

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \mid \exists \gamma \in \Gamma \ x \in A_\gamma\} \quad \text{الف (تعریف)}$$

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \{x \mid \forall \gamma \in \Gamma \ x \in A_\gamma\} \quad \text{ب}$$

$$\exists \gamma \in \Gamma \ x \in A_\gamma \stackrel{\text{تعریف}}{\equiv} \exists \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge x \in A_\gamma) \quad \text{الف (تذکر)}$$

$$\forall \gamma \in \Gamma \ x \in A_\gamma \stackrel{\text{تعریف}}{\equiv} \forall \gamma (\gamma \in \Gamma \rightarrow x \in A_\gamma) \quad \text{ب}$$

$$\sim (\forall \gamma \in \Gamma \ x \in A_\gamma) \equiv \exists \gamma \in \Gamma \ x \notin A_\gamma \quad \text{الف (تسری)}$$

$$\sim (\exists \gamma \in \Gamma \ x \in A_\gamma) \equiv \forall \gamma \in \Gamma \ x \notin A_\gamma \quad \text{ب}$$

$$\begin{aligned} \sim (\forall \gamma \in \Gamma \ x \in A_\gamma) &\equiv \sim [\forall \gamma (\gamma \in \Gamma \rightarrow x \in A_\gamma)] \quad \text{حل: الف} \\ &\equiv \exists \gamma (\gamma \in \Gamma \wedge x \notin A_\gamma) \\ &\equiv \exists \gamma \in \Gamma \ x \notin A_\gamma \end{aligned}$$

$$A \cap \left( \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma) \quad \text{قضیه در حالت کلی داریم}$$

اثبات. توجه کنید که  $\{A \cap B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$  خود خانواده‌ای اندیس دار از مجموعه‌هاست.

$$x \in A \cap \left( \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \right) \equiv x \in A \wedge x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma \quad \text{بر اساس هر دو داریم}$$

$$\equiv x \in A \wedge (\exists \gamma \in \Gamma \ x \in B_\gamma)$$

$$\stackrel{*}{\equiv} \exists \gamma \in \Gamma (x \in A \wedge x \in B_\gamma)$$

$$\equiv \exists \gamma \in \Gamma \ x \in A \cap B_\gamma$$

$$\equiv x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap B_\gamma)$$

(۵) قضیه. اگر  $\Gamma = \emptyset$ ، آنگاه

$$\bigcup_{\delta \in \Gamma} A_\delta = \emptyset$$

$$x \notin \bigcup_{\delta \in \Gamma} A_\delta \equiv \sim (x \in \bigcup_{\delta \in \Gamma} A_\delta)$$

اثبات. به ازای هر  $x$

$$\equiv \sim (\exists \delta \in \Gamma \quad x \in A_\delta)$$

$$\equiv \forall \delta \in \Gamma \quad x \notin A_\delta$$

$$\equiv \forall \delta (\delta \in \Gamma \rightarrow x \notin A_\delta)$$

چون  $\Gamma = \emptyset$ ، به انتهای مقدم درست است.

تذکر. در عنوان نتیجه ترکه صحت از مجوعه مرجع یا جهانی نمی شود، گفته می شود که این اشتراک وجود ندارد.

---

$$\bigcap_{\delta \in \Gamma} A_\delta = \bigcup_{\delta \in \Gamma} A_\delta$$

(۶) قضیه. اگر  $\Gamma = \emptyset$ ، آنگاه

اثبات. به ازای هر  $x$

$$x \in \bigcap_{\delta \in \Gamma} A_\delta \equiv \forall \delta \in \Gamma \quad x \in A_\delta$$

$$\equiv \forall \delta (\delta \in \Gamma \rightarrow x \in A_\delta)$$

به انتهای مقدم درست است زیرا  $\Gamma = \emptyset$

تذکر مربوط به قضیه ۶ است.