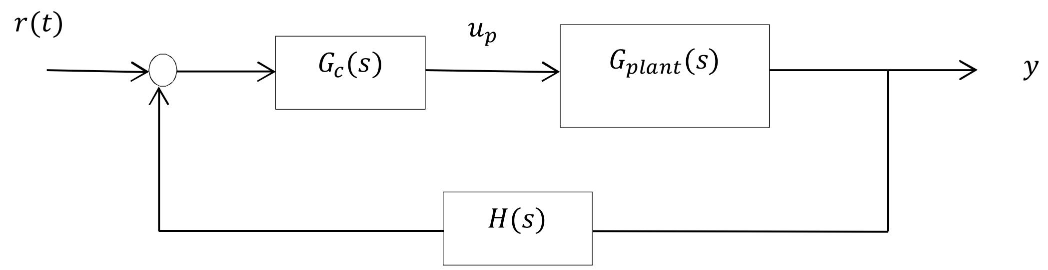
از آنجا که طراحی در مبحث درسی سیستم های کنترل خطی و کاربردهای عمل بسیار مهم است در این بخش سعی شده تا انواع مهم کنترل کننده های خطی به صورتی ساده معرفی و در قالب مثال طراحی گردند. اساس طراحی بر طبق کتاب دکتر ریچارد سی درف است. امیدوارم مطالب این بخش برای دانشجویان عزیز مفید باشد. خواهشمندم هر گونه ایراد و پیشنهادی دارید به من اطلاع دهید. در انتها نیز از دانشجوی محترم خانم توسلی به خاطر تایپ و رسم شکلها تشکر و قدردانی می نمایم.

در این بخش کنترل کننده‌ها را بر اساس مکان ریشه‌ها طراحی می‌نماییم. یک سیستم کنترل تک ورودی تک خروجی را می‌توان به صورت بلوکی زیر نمایش داد.



$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U_p(s)}$$

$$G_c(s) = \frac{U_p(s)}{E(s)}$$

$G_c(s) \rightarrow$ عموما تابع کسری گویا

انواع کنترل کننده‌ها :

۱- کنترل کننده تناسبی :

$G_c(s) = kp$ یا $G_c(s) = k$

۲- کنترل کننده تناسبی - مشتقی :

$$\begin{cases} G_c(s) = k_p + k_D s \\ G_c(s) = k(s+a) \end{cases} \rightarrow G_c(s) = k_D\left(s + \frac{k_p}{k_D}\right)$$

این کنترل کننده یک صفر به تابع انتقال حلقه باز اضافه می‌کند (به بخش تأثیر افزودن صفر به تابع انتقال حلقه باز مراجعه نمایید) .

۳- کنترل کننده تناسبی ـ انتگرالی :

$$\begin{cases} G_c(s) = k_p + \dfrac{k_I}{s} \\ G_c(s) = \dfrac{k(s+b)}{s} \end{cases}$$

این کنترل کننده یک قطب به مبدأ و یک صفر در $-b$ به تابع انتقال حلقه باز اضافه می‌کند.

۴- کنترل کننده تناسبی ـ مشتقی ـ انتگرالی :

$$G_c(s) = k_p + k_D(s) + \frac{k_I}{s}$$

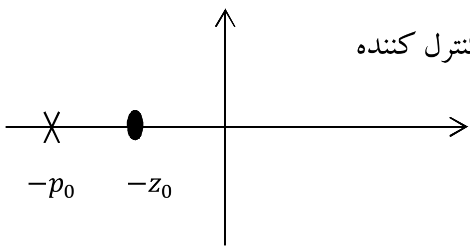
$$G_c(s) = \frac{k(s+c)(s+d)}{s}$$

این کنترل کننده دو صفر و یک قطب به سیستم حلقه باز اضافه می‌کند.

۵- کنترل کننده پیش فاز :

$$G_c(s) = \frac{k(s+z_0)}{s+p_0}$$

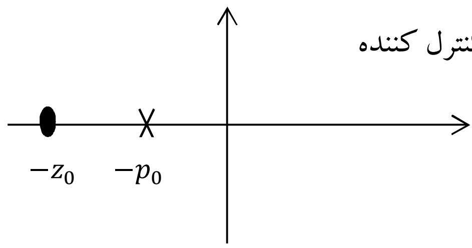
نمایش صفر و قطب کنترل کننده



۶- کنترل کننده پس فاز (Lag):

$$G_p(s) = \frac{k(s+z_0)}{s+p_0}$$

نمایش صفر و قطب کنترل کننده



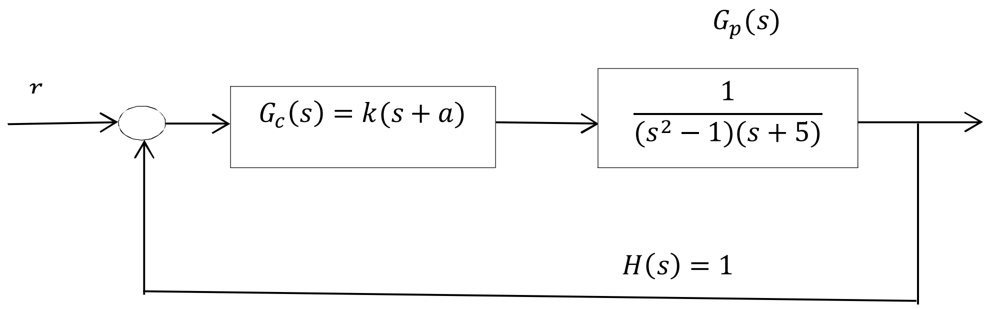
۷- کنترل کننده پیش فاز ـ پس فاز :

$$G_c(s) = \frac{k(s+z_{0lead})(s+z_{0lag})}{(s+p_{0lead})(s+p_{0lag})}$$

در این بخش ابتدا یک کنترل کننده تناسبی مشتقی و سپس کنترل کننده های پیش فاز و پس فاز به طور کامل طراحی می گردد.

مثال : سیستمی با فیدبک واحد و تابع انتقال $G_p(s)H(s) = \frac{1}{(s^2-1)(s+5)}$ را در نظر بگیرید. همان طور که می‌بینید سیستم حلقه باز ناپایدار است. با استفاده از جبران ساز PD (تناسبی ـ مشتقی) سیستم را پایدار کنید به طوری که برای قطب‌های غالب سیستم داشته باشیم:

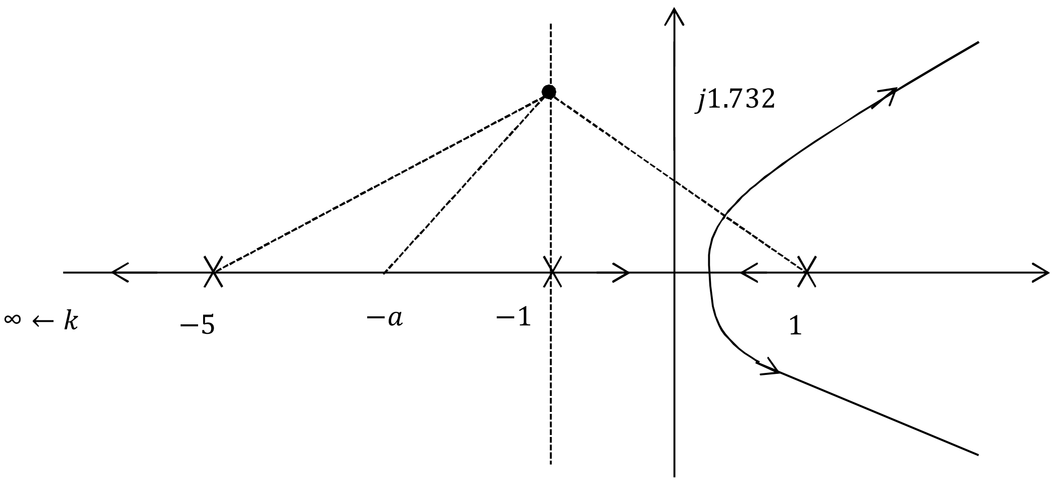
$\xi = 0.5$ و $\omega_n = 2$



در واقع باید k (بهره کنترل کننده) و $s = -a$ (صفر کنترل کننده) را طوری تعیین کنیم که قطب‌های غالب سیستم دارای $\omega_n = 2$ و $\xi = 0.5$ باشند .

$$G_p'(s) = \frac{k(s+a)}{(s^2-1)(s+5)}$$

$$\Delta(s) = 1 + G_p'(s) = 0$$



رسم مکان سیستم بدون جبران ساز :

نقطه شکست : $\frac{dk}{ds} = 0 \rightarrow \frac{d}{ds}[(s^2-1)(s+5)] = 0$

$$\frac{d}{ds}[s^3 + 5s^2 - s - 5] = 0$$

$$3s^2 + 10s - 1 = 0 \rightarrow s = \frac{-5 \pm \sqrt{25+3}}{3} \rightarrow \begin{cases} s = 0.09 \\ s = -3.43 \end{cases}$$

به دست آوردن مکان قطب غالب سیستم با توجه به $\omega_n = 2$ و $\xi = 0.5$:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s_{1,2} = -0.5 \times 2 \pm j \times 2 \times \sqrt{1-0.5^2}$$

$s_{1,2} = -1 \pm j1.733 \rightarrow$ مکان قطب غالب

قطب مطلوب : باید مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده از این نقطه باید عبور کند .

- برای تعیین k و a از شرط اندازه و فاز در قطب غالب استفاده می‌کنیم :

ابتدا باید مکان a را از شرط فاز تعیین کنیم :

(تعیین مکان صفر کنترل کننده($s = -a$))

$$\measuredangle G_c . G_p(s = s^*) = 180$$

$$\measuredangle \frac{k(s+a)}{(s^2-1)(s+5)} = 180$$

$$\measuredangle(s+a) - [\measuredangle(s-1) + \measuredangle(s+1) + \measuredangle(s+5)] = 180$$

$$\theta_a - [\theta_1 + \theta_{-1} + \theta_{-5}] = 180$$

$$\theta_1 = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{1.733}{2}\right) = 139.1°$$

$$\theta_{-1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_{-5} = \tan^{-1}\frac{1.733}{4} = 23.41$$

$$\theta_a = \tan^{-1}\frac{1.733}{|a-1|}$$

$$\rightarrow \tan^{-1}\frac{1.733}{|a-1|} - [139.1 + 90 + 23.41] = 180$$

$$\rightarrow \tan^{-1}\frac{1.733}{|a-1|} = 180 + [252.51]$$

$$\tan^{-1}\frac{1.733}{|a-1|} = 72.51$$

$$\rightarrow \frac{1.733}{|a-1|} = \tan^{-1} 72.51 \rightarrow a = 1.55$$

شرط اندازه :

$$\frac{k(s+a)}{(s^2-1)(s+5)}=1$$

$$\frac{k.l_a}{l_{-1}\times l_1\times l_{-5}}=1\rightarrow k=\frac{l_{-1}\times l_1\times l_{-5}}{l_a}$$

$$l_{-1}=1.733$$

$$l_{-5}=\sqrt{4^2+1.733^2}$$

$$l_1=\sqrt{2^2+1.733^2}$$

$$l_a=\sqrt{1.733^2+1.55^2}$$

$$k=1$$

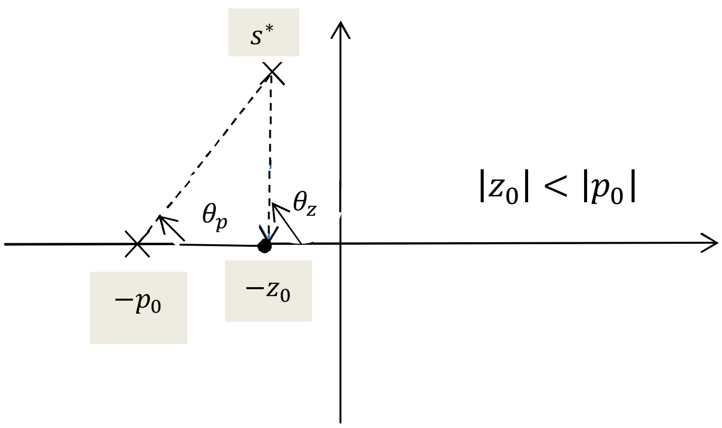
$$G_c(s)=11(s+1.55)$$

طراحی جبران ساز های پیش فاز و پس فاز :

طراحی جبران ساز پیش فاز ($lead$)

تابع انتقال یک جبران ساز $lead$ به صورت زیر است :

$$G_c(s)=k\frac{s+z_0}{s+p_0}$$

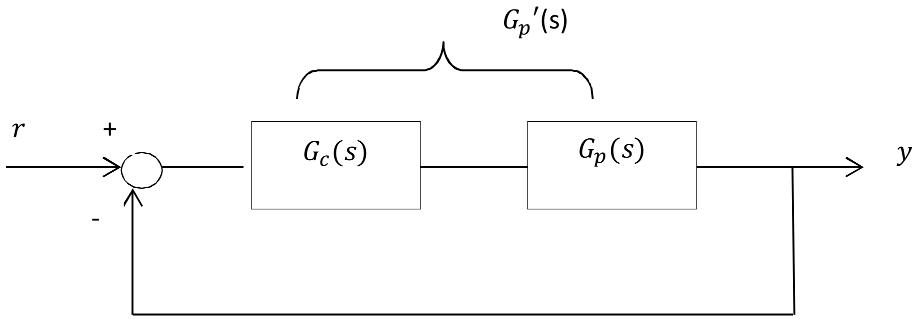


اگر s^* نقطه ای از مکان باشد $\theta_{z_0} > \theta_{p_0}$ خواهد بود. بدین ترتیب :

$$\measuredangle G_c(s) = \measuredangle \frac{k(s+z_0)}{(s+p_0)} = [\measuredangle(s+z_0) - \measuredangle(s+p_0)]$$

$$\measuredangle G_c(s) = \theta_{z_0} - \theta_{p_0} > 0$$

بنابراین کنترل کننده پیش فاز ، فاز مثبتی به سیستم در s^* می‌دهد .



$$G_p'(s) = G_c(s).G_p(s)$$

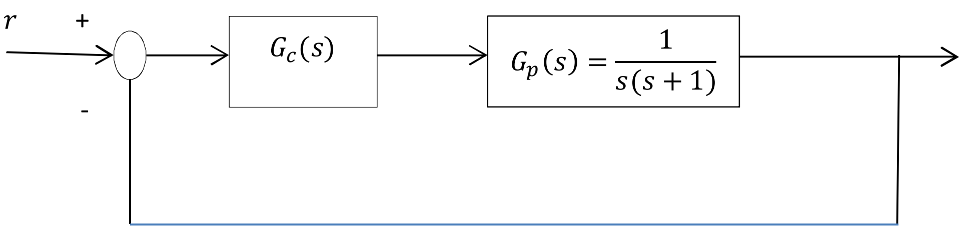
$$\measuredangle G_p'(s) = \measuredangle G_c(s).G_p(s) = \measuredangle G_c(s) + \measuredangle G_p(s)$$

مثال : سیستم کنترل فیدبکی زیر را در نظر بگیرید:

کنترل کننده را به گونه ای طراحی کنید که $t_s \leq 4sec$ و $\%MP < \%37$ باشد.

الف) نشان دهید که کنترل کننده تناسبی $G_c(s) = k$ نمی‌تواند خواسته های مسئله را برآورده سازد.

ب) کنترل کننده پیش فازی به صورت $G_c(s) = \frac{k(s+z_0)}{s+p_0}$ برای رسیدن به خواسته های مسئله را طراحی کنید.



حل : ابتدا محل قطب مطلوب (قطب حلقه بسته سیستم که خواسته های مسئله را برآورده می‌سازد) را به دست می‌آوریم

$$\%MP \leq \%37 \rightarrow 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 37$$

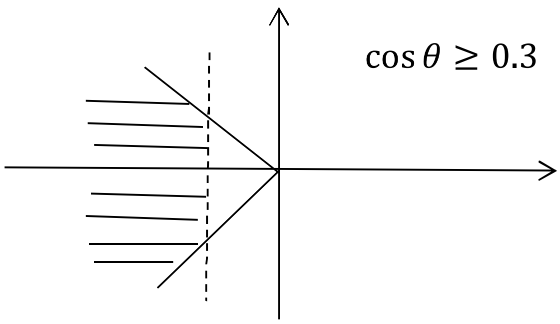
$$\rightarrow e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 0.37 \rightarrow \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} < ln0.37 \rightarrow \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} < -1 \rightarrow \frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} > 1$$

$$\xi\pi > \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\pi^2\xi^2 > 1-\xi^2 \rightarrow (\pi^2+1)\xi^2 > 1 \rightarrow \xi^2 > \frac{1}{\pi^2+1}$$

$$\rightarrow \xi^2 > 0.09 \rightarrow \xi > 0.3 \rightarrow \xi = \cos\theta \rightarrow \cos\theta \geq 0.3$$

$$t_s \leq 4 \rightarrow \frac{4}{\xi\omega_n} < 4 \rightarrow \xi\omega_n > 1$$



برای به دست آوردن یک قطب مطلوب $\xi = 0.4$, $\xi\,\omega_n = 2$ انتخاب می کنیم

$$\xi\omega_n = 2 \rightarrow \omega_n = \frac{2}{\xi} = \frac{2}{0.4} \rightarrow \omega_n = 5$$

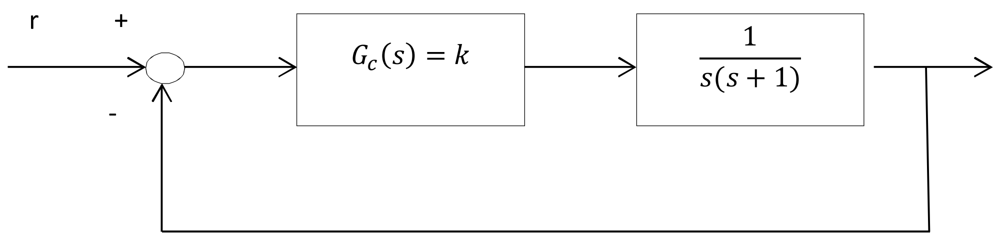
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

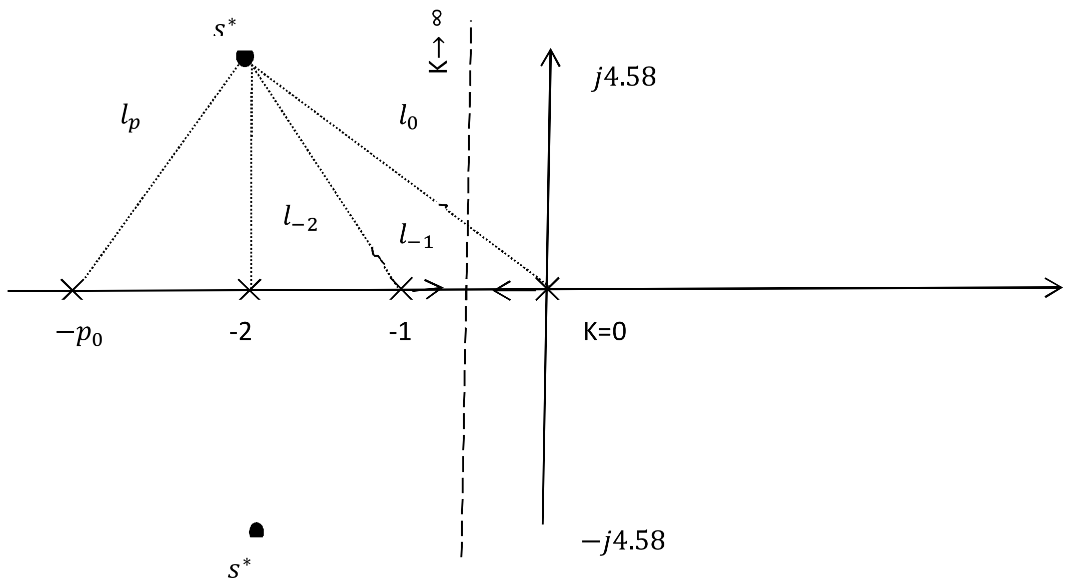
$$s_{1,2} = -2 \pm j5\sqrt{1-(0.4)^2}$$

قطب مطلوب $s_{1,2}^* = -2 \pm j4.58$

یعنی آنکه باید مکان هندسی سیستم جبران شده از s^* بگذرد.

الف) ابتدا برای سیستم جبران ساز تناسبی $G_c(s) = k$ در نظر می گیریم :





همراه با کنترل کننده تناسبی k نمی‌توان به خواسته مسئله رسید چون مکان از روی s^* نمی گذرد.

ب) طراحی کنترل کننده $(lead)$:

$$G_c(s) = \frac{k(s+z_0)}{s+p_0}$$

- یک روش شروع طراحی آن است که صفر کنترل کننده $(-z_0)$ را قسمت حقیقی قطب مطلوب در نظر بگیریم:

قطب مطلوب $= s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{4.58}$

$z_0 = -2$

تعیین k و $-p_0$:

برای محاسبه مکان قطب $(-p_0)$ از شرط فاز و برای محاسبه بهره از شرط اندازه کمک می‌گیریم:

شرط فاز:

$$\measuredangle G_c(s).G_p(s) = 180$$

$$\measuredangle\left(\frac{k(s+z_0)}{(s+p_0)}.\frac{1}{s(s+1)}\right) = 180$$

$$\measuredangle(s+z_0) - [\measuredangle(s+p_0) + \measuredangle s + \measuredangle(s+1)] = 0$$

$$\theta_{z_0} - \left[\theta_{p_0} + \theta_0 + \theta_{-1}\right] = 180$$

$$\theta_{z_0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_0 = \pi - \tan^{-1}\frac{4.58}{2}$$

$$\theta_{-1} = \pi - \tan^{-1}\frac{4.58}{1}$$

$$\theta_{p_0} = \tan^{-1}\frac{4.58}{|p_0-2|} \rightarrow p_0 = 5.32$$

برای محاسبه k با اعمال شرط اندازه در قطب مطلوب داریم :

$$\left|\frac{k(s+2)}{(s+5.32)}.\frac{1}{s(s+1)}\right| = 1$$

$$\frac{k|s+2|}{|s+5.32||s||s+1|} = 1$$

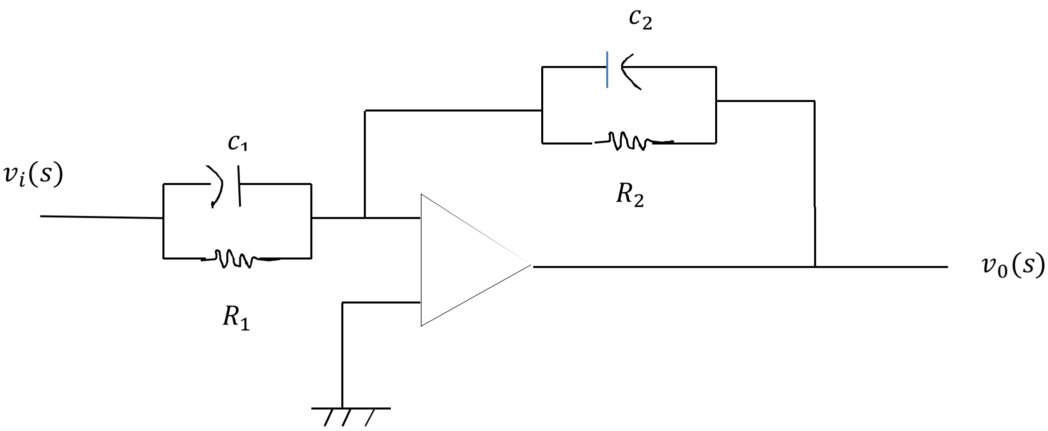
$$\rightarrow k = \frac{l_{p_0} \times l_0 \times l_{-1}}{l_{z_0}} = 28.94$$

$$G_c(s) = 28.94 \times \frac{s+2}{s+5.32}$$

تمرین کامپیوتری : کنترل کننده به دست آمده را در محیط $MATLAB$ بر روی سیستم اعمال کنید و برآورده شدن شرایط خواسته شده را بررسی نمایید .

ساخت یک کنترل کننده $lead(lag)$ به کمک آپ امپ :

مدار زیر تحقق کنترل کننده های پیش فاز و پس فاز را به کمک مدارهای الکترونیکی شامل آپ امپ نشان می‌دهد.



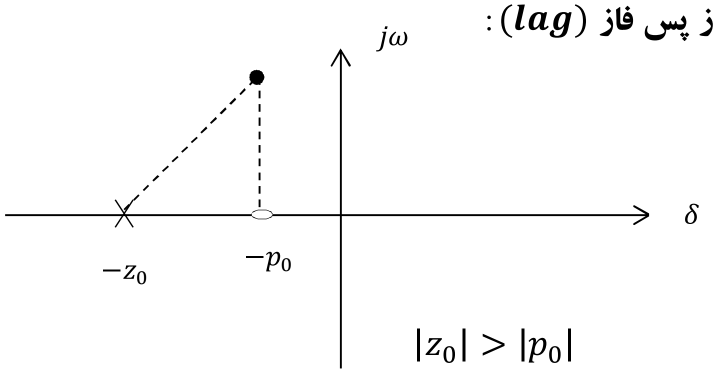
به کمک قوانین ولتاژ و جریان کرشهوف می توان تابع انتقال مدار را به صورت زیر بدست آورد.

$$G_c(s) = -\frac{z_2(s)}{z_1(s)} = \frac{-c_1}{c_2} \frac{s+\frac{1}{R_1c_1}}{s+\frac{1}{R_2c_2}}$$

کنترل کننده $lead$ $\rightarrow$ $R_2c_2 > R_1c_1$ if

کنترل کننده lag $\rightarrow$ $R_1c_1 > R_2c_2$

طراحی جبران ساز پس فاز (lag) :



$$G_c(s) = \frac{k(s+z_0)}{(s+P_0)}$$

اگر s^* نقطه ای از مکان باشد :

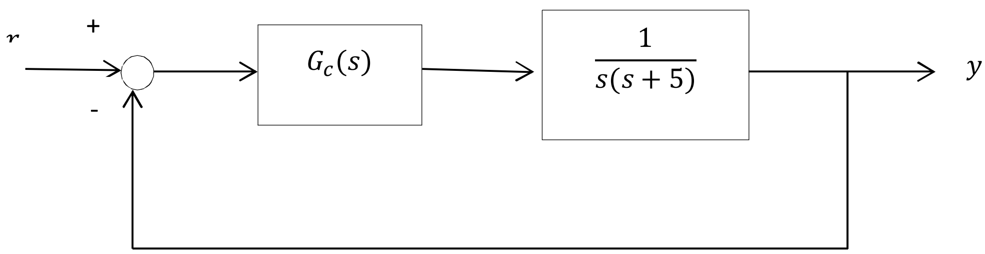
$$\measuredangle G_c(s) = \measuredangle \frac{k(s+z_0)}{(s+p_0)}$$

$$\measuredangle G_c(s) = [\measuredangle(s+z_0) - \measuredangle(s+p_0)]$$

$$\measuredangle G_c(s) = \theta_{z_0} - \theta_{p_0} < 0$$

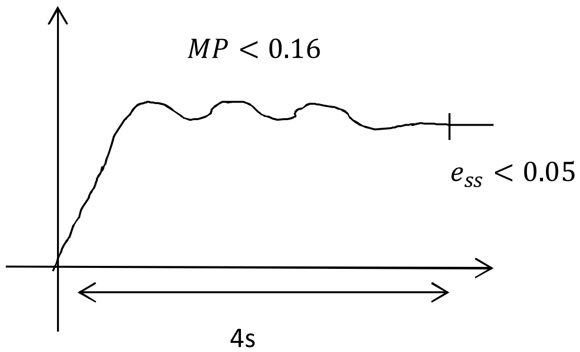
این جبران ساز در نقطه s^* (قطب مطلوب) به سیستم فاز منفی می‌دهد . تأثیر مثبت جبران ساز lag بر سیستم پایین آوردن خطای حالت دائمی سیستم است . البته فاز منفی که به سیستم می‌دهد عیب این کنترل کننده است که در مقایسه با مزیت آن قابل چشم پوشی است .

مثال : سیستم کنترل فیدبکی زیر را در نظر بگیرید :



کنترل کننده lag را به گونه ای تعیین کنید که پاسخ پله سیستم دارای مشخصات زیر باشد .

$$\begin{cases} \%MP < \%16 \\ t_s < 4\,\mathrm{sec} \\ e_{ss} < 0.05 \end{cases}$$



ابتدا مکان قطب مطلوب (قطبی که در آن مشخصات سیستم برآورده می‌شود) را به دست می‌آوریم .

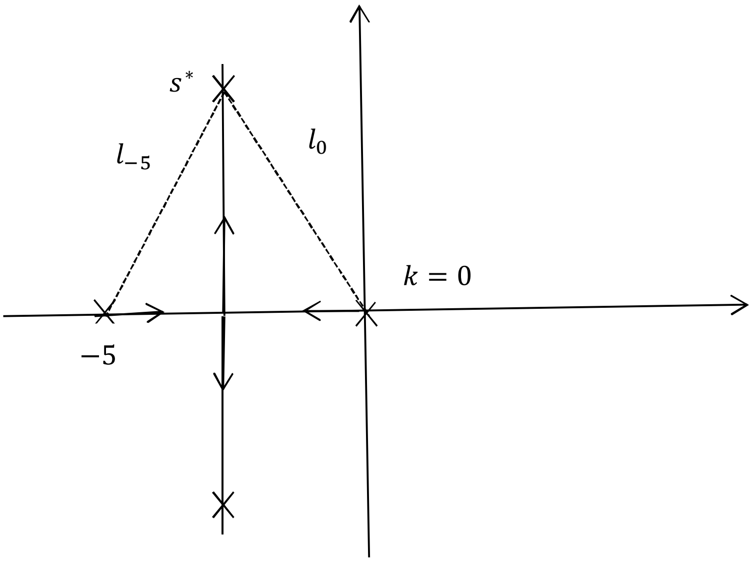
$$\%MP < \%0.16 \to MP < 0.16$$

$$e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \le 0.16 \xrightarrow{\dots} \xi \ge 0.5$$

$$t_s < 4sec \to \frac{4}{\xi\omega_n} < 4 \to \xi\omega_n > 1$$

با انتخاب $\xi = 0.5$ و $\xi\omega_n = 2.5$ مکان قطب مطلوب به دست می‌آید.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \to \quad s_{1,2} = -2.5 \pm j4.33$$



باید ببینیم آیا در مکان قطب مطلوب e_{ss} به مقدار خواسته است. برای این منظور ابتدا بهره سیستم جبران نشده را در s^* به دست می‌آوریم و به کمک آن e_{ss} جبران نشده را محاسبه می‌کنیم .

شرط اندازه :

$$\frac{k}{s(s+5)} = 1$$

$$k = s(s+5) = |s|.|s+5| = l_0.l_{-5} = \sqrt{4.33^2 + 2.5^2} \times \sqrt{4.33^2 + 2.5^2}$$

$k = 25$ بهره سیستم جبران نشده

طبق تعریف :

سیستم نوع یک $\quad e_{ss} = \frac{1}{k_v}$

$$k_v = \lim_{s \to 0} s. G_c(s) = \lim_{s \to 0} s. \frac{k}{s(s+5)}$$

$$k_v = \frac{25}{5} = 5$$

جبران نشده $e_{ss} = \frac{1}{k_v} = 0.2$

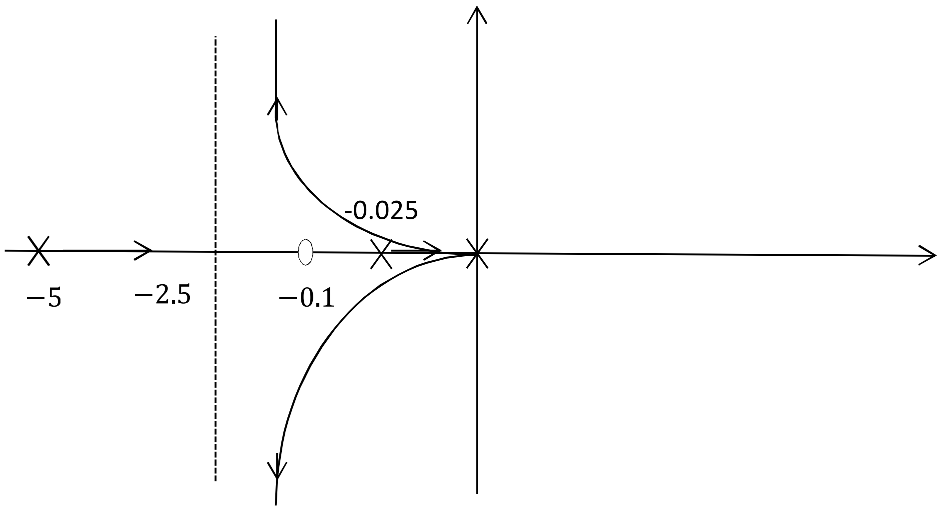
یکی از روش‌های طراحی log آن است که نسبت $\frac{z_0}{p_0}$ را برابر نسبت $\frac{e_{ss}\text{جبران نشده}}{e_{ss}\text{جبران شده}}$ در نظر می گیرند .

$$\frac{z_0}{p_0} = \frac{0.2}{0.05} = 4$$

حال اگر $z_0 = -0.1$ انتخاب کنیم $p_0 = -0.025$ به دست می‌آید بنابراین :

$$G_c(s) = 25.\frac{s+0.1}{s+0.025}$$

$$G_p'(s) = G_c(s).G_p(s) = 25\frac{s+0.1}{s+0.025}.\frac{1}{s(s+5)}$$



تمرین : درستی نتایج تحلیل را با استفاده از نرم افزار MATLAB نشان دهید .