فصل چهارم

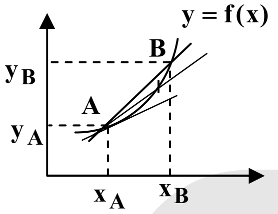
مشتق:

تعریف مشتق:

خط قاطع: خطی است که منحنی تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.

$$\text{شیب خط قاطع}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

خط مماس: در شکل زیر اگر نقطه B به سمت A حرکت کند و بی‌نهایت نزدیک نقطه‌ی A شود، خط قاطع به خط مماس در نقطه A تبدیل می‌شود.



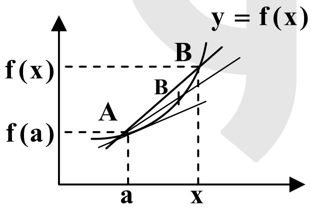
$$\lim_{B\to A}\text{شیب قاطع}\ \text{شیب خط مماس}$$

$$\text{شیب خط مماس}=\lim_{x_B\to x_A}\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

تعریف مشتق:

مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ که با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم برابر است با شیب خط مماس در نقطه $x=a$

تعاریف ریاضی مشتق:



در این قسمت ۲ نوع تعریف ریاضی برای مشتق تابع در نقطه x=a بیان می‌کنیم:

الف)

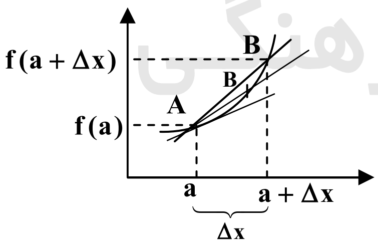
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

در این تعریف داریم:

$x\to a^+ \Rightarrow f'_+(a)$ اگر : مشتق راست در a

$x\to a^- \Rightarrow f'_-(a)$ اگر : مشتق چپ در a

ب)



$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

در این تعریف داریم:

$\Delta x\to 0^+ \Rightarrow f'_+(a)$ اگر : مشتق راست در a

$\Delta x\to 0^- \Rightarrow f'_-(a)$ اگر : مشتق چپ در a

☜مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^2+3x$ را در نقطه $x=1$ به‌دست آورید.

از تعریف الف:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3x)-(1+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)}=5\Rightarrow f'(1)=5$$

از تعریف ب:

$$f'(۱)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(۱+\Delta x)^۲+۳(۱+\Delta x)-(۱+۳)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۱+(\Delta x)^۲+۲\Delta x+۳+۳\Delta x-۴}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(\Delta x)^۲+۵\Delta x}{\Delta x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta x(\Delta x+۵)}{\Delta x}=۵\Rightarrow f'(۱)=۵$$

تذکر: همانطور که در مثال بالا می‌بینیم محاسبه مشتق تابع در یک نقطه با استفاده از تعریف مستلزم محاسبه‌ی یک حد که مبهم $\frac{۰}{۰}$ است می‌باشد و طولانی است در صورتی که با توجه به فرمول‌ها و قضیه‌های مشتق‌گیری می‌توانیم به‌راحتی مقدار مشتق را به‌دست آوریم، مثلاً در مثال بالا داریم:

$$f(x)=x^۲+۳x\Rightarrow f'(x)=۲x+۳\Rightarrow f'(۱)=۲+۳=۵$$

☜ مثال: اگر $f(x)=|x-۲|+\sqrt{۲x}$، حاصل $\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

✍ حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۲+\Delta x)-f(۲)}{\Delta x}=f'_-(۲)=?$$

اگر $x<۲\Rightarrow f(x)=-x+۲+\sqrt{۲x}\Rightarrow f'(x)=-۱+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}\Rightarrow f'_-(۲)=-۱+\frac{۲}{۴}=-\frac{۱}{۲}$

فرمول‌های مشتق‌گیری:

	تابع	مشتق تابع	مثال
۱)	$y=k\Rightarrow$	$y'=۰$	$y=۳\Rightarrow y'=۰$
۲)	$y=kx\Rightarrow$	$y'=k$	$y=۴x\Rightarrow y'=۴$
۳)	$y=x^n\Rightarrow$	$y'=nx^{n-۱}$	$y=x^۳\Rightarrow y'=۳x^۲$
٤)	$y=u^n\Rightarrow$	$y'=nu'u^{n-۱}$	$y=(x^۲+۳x)^۴\Rightarrow y'=۴(۲x+۳)(x^۲+۳x)^۳$
۵)	$y=u\pm v\Rightarrow$	$y'=u'\pm v'$	$y=x^۳-۴x^۲\Rightarrow y'=۳x^۲-۸x$
٦)	$y=u.v\Rightarrow$	$y'=u'v+v'u$	$y=(x^۲+۱)(x^۳+۲x)\Rightarrow y'=(۲x)(x^۳+۲x)+(۳x^۲+۲)(x^۲+۱)$
۷)	$y=\frac{u}{v}\Rightarrow$	$y'=\frac{u'v-v'u}{v^۲}$	$y=\frac{x^۲+۱}{۲x-۳}\Rightarrow y'=\frac{۲x(۲x-۳)-۲(x^۲+۱)}{(۲x-۳)^۲}$
۸)	$y=\frac{۱}{u}\Rightarrow$	$y'=\frac{-u'}{u^۲}$	$y=\frac{۱}{x^۲+۲x}\Rightarrow y'=-\frac{(۲x+۲)}{(x^۲+۲x)^۲}$
۹)	$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow$	$y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$	$y=\frac{۳x+۱}{۲x-۴}\Rightarrow y'=\frac{-۱۲-۲}{(۲x-۴)^۲}=\frac{-۱۴}{(۲x-۴)^۲}$
۱۰)	$y=\sqrt{u}\Rightarrow$	$y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$\begin{cases}y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\\ y=\sqrt{x^۳+۲x}\Rightarrow y'=\frac{۳x^۲+۲}{۲\sqrt{x^۳+۲x}}\end{cases}$
۱۱)	$y=\sqrt[m]{u^n}\Rightarrow$	$y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$\begin{cases}y=\sqrt[۴]{(۲x^۳+۴x)^۳}\Rightarrow y'=\frac{۳(۶x^۲+۴)}{۴\sqrt[۴]{(۲x^۳+۴x)}}\\ y=\sqrt[۳]{x^۲}\Rightarrow y'=\frac{۲(۱)}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\end{cases}$

توابع مثلثاتی:

تابع		مشتق تابع	مثال
۱)	$y = \text{Sin}x \Rightarrow$	$y' = \text{Cos}x$	
۲)	$y = \text{Cos}x \Rightarrow$	$y' = -\text{Sin}x$	
۳)	$y = \tan x \Rightarrow$	$y' = (۱+\tan^{۲} x)$	
٤)	$y = \text{Cot}\, x \Rightarrow$	$y' = -(۱+\text{Cot}^{۲}x)$	
٥)	$y = \text{Sin}u \Rightarrow$	$y' = u'\text{Cos}u$	$y = \text{Sin}\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\text{Cos}\sqrt{x}$
٦)	$y = \text{Cos}u \Rightarrow$	$y' = -u'\text{Sin}u$	$y = \text{Cos}x^{۳} \Rightarrow y' = -۳x^{۲}\text{Sin}x^{۳}$
۷)	$y = \tan u \Rightarrow$	$y' = u'(۱+\tan^{۲} u)$	$y = \tan(x^{۲}+۱) \Rightarrow y' = ۲x(۱+\tan^{۲}(x^{۲}+۱))$
۸)	$y = \text{Cot}\, u \Rightarrow$	$y' = -u'(۱+\text{Cot}^{۲}u)$	$y = \text{Cot}\,\pi x^{۲} \Rightarrow y' = (-۲\pi x)(۱+\text{Cot}^{۲}\pi x^{۲})$
۹)	$y = \text{Sin}^{n}u \Rightarrow$	$y' = nu'\text{Cos}u\text{Sin}^{n-۱}u$	$y = \text{Sin}^{۲}x^{۳} \Rightarrow y' = ۲(۳x^{۲})\text{Cos}x^{۳}\text{Sin}x^{۳}$
۱۰)	$y = \text{Cos}^{n}u \Rightarrow$	$y' = -nu'\text{Sin}u\text{Cos}^{n-۱}u$	$y = \text{Cos}^{۳}۲x \Rightarrow y' = -۳(۲)\text{Sin}۲x\text{Cos}^{۲}۲x$
۱۱)	$y = \tan^{n}u \Rightarrow$	$y' = nu'(۱+\tan^{۲} u)\tan^{n-۱} u$	$y = \tan^{۲}x \Rightarrow y' = ۲(۱)(۱+\tan^{۲} x)\tan x$
۱۲)	$y = \text{Cot}^{n}u \Rightarrow$	$y' = -nu'(۱+\text{Cot}^{۲}u)\text{Cot}^{n-۱}u$	$y = \text{Cot}^{۲}\sqrt{x} \Rightarrow y' = -۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(۱+\text{Cot}^{۲}\sqrt{x})\text{Cot}\sqrt{x}$

☜ مثال: اگر $f(x) = \sqrt{۲\text{Sin}\pi x^{۲}}$، آن‌گاه $f'(\frac{۱}{\sqrt{۶}})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\pi\sqrt{۲}$ ٤) $\pi\sqrt{۳}$

✍ حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{۲\text{Sin}\pi x^{۲}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴\pi x\text{Cos}\pi x^{۲}}{۲\sqrt{۲\text{Sin}\,\pi x^{۲}}} \Rightarrow f'(\frac{۱}{\sqrt{۶}}) = \frac{\cancel{۴}\pi(\frac{۱}{\sqrt{۶}})\text{Cos}\frac{\pi}{۶}}{\cancel{۲}\sqrt{۲\text{Sin}\frac{\pi}{۶}}} = \frac{\frac{۲\pi}{\sqrt{۶}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\sqrt{۲(\frac{۱}{۲})}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}} = \pi\sqrt{\frac{۳}{۶}} = \pi\sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\pi}{\sqrt{۲}} = \frac{\pi\sqrt{۲}}{۲}$$

☜ مثال: اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi}\sqrt{۳+۲\text{Cos}\frac{\pi}{x}}$ به ازای $x = ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ٤) $\frac{۱}{۴}$

✍ حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi}\sqrt{۳+۲\text{Cos}\frac{\pi}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{۳}}{\pi} \times \frac{-۲(\frac{-\pi}{x^{۲}})\text{Sin}\frac{\pi}{x}}{۲\sqrt{۳+۲\text{Cos}\frac{\pi}{x}}} \Rightarrow f'(۳) = \frac{\sqrt{۳}}{\cancel{\pi}} \times \frac{\frac{\cancel{۲}\cancel{\pi}}{۹}\text{Sin}\frac{\pi}{۳}}{\cancel{۲}\sqrt{۳+۲\text{Cos}\frac{\pi}{۳}}} =$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{\cancel{\pi}} \times \frac{\frac{\cancel{۲}\cancel{\pi}}{۹} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\cancel{۲}\sqrt{۳+۲(\frac{۱}{۲})}} = \sqrt{۳} \times \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}}{۲} = \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳۶} = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

☜ مثال: مقدار مشتق $y = \sin x \cos 3x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ٤) 2

✍ حل: گزینه ۱ صحیح است.

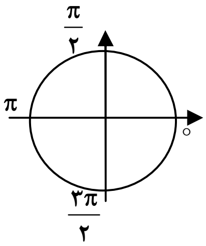
$$y' = \cos x \cos 3x - 3\sin 3x \sin x$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} - 3\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{-\sqrt{2}}{2}) - 3(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{2}{4} - \frac{6}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

☜ مثال: اگر $f(x) = x|\sin \pi x|$ مقدار $f'_+(1)$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) -1 ۳) 1 ٤) π

✍ حل: گزینه ٤ صحیح است.



اگر $x > 1 \Rightarrow \pi x > \pi \Rightarrow \sin \pi x < 0$

$$\Rightarrow f(x) = -x \sin \pi x$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin \pi x + (\pi \cos \pi x)(-x) \xrightarrow{x=1} 0 + \pi(-1)(-1) = \pi$$

دو نکته‌ی مهم در محاسبه مقدار مشتق تابع در یک نقطه:

نکته‌ی ۱:

برای محاسبه‌ی مقدار مشتق تابع در یک نقطه می‌توانیم ابتدا تا حد امکان تابع را ساده کرده سپس از آن مشتق بگیریم به‌عنوان مثال داریم:

☜ مثال ۱:

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x+5} + \sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}} \Rightarrow f'(4) = ?$$

✍ حل:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{x+5}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x+5})}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+5}} = \sqrt{x} + \sqrt{x+5} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

☜ مثال ۲:

$$f(x) = \sin x \cos x \cos 2x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{24}) = ?$$

✍ حل:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 4x) = \frac{1}{4}\sin 4x \Rightarrow f'(x) = \cos 4x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{24}) = \cos 4(\frac{\pi}{24}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نکته‌ی ۲:

در توابعی که به‌صورت ضرب چند عامل هستند اگر مقدار مشتق را در ریشه‌ی یکی از عامل‌ها بخواهیم فقط کافی است مشتق آن عامل را محاسبه و در بقیه‌ی عامل‌ها ضرب کنیم به مثال‌های زیر توجه کنید:

☜ مثال ۱:

$$f(x) = (x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)\dots(x^2-10) \Rightarrow f'(3) = ?$$

✍ حل: با توجه به این‌که $x = 3$ عامل $(x^2 - 9)$ را صفر می‌کند پس فقط کافی است مشتق این عامل را در بقیه ضرب کنیم، زیرا مشتق بقیه پرانتزها وقتی در این عامل ضرب می‌شود حاصل صفر می‌گردد، یعنی:

$$f'(3) = (2x)(x^2-1)(x^2-2)\dots(x^2-8)(x^2-10) = 6(8)(7)\dots(1)(-1) = -6\times 8!$$

مثال ۲:

$$f(x)=\frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} \Rightarrow f'(1)=?$$

حل:

$$f(x)=(x-1)\times\frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} \Rightarrow f'(1)=1\times\frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}\Big|_{x=1}=\frac{1}{16}$$

مثال ۳:

$$f(x)=\operatorname{Sin}x.\operatorname{Cos}^8x \Rightarrow f'(\pi)=?$$

حل:

$$f'(\pi)=(\operatorname{Cos}x.\operatorname{Cos}^8x)=\operatorname{Cos}^9x=\operatorname{Cos}^9\pi=(-1)^9=-1$$

مثال ٤: مشتق تابع $y=(x^2-1)\sqrt[3]{x-1}+x\sqrt{2x}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ٤) $2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به اینکه در عبارت $(x^2-1)\sqrt[3]{x-1}$ دو عامل صفر شونده در $x=1$ داریم، پس مشتق این عبارت در $x=1$ برابر صفر است.

$$y'(1)=0+\sqrt{2x}+\frac{2}{2\sqrt{2x}}\times x\Big|_{x=1}=\sqrt{2}+\frac{2}{2\sqrt{2}}\times 1=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

مشتق تابع مرکب

$$\begin{cases}y=f(u)\\u=g(x)\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} y'_x & = & y'_u & \times & u'_x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{dy}{dx} & = & \frac{dy}{du} & \times & \frac{du}{dx}\end{array}$$

مثال ۱: اگر $y=2u^2-u$ و $u=\operatorname{Sin}2x$، مقدار مشتق y بر حسب x در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}-1$ ۲) $3\sqrt{2}-1$ ۳) $3\sqrt{2}+1$ ٤) $2\sqrt{3}+1$

حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow u=\operatorname{Sin}2\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y'_x=y'_u\times u'_x=(4u-1)(2\operatorname{Cos}2x)\ \xrightarrow[u=\frac{\sqrt{3}}{2}]{x=\frac{\pi}{6}}\ (4\frac{\sqrt{3}}{2}-1)(2\operatorname{Cos}2\frac{\pi}{6})=(2\sqrt{3}-1)(2(\frac{1}{2}))=2\sqrt{3}-1$$

مثال ۲: اگر $y=\sqrt{2u}-\frac{1}{u}$ و $u=\operatorname{Sin}^2x-\operatorname{Cos}2x$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ٤) ۱۵

حل: گزینه ٤ صحیح است.

$$x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow u=\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{Cos}2(\frac{\pi}{4})=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-0=\frac{1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx}=(\frac{2}{2\sqrt{2u}}+\frac{1}{u^2})(2\operatorname{Cos}x\operatorname{Sin}x+2\operatorname{Sin}2x)\ \xrightarrow[u=\frac{1}{2}]{x=\frac{\pi}{4}}\ (1+\frac{1}{\frac{1}{4}})(2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times 1)=5\times 3=15$$

قاعده‌ی زنجیری در مشتق:

با توجه به مشتق تابع مرکب مشتق توابع $y=f(u)$ و $y=(fog)(x)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u'f'(u)$$ و

$$y=(fog)(x)=f\big(g(x)\big) \Rightarrow y'=g'(x)f'\big(g(x)\big)$$

☜ مثال ۱: اگر $f'(2)=-\frac{2}{3}$ باشد، مقدار مشتق تابع $y=f(\sqrt{1-3x})$ به ازای $x=-1$ کدام است؟

۱) -2 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

✍ حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$y=f(\sqrt{1-3x}) \Rightarrow y'=\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}f'(\sqrt{1-3x}) \Rightarrow y'(-1)=\frac{-3}{4}f'(2)$$

چون $f'(2)=-\frac{2}{3} \Rightarrow y'(-1)=-\frac{3}{4}\times-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

☜ مثال ۲: اگر $f(x)=\mathrm{Sin}2x$ و $g(x)=\sqrt{x}$، مقدار مشتق تابع $gof(x)$ در $x=\frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۲) $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ۳) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

✍ حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$y=(gof)(x)=g(f(x)) \Rightarrow y'=f'(x)g'\big(f(x)\big) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} f'(\frac{\pi}{12})g'(f(\frac{\pi}{12}))$$

با توجه به اینکه:

$$f(x)=\mathrm{Sin}2x \Rightarrow f'(x)=2\mathrm{Cos}2x \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{\pi}{12})=\mathrm{Sin}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \\ f'(\frac{\pi}{12})=2\mathrm{Cos}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(\frac{1}{2})=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس:

$$y'(\frac{\pi}{12})=f'(\frac{\pi}{12})\,g'(\frac{1}{2})=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{\frac{6}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

تذکر: با توجه به اینکه تعریف مشتق که در ابتدای این فصل بیان شد در واقع یک حد بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ است لذا برای رفع ابهام آن می‌توانیم از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم که برای مشتق‌گیری در روش هوپیتال می‌توانیم از قاعده زنجیری استفاده کنیم به‌عنوان مثال داریم:

☜ مثال: اگر $f(x)=\tan x$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+2h)-f(\frac{\pi}{4})}{h}$ کدام است؟

✍ حل:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{4}+2h)-f(\frac{\pi}{4})}{h}=\frac{0}{0} \overset{Hop}{\Rightarrow} \lim_{h\to 0}\frac{2f'(\frac{\pi}{4}+2h)-0}{1}=2f'(\frac{\pi}{4})=2(1+\tan^2\frac{\pi}{4})=2(1+1)=4$$

☜ مثال: اگر $y=\tan^{۲}(\pi u)$ و $u=x+\sqrt{x}$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x=\frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) -۸π ۲) -۴π ۳) ۴π ٤) ۸π

✍ حل: گزینه ۱ صحیح است.

$$x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow u=\frac{۱}{۴}+\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(۲\pi(۱+\tan^{۲}(\pi u))\right)\tan(\pi u)(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})$$

$$\xrightarrow[u=\frac{۳}{۴}]{x=\frac{۱}{۴}}(۲\pi(۱+\tan^{۲}\frac{۳\pi}{۴}))(\tan\frac{۳\pi}{۴})(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}})=\left(۲\pi(۱+۱)\right)(-۱)(۲)=-۸\pi$$

آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع:

الف) آهنگ متوسط تغییرات:

آهنگ متوسط تغییرات تابع $y=f(x)$ نسبت به متغیر x هنگامی که متغیر روی بازه‌ی $[x_۱,x_۲]$ از دامنه‌ی تابع تغییر می‌کند عبارتست از:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$$

و یا اگر $x_۲-x_۱=\Delta x$ داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر یک تابع:

آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر تابع در نقطه $x=x_۱$ برابر است با: $f'(x_۱)$

در واقع آهنگ لحظه‌ای حد آهنگ متوسط است وقتی $\Delta x\to ۰$؛ یعنی:

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x_۱+\Delta x)-f(x_۱)}{\Delta x}$$

☜ مثال ۱: آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱۴۴}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x=۵$ تا $x=۹$ کدام است؟

۱) ۰/٤ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/٦ ٤) ۰/۷

✍ حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۹)-f(۵)}{۹-۵}=\frac{\sqrt{۸۱+۱۴۴}-\sqrt{۲۵+۱۴۴}}{۴}=\frac{۱۵-۱۳}{۴}=\frac{۲}{۴}=۰/۵$$

☜ مثال ۲: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی x از ٤ تا ۲۵ تغییر کند برابر آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ی $x=a$ است، a کدام است؟

۱) ۱۱/۷۵ ۲) ۱۲/۲۵ ۳) ۱۲/۵ ٤) ۱۳/۵

✍ حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(۲۵)-f(۴)}{۲۵-۴}=\frac{\sqrt{۲۵}-\sqrt{۴}}{۲۱}=\frac{۵-۲}{۲۱}=\frac{۱}{۷}$$

$$\text{آهنگ لحظه ای}\ f'(a)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=a}\frac{۱}{۲\sqrt{a}}$$

$$\text{طبق فرض}\Rightarrow\frac{۱}{۲\sqrt{a}}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow ۲\sqrt{a}=۷\Rightarrow ۴a=۴۹\Rightarrow a=\frac{۴۹}{۴}=۱۲/۲۵$$

مثال: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}$ آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی $x=۳$ و $\Delta x=۰/۱$ از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه‌ی $x=۳$ چقدر بیش‌تر است؟

۱) ۰/۳۱ ۲) ۰/۴۲ ۳) ۰/۶۲ ۴) ۰/۹۱

حل: گزینه ٤ صحیح است.

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(۳+۰/۱)-f(۳)}{۰/۱}=\frac{(۳/۱)^{۳}-۲۷}{۰/۱}=\frac{۲۹/۷۹۱-۲۷}{۰/۱}=۲۷/۹۱$$

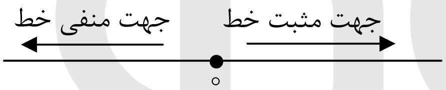
$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=f'(۳)=۳x^{۲}=۳(۳)^{۲}=۲۷$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}-\text{آهنگ متوسط}=۲۷/۹۱-۲۷=۰/۹۱$$

سرعت یک متحرک

اگر متحرکی روی یک خط مستقیم حرکت کند و قانون حرکت آن $s=f(t)$ باشد، سرعت لحظه‌ای متحرک که آنرا با $V(t)$ نشان می‌دهند از دستور $V(t)=f'(t)$ به دست می‌آید به‌شرط آن‌که $f'(t)$ موجود باشد و مشتق دوم $f(t)$ یعنی $f''(t)$ شتاب متحرک را می‌دهد که آنرا با $a(t)$ نمایش می‌دهیم.

سرعت لحظه‌ای متحرک می‌تواند مثبت یا منفی باشد برحسب این‌که متحرک در جهت مثبت خط حرکت کند یا در جهت منفی آن. اگر سرعت لحظه‌ای صفر باشد متحرک در حال سکون است.



مثال: ذره‌ای روی یک خط مستقیم حرکت می‌کند که قانون حرکت آن $s=\frac{۱}{۳}t^{۳}-\frac{۵}{۲}t^{۲}+۶t+۱۰$ است، تعیین کنید ذره در چه بازه‌ی زمانی در جهت مثبت خط و در چه بازه‌ای در جهت منفی خط حرکت می‌کند، هم‌چنین لحظه‌ی تغییر جهت ذره را تعیین کنید.

$$s=f(t)=\frac{۱}{۳}t^{۳}-\frac{۵}{۲}t^{۲}+۶t+۱۰ \Rightarrow f'(t)=t^{۲}-۵t+۶ \quad \text{سرعت}$$

$$t^{۲}-۵t+۶=۰ \Rightarrow (t-۳)(t-۲)=۰$$

t		۲		۳	
v	+	۰	−	۰	+

پس اگر $t<۲$ یا $t>۳$، ذره در جهت مثبت خط و اگر $۲<t<۳$، ذره در جهت منفی خط حرکت می‌کند به ازای $t=۲$ و $t=۳$ سرعت لحظه‌ای صفر است و ذره در این دو لحظه در حال سکون است، بنابراین در لحظه‌ی $t=۲$ و $t=۳$ ذره تغییر جهت می‌دهد.