt{6}}{5}$ عددی گنگ است.

۴۰. کدام یک از اعداد زیر گویا و کدام گنگ است؟

ث) $\frac{\sqrt{63} - \sqrt{28}}{5\sqrt{7}}$

ت) $\frac{\sqrt{45} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

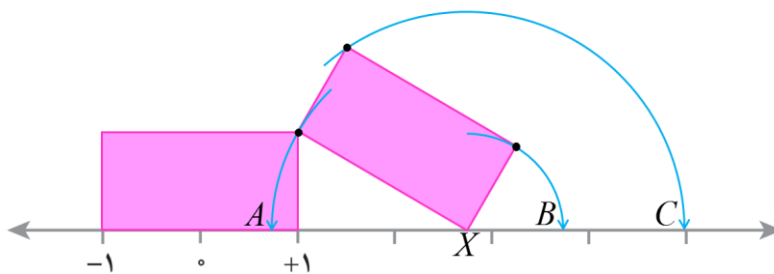
پ) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{24}}{\sqrt{3}}$

ب) $1 - \sqrt{5}$

الف) $\frac{2\pi}{3\pi}$

ج) $\frac{\pi^2 - 1}{2}$ چ) $3/14$

۴۱. شکل زیر دو مستطیل هم‌نهشت به ابعاد 2×1 را نشان می‌دهد که در یک رأس مشترکند.



الف) سه کمان بالا به مرکز X و گذرا از سه رأس دیگر مستطیل، محور اعداد حقیقی را در نقاط A ، B و C قطع کرده است. این سه نقطه نمایش چه اعدادی هستند؟

ب) آیا $C = 5$ ؟ برای ادعای خود دلیل بیاورید.

۴۲. مثلث قائم الزاویه‌ای رسم کنید که اضلاع مجاور به زاویه قائمه در آن اعدادی گویا باشند و وتر آن برابر باشد با:

الف) $\sqrt{5}$ ب) $\sqrt{13}$ پ) $2\sqrt{10}$ ت) $\sqrt{157}$

۴۳. دایره‌ای به مرکز $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ رسم کرده‌ایم که از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ عبور می‌کند. این دایره محور طول‌ها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

۴۴. اگر A و B دو زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشند که بین هر دو عضو دلخواه B عضوی از A وجود داشته باشد آنگاه می‌گوییم « A در B فرو رفته است». برای مثال اگر $A = \{1, 2, 4, 10, 11\}$ در $B = \{0, 3, 10\}$ فرو رفته است؛ زیرا بین هر دو عضو B عضوی از A وجود دارد:

دو عضو از B :	3 و 10	0 و 10	3 و 0
عضوی از A :	4	1	1

الف) کدام یک از گزاره‌های زیر درست هستند؟

(۱) \mathbb{N} در \mathbb{N} فرو رفته است. (۲) \mathbb{N} در \mathbb{Q} فرو رفته است. (۳) \mathbb{Q} در \mathbb{N} فرو رفته است.

(۴) \mathbb{Q} در \mathbb{Q} فرو رفته است. (۵) \mathbb{Q} در \mathbb{Q}' فرو رفته است. (۶) \mathbb{Q}' در \mathbb{Q} فرو رفته است.

ب) مجموعه بی‌پایان D را طوری پیدا کنید که \mathbb{N} در D فرو رفته باشد.

پ) اگر A در B فرو رفته باشد و همچنین B در A فرو رفته باشد می‌توان نتیجه گرفت که $A = B$ است؟

۴۵. ظرفی لبریز از آب به گنجایش $2 - \sqrt{2}$ لیتر و B ظرفی خالی به گنجایش $\sqrt{2}$ لیتر است. اگر همه آب ظرف A را در ظرف B خالی کنیم کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

الف) ظرف B لبریز می‌شود و $2 - 2\sqrt{2}$ لیتر آب بیرون می‌ریزد.

ب) ظرف B لبریز می‌شود و هیچ آبی بیرون نمی‌ریزد.

پ) $\sqrt{2}$ لیتر از ظرف B خالی می‌ماند.

ت) $2 - 2\sqrt{2}$ لیتر از ظرف B خالی می‌ماند.

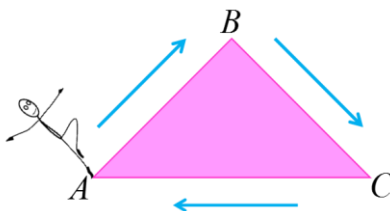
۴۶. نمایش اعشاری یک عدد حقیقی به شکل زیر است:

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots$$

الف) فرض کنید $\{a_n, a_{n+1}\} = \{1, 2\}$. در مورد گویا یا گنگ بودن x چه می‌توان گفت؟

ب) فرض کنید $\{a_{2n-1}, a_{2n}\} = \{1, 2\}$. در مورد گویا یا گنگ بودن x چه می‌توان گفت؟

۴۷. می‌خواهیم روی محیط یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با گام‌های برابر قدم بزنیم. آیا جای پای ما می‌تواند به ترتیب روی دو رأس B و C قرار بگیرد به طوریکه آخرین جای پای رأس A باشد؟



۴۸. الف) تاریخ روز سومین سه شنبه در هر ماه را به صورت یک مجموعه نشان دهید و روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

ب) یک موجود فرازمینی در هر شبانه روز 10° پیام رادیویی به زمین ارسال می‌کند که فاصله هر دو پیام متوالی نیم ساعت است. با یک مجموعه نشان دهید پیام پنجم در چه زمان‌هایی از شبانه روز می‌تواند ارسال شود و روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

قدر مطلق

۴۹. حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } |9 - \sqrt{82}| + |10 - \sqrt{82}| \quad \text{ب) } |1 - 2 - 3| \quad \text{پ) } |-5 - |-3||$$

$$\text{ت) } |1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| \quad \text{ث) } |2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}|$$

۵۰. الف) فاصله نقطه متناظر با هر یک از اعداد زیر تا مبدأ چقدر است؟

$$-\sqrt{2}, \quad 1 - \sqrt{2}, \quad 2 - \sqrt{2}, \quad 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

ب) فاصله نقطه متناظر با هر یک از اعداد زیر تا -2 چقدر است؟

۵۱. حاصل $|x - a| + |x - b|$ به ازای $a < x < b$ را بدست آورید.

۵۲. اگر $a^2 < a$ آنگاه حاصل $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{(a+1)^2}$ را ساده کنید.

۵۳. حاصل $\sqrt{x^2} + \sqrt{(2-x)^2}$ را به ازای $x = 1 - \sqrt{2}$ بدست آورید.

۵۴. به ازای مقادیر مختلف $x \in \mathbb{R}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

$$\text{الف) } \frac{x}{|x|} \quad \text{ب) } \frac{|x|}{x} \quad \text{پ) } x - |x| \quad \text{ت) } x + |x| \quad \text{ث) } |x| + |x - 5|$$

۵۵. x را پیدا کنید به شرطی که داشته باشیم:

الف) $x - |x| = -2$ ب) $|x - 1| = 4$ پ) $|2x + 3| - 1 = 0$ ت) $\frac{x}{|x - 3|} = 1$

ث) $|10 - |x|| = 3$

۵۶. با فرض اینکه $a, b \in \mathbb{Z}$ آنگاه خارج قسمت و باقیمانده تقسیم a بر b به ترتیب برابر با c و r است اگر هر دو شرط زیر برقرار باشد.

شرط (۱): $a = b \times c + r$

شرط (۲): $0 \leq r < |b|$

مثلاً در تقسیم -11 بر 4 رابطه زیر نادرست است.

$$\begin{array}{r} -11 \overline{) 4} \\ \underline{-8} \\ (-8) \\ \underline{-12} \\ -3 \end{array}$$

زیرا باقیمانده عددی منفی است و به همین دلیل شرط (۲) برقرار نیست. اما در تقسیم زیر هر دو شرط برقرار است:

$$\begin{array}{r} -11 \overline{) 4} \\ \underline{-12} \\ -11 - (-12) = 1 \end{array}$$

خارج قسمت و باقیمانده را برای هر یک از تقسیم‌های زیر بدست آورید.

الف) -30 تقسیم بر 7 ب) 16 تقسیم بر -3 پ) -21 تقسیم بر -4

۵۷. در هر شکل A و B دو عدد حقیقی هستند که فقط رابطه‌های سمت چپ در مورد این دو عدد درست است. برای هر یک از شکل‌های سمت راست رابطه درست را در سمت چپ پیدا و به هم وصل کنید.

$A \times B < 0, A < B $	
$A \times B > 0, A < B $	
$A \times B > 0, A > B $	

$A \times B < 0, A > B $	
$ A = B $	

۵۸. برای هر یک از بندهای زیر مثالی درست برای a و b پیدا کنید.

الف) $a + b > 0$ و $ab < 0$ ب) $a + b \leq 0$ و $ab < 0$ پ) $a + b < 0$ و $ab \geq 0$

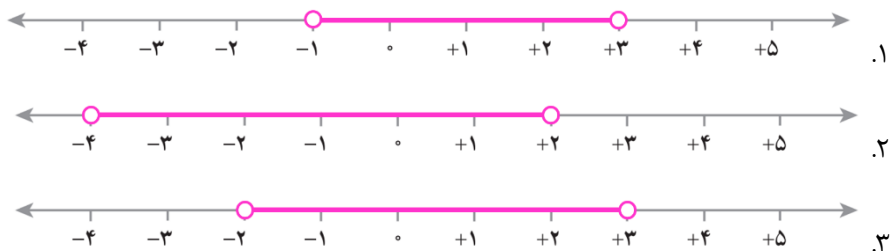
ث) $a + b = 0$ و $ab \leq 0$

۵۹. اگر $abc > 0$ آنگاه حاصل عبارت $|a| + |b| + |c|$ کدام یک از موارد زیر نمی‌تواند باشد؟

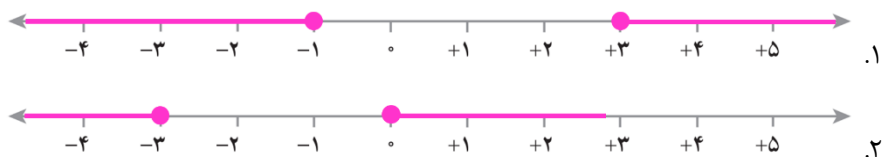
الف) $a - b - c$ ب) $a + b - c$ پ) $-a - b - c$

۶۰. الف) دو مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| < 2\}$ و $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < |x - 1|\}$ را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

ب) عدد a و b را در هر بند طوری پیدا کنید که مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < b\}$ متناظر با مجموعه نقاط شکل مورد نظر باشد.



پ) عدد a و b را در هر بند طوری پیدا کنید که مجموعه $\{x \in \mathbb{R} \mid b \leq |x - a|\}$ متناظر با مجموعه نقاط شکل مورد نظر باشد.



۶۱. مجموعه‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید:

الف) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}$ ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq 2\}$ پ) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq |x + 2|\}$

۶۲. در هر مورد $I \cup J$ و $I \cap J$ و $I - J$ را پیدا کنید و روی محور اعداد حقیقی نشان دهید:

الف) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$ و $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

ب) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 7\}$ و $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$

پ) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9\}$ و $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x\}$

۶۳. با توجه به شکل به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) هر یک از مقادیر $|a-b|$ ، $|d-c|$ و $|a-c|$ را بدست آورید.

ب) کدام یک از نقاط a, b, c, d جواب معادله $|x-b|=3$ است؟

ج) کدام یک از نقاط a, b, c, d در نامعادله $|x-c| \leq 6$ صدق می کنند؟