بسم الله الرحمن الرحیم

سیستم‌های کنترل خطی

باکاربردمتلب

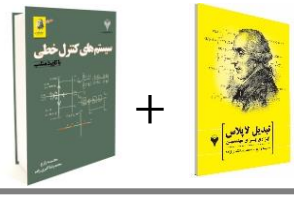
مؤلفین:

مجید زارع

محمدرضا اکبری‌زاده

زمستان ۱۳۹۶

هدیه همراه این کتاب، یک جلد کتاب ***تبدیل لاپلاس ابزاری برای مهندسین*** می‌باشد.



نشر دانشگاهی فرهمند

نام کتاب: سیستم های کنترل خطی با کاربرد متلب

مولفین: مجید زارع – محمدرضا اکبری زاده

ناشر: نشر دانشگاهی فرهمند

سال چاپ: ۱۳۹۶

نوبت چاپ: اول

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

بها به همراه کتاب تبدیل لاپلاس: ۲۵۰۰۰۰ ریال

شابک: ۴-۸۸-۶۲۱۵-۶۰۰-۹۷۸

حق چاپ برای نشر دانشگاهی فرهمند محفوظ می باشد.

فهرست مطالب

فصل اول: مفاهیم اساسی..... ۱۳
تعریف سیستم..... ۱۴
سیستم های زمان پیوسته و زمان گسسته..... ۱۴
سیستم های حافظه دار و بی حافظه..... ۱۴
سیستم عِلّی..... ۱۵
سیستم تغییرپذیر و تغییرناپذیر با زمان..... ۱۵
سیستم خطی و غیرخطی..... ۱۵
سیستم کنترل..... ۱۶
دسته بندی سیستم های کنترل..... ۱۶
کنترل خطی..... ۱۷
کنترل حلقه باز و حلقه بسته..... ۱۷
فیدبک(بازخورد)..... ۱۸
تمرین های فصل اول..... ۱۹

فصل دوم: نمایش و مدلسازی سیستم‌ها..... ۲۱
نمایش سیستم ها..... ۲۱
نمایش معادله دیفرانسیل..... ۲۲
نمایش تابع تبدیل..... ۲۲
بیان چند نکته..... ۲۴
نمایش پاسخ ضربه..... ۲۵
نمایش دیاگرام بلوکی..... ۲۶
ساده سازی دیاگرام بلوکی..... ۲۷
قوانین جبر دیاگرام های بلوکی..... ۲۷
نمایش نمودار گذر سیگنال..... ۳۸
بیان چند نکته..... ۳۹
ساده سازی نمودار گذرسیگنال..... ۳۹
قاعده میسون..... ۳۹
الگوریتم استفاده از قاعده میسون..... ۴۰
نمایش فضای حالت..... ۴۸

مدلسازی سیستم ها.....۵۶
مدلسازی سیستم های الکتریکی.....۵۶
مدلسازی سیستم های مکانیکی.....۵۹
آشنایی با مفاهیم جابجایی،سرعت وشتاب.....۵۹
تابع تبدیل حلقه باز و حلقه بسته.....۶۳
تبدیل فیدبک غیرواحد به فیدبک واحد.....۶۵
تمرین های فصل دوم.....۷۰

فصل سوم: تحلیل پاسخ گذرای سیستم ها.....۷۵
ورودی های نمونه.....۷۵
سیستم مرتبه اول.....۷۷
پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول.....۷۸
پاسخ پله سیستم مرتبه اول.....۷۸
پاسخ شیب سیستم مرتبه اول.....۷۹
بیان چند نکته.....۸۰
سیستم مرتبه دوم.....۸۰
بررسی و حالت زیر میرا.....۸۶
اثر افزودن صفر به تابع تبدیل حلقه بسته.....۹۷
مکان های هندسی خاص.....۱۰۰
تقریب سیستم ها.....۱۰۳
تقریب قطب غالب.....۱۰۳
تقریب پاده (تقریب تاخیر).....۱۰۴
سیستم های مرتبه بالاتر.....۱۰۶
تمرین های فصل سوم.....۱۰۸

فصل چهارم: معیار پایداری روث هرویتز.....۱۱۳
آرایه روث (جدول روث).....۱۱۳
بیان چند نکته.....۱۱۶
حالت های خاص در جدول روث.....۱۱۷
بیان چند نکته.....۱۲۶

بیان چند نکته.....۱۳۱
پایداری سیستم ها.....۱۳۲
انواع پایداری.....۱۳۲
تمرین های فصل چهارم.....۱۴۳

فصل پنجم: تحلیل پاسخ حالت ماندگار سیستم ها.....۱۴۷
خطای حالت ماندگار در سیستم های دارای فیدبک واحد(تعریف اول).....۱۴۷
خطای حالت ماندگار در سیستم های دارای فیدبک غیرواحد(تعریف دوم).....۱۴۸
خطای حالت ماندگار به ورودی پله واحد.....۱۴۸
خطای حالت ماندگار به ورودی شیب واحد.....۱۴۹
خطای حالت ماندگار به ورودی شتاب واحد.....۱۵۰
بیان چند نکته.....۱۵۱
خطای حالت ماندگار ناشی از اغتشاش.....۱۵۵
حساسیت سیستم کنترل.....۱۵۶
تمرین های فصل پنجم.....۱۵۸

فصل ششم: تحلیل سیستم ها به روش مکان هندسی ریشه ها.....۱۶۱
مکان هندسی ریشه ها.....۱۶۱
شروط دامنه و فاز سیستم های فیدبک منفی با $K > 0$ یا فیدبک مثبت با $K < 0$.....۱۶۳
رسم مکان هندسی ریشه ها به ازاء فیدبک منفی با $K > 0$ یا فیدبک مثبت با $K < 0$.....۱۶۶
شروط دامنه و فاز سیستم های فیدبک منفی با $K < 0$ یا فیدبک مثبت با $K > 0$.....۱۸۵
رسم مکان هندسی ریشه ها به ازاء فیدبک منفی با $K < 0$ یا فیدبک مثبت با $K > 0$.....۱۸۵
مکان هندسی سیستم های دارای تأخیر.....۱۹۰
جهش در مکان هندسی.....۱۹۱
تمرین های فصل ششم.....۱۹۵

فصل هفتم: تحلیل سیستم ها به روش پاسخ فرکانسی.....۱۹۷
تابع تبدیل فرکانسی.....۱۹۷
پاسخ حالت ماندگار به ورودی سینوسی.....۱۹۸
نمایش تابع تبدیل فرکانسی.....۲۰۱

نمودار های بود..... ۲۰۱
عوامل پایه در تابع تبدیل حلقه باز..... ۲۰۲
عامل بهره..... ۲۰۳
عامل مشتق‌گیری یا انتگرال گیری (صفر یا قطب در مبدأ)..... ۲۰۴
عامل صفر یا قطب ساده..... ۲۰۷
عامل صفر یا قطب مزدوج..... ۲۱۰
عامل تاخیر..... ۲۱۷
دیاگرام فاز مجانبی..... ۲۱۸
رسم دیاگرام های بود..... ۲۱۹
بیان چند نکته..... ۲۲۷
سیستم های حداقل فاز و سیستم های غیرحداقل فاز..... ۲۲۸
رسم دیاگرام های بود سیستم های غیرحداقل فاز..... ۲۲۹
خطای حالت ماندگار و دیاگرام اندازه بود..... ۲۳۲
دیاگرام نایکوئیست(دیاگرام قطبی)..... ۲۳۵
مشخصات دیاگرام نایکوئیست..... ۲۳۵
دیاگرام نایکوئیست عوامل مختلف..... ۲۳۷
عامل مشتق گیری یا انتگرال گیری (صفر یا قطب در مبدأ)..... ۲۳۷
عامل صفر یا قطب ساده (مرتبه اول)..... ۲۳۸
عامل های مرتبه دوم مزدوج..... ۲۴۰
عامل بهره K..... ۲۴۲
عامل تاخیر..... ۲۴۳
رسم دیاگرام نایکوئیست سیستم های دارای قطب در مبدأ..... ۲۴۶
قضیه نگاشت کوشی..... ۲۵۱
معیار پایداری نایکوئیست..... ۲۵۱
بیان چند نکته..... ۲۵۴
رسم دیاگرام نایکوئیست سیستم های با ضریب میرایی صفر..... ۲۵۷
رسم دیاگرام نایکوئیست به ازاء $K < 0$..... ۲۶۰
بررسی پایداری سیستم های چند حلقه ای..... ۲۶۱
پایداری مشروط سیستم ها..... ۲۶۴

دیاگرام نیکولز (لگاریتم دامنه بر حسب فاز)..... ۲۶۶
تعیین تجربی تابع تبدیل..... ۲۶۷
پایداری نسبی..... ۲۶۷
حاشیه فاز و حاشیه بهره..... ۲۶۸
محاسبه حاشیه فاز..... ۲۷۱
محاسبه حاشیه بهره..... ۲۷۲
بیان چند نکته..... ۲۷۴
تمرین های فصل هفتم..... ۲۷۷

فصل هشتم: طراحی کنترل کننده های کلاسیک..... ۲۸۳
ساختارهای سیستم کنترل..... ۲۸۳
کنترل حلقه باز..... ۲۸۵
کنترل حلقه بسته با یک درجه آزادی..... ۲۸۶
کنترل کننده های کلاسیک..... ۲۸۷
کنترل کننده تناسبی(جبرانساز استاتیکی P)..... ۲۸۸
کنترل کننده تناسبی-انتگرالی (PI)..... ۲۸۹
کنترل کننده تناسبی-مشتقی (PD)..... ۲۹۰
کنترل کننده تناسبی-انتگرالی -مشتقی (PID)..... ۲۹۱
کنترل کننده پسفاز (Lag)..... ۲۹۱
کنترل کننده پیشفاز ($Lead$)..... ۲۹۲
کنترل کننده پیشفاز- پسفاز ($Lead - Lag$)..... ۲۹۳
طراحی کنترل کننده در حوزه زمان..... ۲۹۴
طراحی کنترل کننده در حوزه فرکانس..... ۲۹۵
طراحی کنترل کننده های PID..... ۳۰۵
پایدار سازی..... ۳۰۸
تمرین های فصل هشتم ۳۰۹

فصل نهم: کاربرد متلب در مهندسی کنترل..... ۳۱۳
بخش اول: مروری بر متلب..... ۳۱۳
نرم افزار $MATLAB$..... ۳۱۳

محیط $MATLAB$ ۳۱۴
آرایه،ماتریس،بردار و متغیر ۳۱۵
بردار هندسی و بردار منطقی ۳۱۵
نوشتن دستورات و مشاهده نتایج ۳۱۶
تعریف متغیر ۳۱۶
مشاهده متغیر و نوشتن توضیحات ۳۱۷
تفاوت حروف بزرگ و کوچک ۳۱۸
تعریف بردار منطقی ۳۱۹
آرایه سلولی ۳۱۹
توابع اندازه گیر ۳۱۹
نوشتن چند دستور در یک سطر ۳۲۰
نوشتن یک دستور در چند سطر ۳۲۱
مدیریت نمایش و اجرای دستورات ۳۲۱
اجرا و ضبط دستورات قبلی ۳۲۲
تعیین صحت عبارات ۳۲۲
دستوراتی برای متغیرها ۳۲۳
دریافت اطلاعات از مدارک متلب ۳۲۳
داده های عددی ۳۲۴
متغیرها و ثابت های داخلی ۳۲۴
روش نمایش اعداد ۳۲۵
ضریب مقیاس در نمایش اعداد ۳۲۶
عملگرهای آرایه ای ۳۲۶
عملگرهای رابطه ای (نسبتی) ۳۲۸
عملگرهای منطقی ۳۲۸
برخی توابع داخلی ۳۲۸
اعداد و متغیرهای مختلط ۳۳۲
اندیس اعضاء ماتریس ۳۳۳
ماتریس های پایه ۳۳۴
اعمال تغییرات روی ماتریس ها ۳۳۵

عملگرهای ماتریسی..... ۳۳۶
استخراج ماتریس از ماتریس دیگر..... ۳۳۸
توابع عمل کننده بر مجموعه عناصر ماتریس..... ۳۳۹
ماتریس های نمونه..... ۳۳۹
ماتریس سه بعدی..... ۳۴۰
بردار..... ۳۴۰
دریافت ورودی از کاربر..... ۳۴۱
ارسال خروجی..... ۳۴۲
صفحه های مختصات..... ۳۴۳
رسم منحنی..... ۳۴۳
ساختارهای تصمیم..... ۳۵۳
ساختارهای تکرار..... ۳۵۵
ریاضیات نمادین..... ۳۵۷
حل معادلات..... ۳۶۰
ضرب و تقسیم چندجمله ای ها..... ۳۶۲
بسط به کسرهای جزئی..... ۳۶۲
تبدیل لاپلاس و معکوس تبدیل لاپلاس..... ۳۶۳
بخش دوم :کاربرد متلب در مهندسی کنترل..... ۳۶۴
نمایش سیستم ها..... ۳۶۴
تبدیل انواع نمایش سیستم ها..... ۳۶۶
نمایش و ساده سازی دیاگرام بلوکی..... ۳۶۷
حذف صفر و قطب..... ۳۶۹
پاسخ پله..... ۳۷۰
اثر افزایش ω_n و ζ بر پاسخ پله سیستم مرتبه دوم نمونه..... ۳۷۱
اثر افزودن صفر و قطب به تابع تبدیل حلقه بسته..... ۳۷۳
تعیین مشخصات و پارامترهای پاسخ زمانی..... ۳۷۴
پاسخ ضربه..... ۳۷۵
پاسخ شیب..... ۳۷۷
پاسخ سیستم ها به ورودی دلخواه..... ۳۷۷

پاسخ سیستم ها به شرایط اولیه..... ۳۷۹
مکان هندسی ریشه ها..... ۳۸۰
مکان هندسی ریشه ها بر روی شبکه قطبی..... ۳۸۲
تعیین بهره در نقطه ی خاصی از مکان هندسی ریشه ها..... ۳۸۳
مکان هندسی ریشه های سیستم های غیر حداقل فاز..... ۳۸۴
رسم دیاگرام های بود..... ۳۸۵
رسم دیاگرام نایکوئیست..... ۳۸۷
رسم دیاگرام نیکولز..... ۳۸۹
حاشیه فاز و حاشیه بهره..... ۳۹۰
تعیین اوج تشدید و فرکانس تشدید..... ۳۹۱
طراحی کنترل کننده های کلاسیک..... ۳۹۲
ابزار نمایش $LTI\ Viewer$..... ۳۹۲
ابزار طراحی $SISO$..... ۳۹۶
تمرین های فصل نهم..... ۴۱۶

پیوست الف: تقریب خطی سیستم های غیرخطی..... ۴۲۱
پیوست ب: تبدیل لاپلاس..... ۴۲۵
پیوست پ: الفبای یونانی..... ۴۲۹
پیوست ت: معیارهای شاخص خطا و تنظیم کنترل کننده PID..... ۴۳۱
مراجع..... ۴۳۵
واژه نامه فارسی به انگلیسی..... ۴۳۷

پیشگفتار مولفین

یارفیق
درعاشقی گزیر نباشد زساز و سوز
استاده ام چو شمع مترسان زآتشم

تلاش اولیه بشر برای درک زمان و تعیین موقعیت خود در شبانه روز از اولین گام ها در طراحی سیستم های کنترل است که به ساخت ساعت های آبی منجر گردید. با وقوع انقلاب صنعتی در اروپا کوره‌ها، بویلرها، موتورهای بخار پیشرفته و رگولاتورهای شناور طراحی شدند که امکان کنترل آنها توسط سیستم های ساده امکان پذیر نبود، لذا سیستم های کنترل پیشرفته‌تری پس از انقلاب صنعتی طراحی شدند.

نظریه کنترل کلاسیک که در دهه های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ بر مبنای تابع تبدیل سیستم ها و پاسخ فرکانسی به طراحی سیستم های کنترل با هدف پایدارسازی و کاهش خطای حالت ماندگار سیستم های ساده یک ورودی-یک خروجی می پرداخت، حاوی روش ها و اصولی است که شناخت و مطالعه آن ها به منظور ورود به مباحث پیشرفته کنترل لازم و ضروری می باشد.

درس سیستم های کنترل خطی که به تحلیل و طراحی سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان یک ورودی-یک خروجی می پردازد، در مقطع کارشناسی برای گرایش های مختلف مهندسی برق و رشته های مهندسی همچون مکانیک، شیمی و هوافضا ارائه می شود. این درس دروازه ورود به مطالعات پیشرفته‌تر مهندسی کنترل همچون کنترل مدرن، کنترل بهینه، کنترل تطبیقی، کنترل مقاوم و بسیاری دروس دیگر در زمینه های دیگر مهندسی به ویژه مهندسی کنترل می باشد.

مطالب این کتاب در نه فصل مطابق با سرفصل های مصوب برای درس سیستم های کنترل خطی تدوین شده است. فصل اول به معرفی اصول و تعاریف اولیه در مهندسی کنترل می پردازد. در فصل دوم پس از معرفی انواع روش های نمایش به مدلسازی سیستم های فیزیکی پرداخته می شود. فصل سوم به بررسی و تحلیل پاسخ گذرای سیستم ها پرداخته و در فصل چهارم پس از معرفی آرایه روث به تحلیل پایداری سیستم ها خواهیم پرداخت. فصل پنجم به بررسی پاسخ حالت ماندگار سیستم ها و مفاهیم خطای حالت ماندگار اختصاص دارد. فصل ششم، تحلیل سیستم ها با استفاده از مکان هندسی ریشه ها را شرح می دهد. در فصل هفتم به بررسی پاسخ فرکانسی سیستم ها، انواع دیاگرام های پاسخ فرکانسی، تجزیه و تحلیل دیاگرام ها و بررسی پایداری به کمک پاسخ فرکانسی خواهیم پرداخت. پس از آشنایی کامل با روش های تحلیل سیستم ها، در فصل هشتم به بررسی ویژگی جبرانسازهای مختلف و ساختارهای مختلف کنترل پرداخته و فرآیند طراحی کنترل کننده را با هدف دستیابی به خواسته های طراحی پیش می گیریم. بخش اول از فصل نهم به معرفی مفاهیم اولیه، دستورات و توابع ریاضی در نرم افزار $MATLAB$

اختصاص دارد و در بخش دوم به بررسی توابع و جعبه ابزارهای تحلیل سیستم های کنترل در نرم افزار $MATLAB$ می پردازد.

شرح کامل مطالب درسی به زبانی ساده و روان، بررسی نزدیک به ۱۰۰ مسئله با حل تشریحی کامل و انبوهی از مثال های نرم افزاری موجب می شود دانشجویان پس از مطالعه این کتاب از مطالعه سایر کتب بی نیاز شده، بر مباحث پایه ای در کنترل کلاسیک تسلط یافته و آماده فراگیری مباحث پیشرفته تر در مهندسی کنترل شوند.

کتاب حاضر می تواند به عنوان مرجع در درس سیستم های کنترل خطی راهگشای دانشجویان مقطع کارشناسی گرایش های مختلف مهندسی برق و سایر رشته های مهندسی باشد. همچنین دانشجویان محترم می توانند از فصل نهم این کتاب در درس آزمایشگاهی سیستم های کنترل خطی بهره ببرند.

از خوانندگان محترم انتظار می رود پیش از آغاز مطالعه این کتاب با مفاهیم ریاضیات پایه و عمومی، معادلات دیفرانسیل و تبدیل لاپلاس آشنایی کافی پیدا کنند. کتاب *تبدیل لاپلاس ابزاری برای مهندسین* به عنوان مکمل این کتاب می تواند یاری دهنده دانشجویان در درک مفاهیم تبدیل لاپلاس باشد.

از سرکار خانم مهندس زهرا مقیمی که پیش نویس های اولیه را مطالعه و نظرات سازنده ای در ویرایش نهایی کتاب ارائه نمودند، صمیمانه قدردانی و تشکر می شود. همچنین، از دانشجویان گرامی آقایان مهدی نیازکار، حامد کشتکار و سید مهدی حسینی که در فرآیند آماده سازی کتاب تلاش شایانی نمودند، تشکر به عمل می‌آید.

در خاتمه از جناب آقای علیرضا فرهمند، مدیریت محترم نشر دانشگاهی فرهمند که در فرآیند چاپ و نشر کتاب از هیچ کوششی دریغ نکردند، کمال تشکر و قدردانی را داریم.

در پایان از کلیه خوانندگان، استادان ارجمند، مهندسان گرامی و دانشجویان عزیز تقاضا داریم؛ نظرات، انتقادات، پیشنهادات و اشکالات احتمالی کتاب را از طریق وب سایت شخصی مهندس مجید زارع به آدرس $\boldsymbol{www.majidzare.ir}$ به اطلاع مولفین برسانند.

با آرزوی توفـــیـــق

مـــجـــیـــد زارع – محمدرضا اکبری زاده

بهمن ماه ۱۳۹۶

۱

مفاهیم اساسی

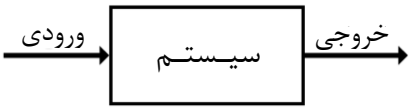
تلاش اولیه بشر برای درک زمان و تعیین موقعیت خود درشبانه روز از اولین گام ها در طراحی سیستم های کنترل است که به ساخت ساعت های آبی منجر گردید. اولین ساعت های آبی توسط یونانی ها و مصری ها در حدود ۲۷۰ سال قبل از میلاد مسیح ساخته شد و تا قرن هفدهم میلادی نیز کاربرد داشت. درهمان دوران سیستم های کنترل سطح روغن چراغ ها نیز طراحی شدند.

با وقوع انقلاب صنعتی در اروپا کوره ها، بویلرها، موتورهای بخار پیشرفته و رگولاتورهای شناور طراحی شدند که امکان کنترل آنها توسط سیستم های ساده امکان پذیر نبود، لذا سیستم های کنترل پیشرفته‌تری پس از انقلاب صنعتی طراحی شدند.

کنترل آسیاب های بادی که برای اولین بار توسط ایرانیان درقرن هفتم میلادی ساخته شدند، گام مهمی در پیاده سازی کنترل خودکار به حساب می آید. در این آسیاب ها دو نوع سیستم کنترل وجود داشت؛ یکی کنترل جهت قرارگیری آسیاب به طوری که بتواند از حداکثر نیروی باد استفاده کند و دیگری کنترل میزان گندم وارده به درون آسیاب. هر دوی این سیستم ها به طور خودکار عمل کرده و نیاز به حضور هیچ کارگری نبود.

تعریف سیستم

سیستم های فیزیکی، به طور کلی از پیوستن قطعات، دستگاه ها و یا سیستم های کوچکتر ایجاد می شوند. یک سیستم در زمینه های مختلف، از پردازش سیگنال و مخابرات گرفته تا موتورهای الکترومکانیکی، وسایل نقلیه خودکار و دستگاه های فرآیند شیمیایی می تواند به عنوان فرآیندی در نظر گرفته شود که درآن سیگنال های ورودی توسط سیستم به سیگنال های مطلوب تبدیل می شوند و یا سبب می شود که سیستم به نحوی پاسخ بدهد و حاصل آن پاسخ، سیگنال های دیگری به نام خروجی باشد.



شکل ۱-۱

تعریف ورودی : به طورکلی کلیه عوامل که به طور خواسته یا ناخواسته برسیستم اثر می گذارند، ورودی نام دارند. البته معمولاً ورودی های مزاحم و ناخواسته به دلیل اینکه موجب انحراف خروجی از مقدار مطلوب می گردند و در کار کنترل اختلال ایجاد می کنند را نویز یا اغتشاش می نامند. یک سیستم ممکن است دارای چندین ورودی مختلف باشد.

تعریف خروجی : خروجی یک سیستم، متغیری از آن سیستم است که رفتار و تغییرات آن مورد توجه ما می باشد. یک سیستم می تواند چندین خروجی داشته باشد.

تعریف فرآیند (پروسه) : مجموعه اقدامات و فعالیت هایی که درسیستم انجام می شود را فرآیند می گویند.

سیستم های زمان پیوسته و زمان گسسته

سیستم زمان پیوسته سیستمی است که در آن اگر سیگنال های ورودی پیوسته به سیستم اعمال شود، سیگنال های خروجی پیوسته با زمان را تولید می کند. به همین ترتیب سیستم زمان گسسته سیستمی است که ورودی های زمان گسسته را به خروجی های زمان گسسته تبدیل می کند.

سیستم های حافظه دار و بی حافظه

سیستم بدون حافظه یا استاتیک سیستمی است که درآن خروجی دریک زمان مشخص، فقط به ورودی در همان زمان وابسته باشد. سیستم حافظه دار یا دینامیک سیستمی است که درآن خروجی دریک زمان مشخص، علاوه بر ورودی درآن زمان، به ورودی های قبلی نیز وابسته باشد.

سیستم عِلّی

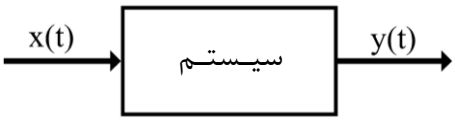
سیستمی را علّی می گوییم که خروجی آن در هر لحظه از زمان فقط به مقادیر ورودی در لحظه فعلی و گذشته وابسته باشد. چون خروجی سیستم های علّی نمی تواند مقادیر ورودی آینده را پیشگویی نماید، چنین سیستمی را معمولاً غیرپیشگو می گویند. تمام سیستم های بی حافظه علّی اند، چون خروجی فقط به مقدار فعلی ورودی وابسته است. سیستمی را که علّی نباشد، غیر علّی گویند.

سیستم تغییر پذیر و تغییر ناپذیر با زمان

سیستمی تغییر پذیر بازمان است که رفتار و مشخصه های آن درطی زمان تغییر نماید. سیستمی تغییر ناپذیر بازمان است که رفتار و مشخصه هایش درطول زمان ثابت باشد.

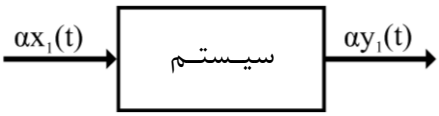
سیستم خطی و غیر خطی

سیستم خطی، سیستمی است که دو خاصیت مهم جمع پذیری و همگنی را دارا باشد. یک سیستم را با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

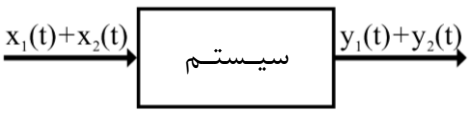


شکل ۱-۲

شروط همگنی و جمع پذیری به ترتیب در شکل های ۱-۳ و ۱-۴ بیان شده اند.

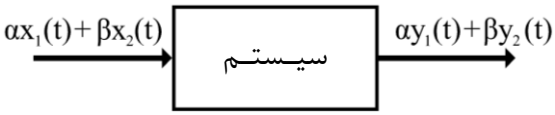


شکل ۱-۳



شکل ۱-۴

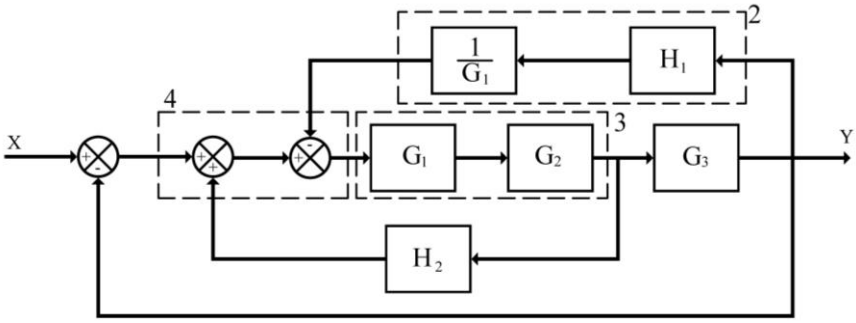
بنابر توضیحات داده شده، سیستم خطی سیستمی است که هر دو شرط همگنی و جمع پذیری را به طور همزمان دارا باشد. بنابراین:



شکل ۱-۵

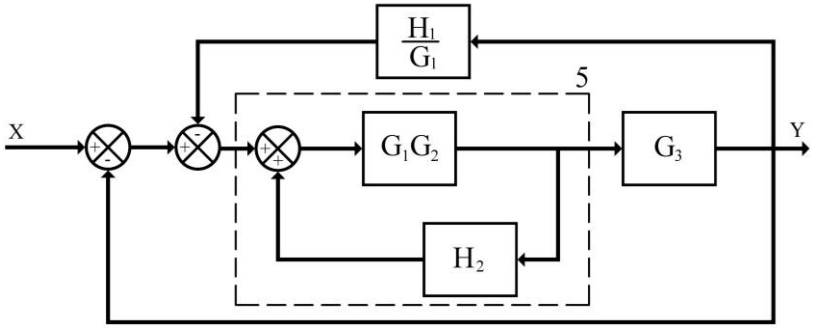
سیستمی که شرایط خطی بودن را نداشته باشد، سیستم غیر خطی نامیده می شود.

با توجه به قانون شماره پنج برای بخش 1 خواهیم داشت:



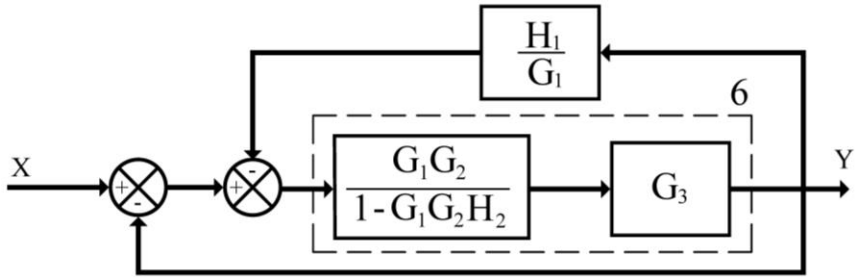
شکل ۲-۱۷

با استفاده از قانون شماره یک برای بخش های 2 و 3 و قانون شماره سه برای بخش 4 خواهیم داشت:



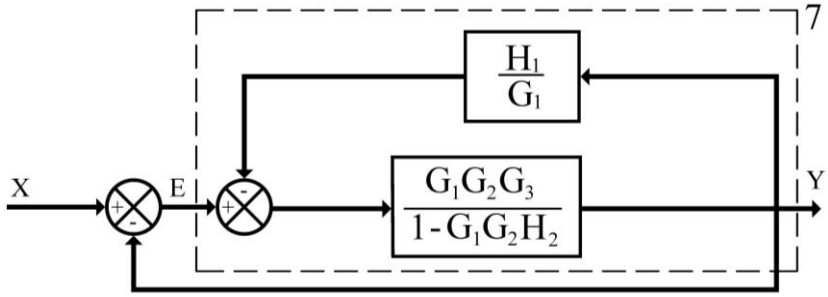
شکل ۲-۱۸

با استفاده از قانون شماره هشت (قانون فیدبک) و با توجه به فیدبک مثبت برای بخش 5 خواهیم داشت:



شکل ۲-۱۹

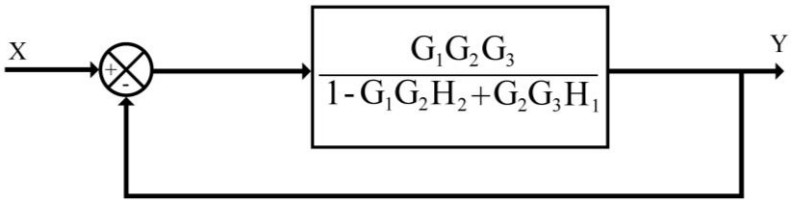
به کمک قانون شماره یک برای بخش 6 خواهیم داشت:



شکل ۲-۲۰

با استفاده از قانون فیدبک و با توجه به وجود فیدبک منفی برای بخش 7 داریم:

$$\frac{Y}{E}=\frac{\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2G_3}}{1+\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_2}\,\frac{H_1}{G_1}}=\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_2+G_2G_3H_1}$$

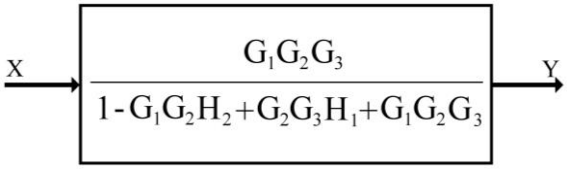


شکل ۲-۲۱

مشاهده می شود که به یک اتصال فیدبک واحد رسیدیم، مجدداً به کمک قانون فیدبک خواهیم داشت:

$$\frac{Y}{X}=\frac{\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_2+G_2G_3H_1}}{1+\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_2+G_2G_3H_1}}=\frac{G_1G_2G_3}{1-G_1G_2H_2+G_2G_3H_1+G_1G_2G_3}$$

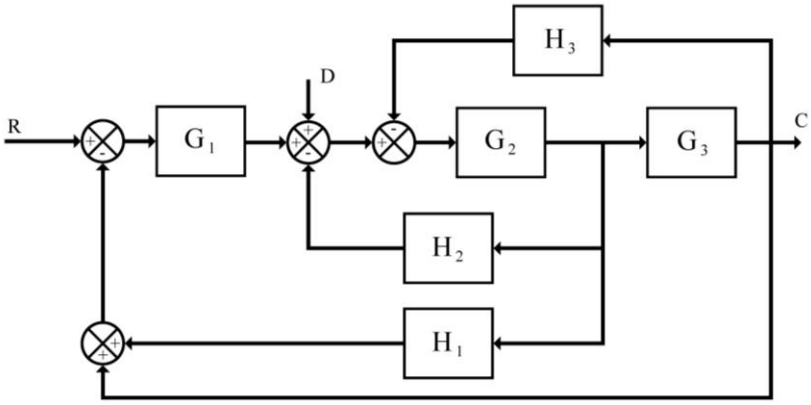
در نهایت با تعیین تابع تبدیل خروجی به ورودی سیستم، خواهیم داشت:



شکل ۲-۲۲

✐ مثال۲-۳:

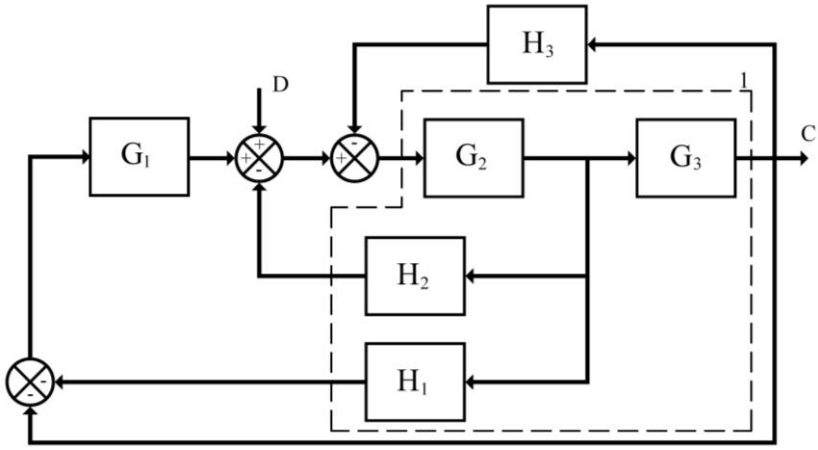
در دیاگرام بلوکی شکل زیر تابع تبدیل $\frac{C}{D}$ را تعیین کنید.



شکل ۲-۲۳

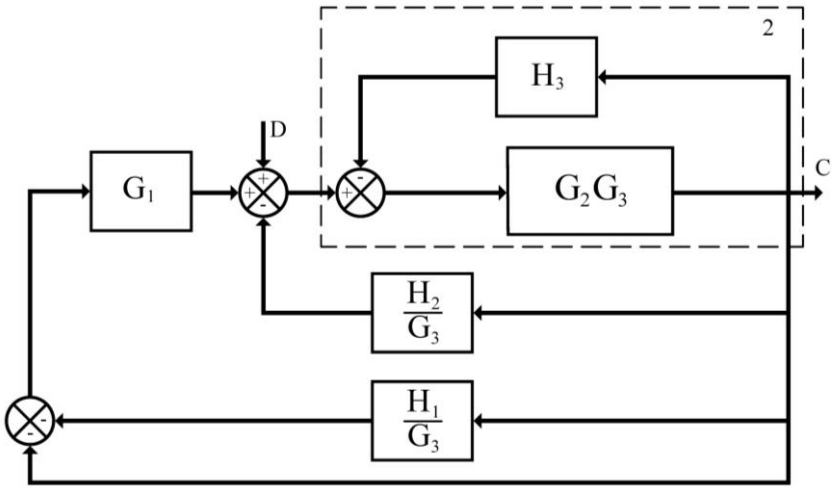
☑ **پاسخ:**

با توجه به اینکه سیستم دارای دو ورودی است، ورودی R را برابر صفر قرار می دهیم:



شکل ۲-۲۴

به کمک قانون شماره هفت برای بخش 1 خواهیم داشت:



شکل ۲-۲۵

۴

معیار پایداری روث هرویتز

مسئله مهم و اساسی در بررسی سیستم های کنترل، موضوع پایداری است؛ که به بررسی و تحلیل شرایط پایداری، عوامل و شرایط ناپایدار کننده و چگونگی پایدار کردن یک سیستم مربوط می شود. بسیاری از مطالعات سیستم ها با فرض پایدار بودن و در شرایط پایداری سیستم، انجام می شود. روش های مختلفی برای تعیین پایداری سیستم ها وجود دارد. یکی از پایه ای ترین روش ها، استفاده از روش آرایه ای روث و معیار پایداری هرویتز می باشد. یک سیستم تنها و تنها در صورتی پایدار است، که تمام قطب های حلقه بسته آن در نیم صفحه چپ محور موهومی قرار داشته باشند. در این فصل ابتدا آرایه روث و محاسبات مربوط به آن ارائه شده و سپس تعاریف مختلف پایداری و چگونگی بررسی آنها ارائه می گردد.

آرایه روث (جدول روث)

ادوارد جان روث (۱۸۳۱-۱۹۰۷ میلادی) یک ریاضیدان انگلیسی بود که توانست روشی ارائه کند که به کمک آن بتوان جایگاه تقریبی ریشه های یک چند جمله ای را تعیین کرد. این روش که یک روش جدولی است تنها با استفاده از ضرایب چند جمله ای، تعیین می کند که ریشه های معادله چند جمله ای به طور تقریبی درکجای صفحه s قرار گرفته اند. چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

a_0 تا a_n که ضرایب ثابت چند جمله ای نامیده می شوند، همگی اعداد حقیقی هستند.

اگر همه ضرایب ثابت چند جمله ای، هم علامت و غیر صفر باشند؛ می توان گفت احتمالاً (نه قطعاً) همه ریشه های معادله، سمت چپ محور موهومی قرار دارند. به طور خلاصه شروط لازم روث عبارت اند از:

۱ - هم علامت بودن همه ضرایب

۲ - غیرصفر بودن همه ضرایب

باید در نظر داشت که اگر یکی از دو شرط فوق برقرار نباشد، معادله قطعاً دارای ریشه هایی در نیم صفحه سمت راست محور موهومی خواهد بود.

آریه روث (جدول روث) به صورت زیر تشکیل می شود:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_{n-1} \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & a_n \\
s^{n-2} & b_1 = \dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} & b_2 = \dfrac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} & b_3 = \dfrac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1} & \dots & & \\
s^{n-3} & c_1 = \dfrac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1} & c_2 = \dfrac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1} & \dots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^0 & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

بر اساس آرایه روث، شرط کافی روث به صورت زیر بیان می شود:

اگر در ستون اول آرایه روث تغییر علامتی رخ ندهد، در این صورت همه ی ریشه های معادله چند جمله ای در سمت چپ محور موهومی قرار دارند.

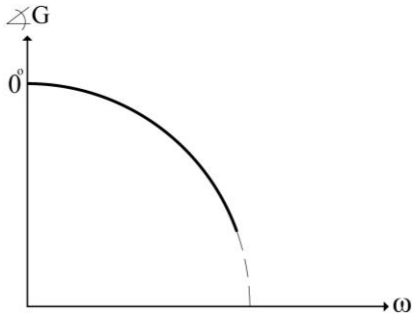
همچنین اگر در ستون اول تغییر علامت رخ دهد، به ازاء هر تغییر علامت، معادله دارای یک ریشه در نیم صفحه سمت راست صفحه s می باشد.

✐ مثال۴-۱:

به کمک آرایه روث، تعداد ریشه های معادله زیر را که سمت راست و سمت چپ محور موهومی قرار دارند، تعیین کنید.

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

شکل ۷-۳۳



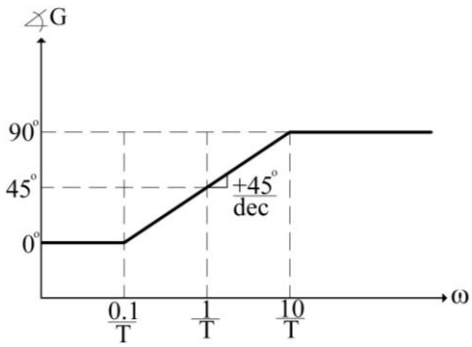
شکل ۷-۳۴

دیاگرام فاز مجانبی

تا به اینجا چگونگی رسم دیاگرام های اندازه دقیق و مجانبی و همچنین دیاگرام فاز دقیق مورد بررسی قرار گرفت. دیاگرام فاز مجانبی که تقریباً شبیه به دیاگرام فاز دقیق می باشد با شیب صفر آغاز شده تا به یک دهه قبل از فرکانس گوشه برسد، سپس با شیب $+45\frac{deg}{dec}$ (برای صفر مرتبه اول) یا $-45\frac{deg}{dec}$ (برای قطب مرتبه اول) افزایش یا کاهش می یابد تا به یک دهه بعد از فرکانس گوشه برسد، سپس مجدداً شیب آن صفر خواهد شد. بدیهی است برای عوامل مرتبه n مقادیر شیب n برابر می شود. به عنوان نمونه دو عامل پایه ای زیر ارائه می شوند.

۱ - عامل صفر مرتبه اول

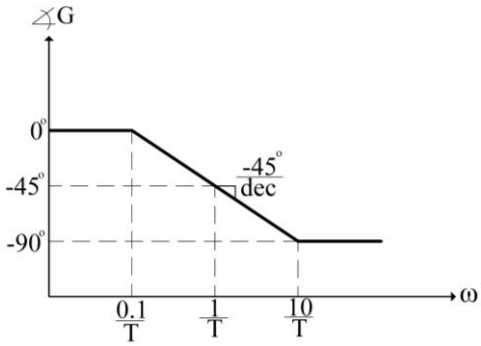
$$G(s) = 1 + sT$$



شکل ۷-۳۵

۲ - عامل قطب مرتبه اول

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT}$$



شکل ۷-۳۶

رسم دیاگرام های بود

به منظور رسم دیاگرام های اندازه و فاز بود، ابتدا فرکانس های گوشه را به ترتیب از کوچک به بزرگ تعیین می کنیم. سپس با شروع رسم دیاگرام ها از فرکانس های پایین و تغییر شیب دیاگرام در فرکانس های گوشه با توجه به نوع عامل مربوطه (صفر یا قطب) رسم دیاگرام ها را تا تکمیل آن ها ادامه می دهیم.

✐ مثال۷-۳:

دیاگرام های اندازه و فاز بود تابع تبدیل های زیر را رسم کنید. دیاگرام های اندازه به صورت مجانبی و دیاگرام های فاز به هر دو صورت دقیق و مجانبی رسم شوند.

$$G_1(s) = \frac{1}{2s+1} \qquad G_2(s) = \frac{100}{(s+6)^3}$$

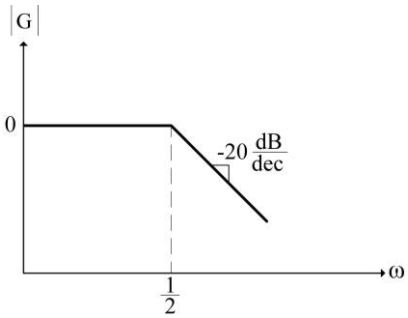
$$G_3(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \qquad G_4(s) = (3s+1)^2$$

$$G_5(s) = 10(s+1)^3 \qquad G_6(s) = (6s+1)^3$$

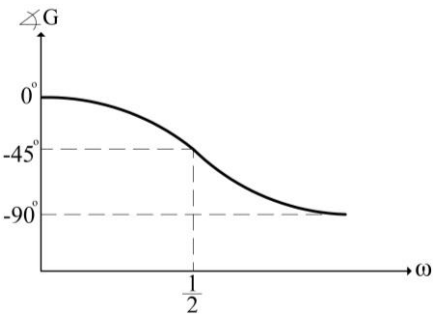
☑ پاسخ:

بر اساس توضیحات متن درس خواهیم داشت:

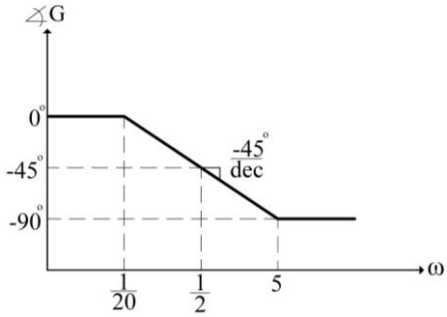
$(G_1(s)$



شکل ۷-۳۷

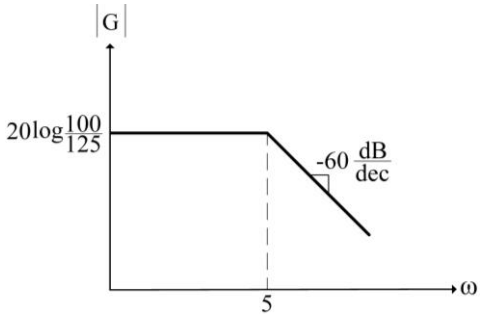


شکل ۷-۳۸

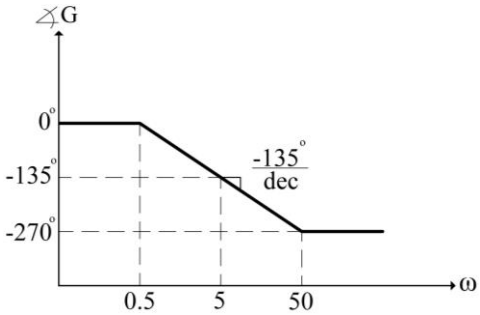


شکل ۷-۳۹

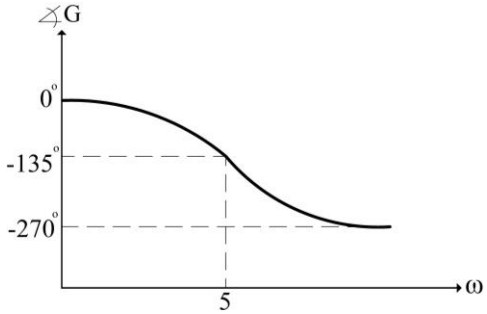
$(G_2(s)$



شکل ۷-۴۰

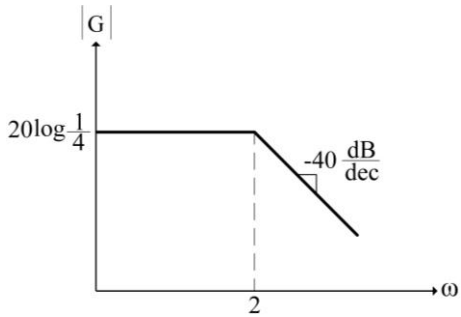


شکل ۷-۴۲

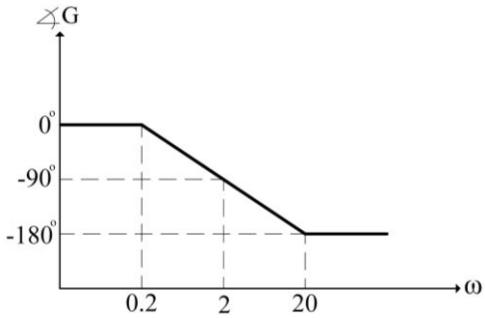


شکل ۷-۴۱

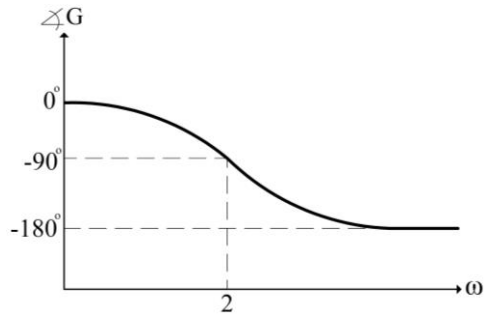
$(G_3(s)$



شکل ۷-۴۳



شکل ۷-۴۵



شکل ۷-۴۴

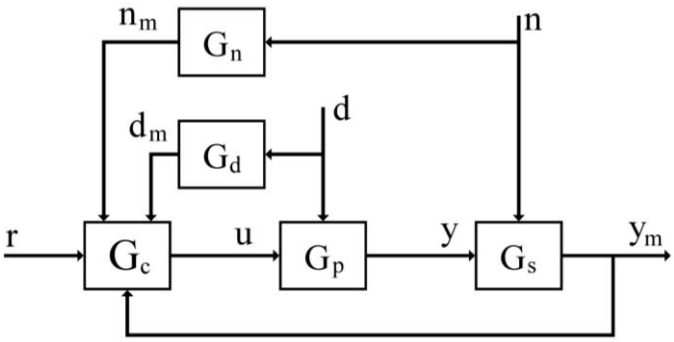
۸

طراحی کنترل‌کننده‌های کلاسیک

در فصول گذشته، ابزارها و روش های گوناگون تحلیل سیستم های کنترل خطی به طور کامل ارائه و مورد بررسی قرار گرفتند. به طور کلی هدف از طراحی کنترل کننده، دنبال کردن ورودی در حضور تغییرات سیستم (فرآیند)، اغتشاش های ناخواسته و خطاهای اندازه گیری می باشد. تغییرات سیستم (فرآیند) عمدتاً ناشی از نامعینی های موجود در مدل استخراج شده می باشد. در طراحی سیستم های کنترل اگر چیزی بیش از تنظیم یک مقدار بهره، لازم باشد، باید به سراغ طراحی کنترل کننده مناسب رفت. در واقع می توان هدف از کنترل سیستم را کاهش اثرات خطاها، نویزهای اندازه گیری، اغتشاش های ناخواسته و همچنین کاهش وابستگی پاسخ خروجی به مدل سیستم (فرآیند) عنوان کرد. البته موارد دیگری همچون سرعت پاسخ، حاشیه پایداری مناسب و خطای حالت ماندگار کم نیز در طراحی کنترل کننده ها باید مورد توجه قرار گیرند. در این فصل پس از معرفی ساختارهای مختلف سیستم کنترل و معرفی انواع کنترل کننده های کلاسیک به طراحی کنترل کننده با استفاده از ابزارهای مختلف در حوزه زمان و حوزه فرکانس می پردازیم.

ساختارهای سیستم کنترل

دیاگرام بلوکی سیستم کنترل شکل زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۸-۱

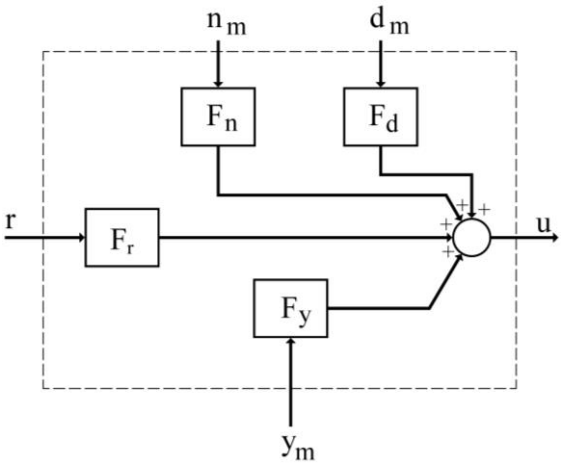
در دیاگرام بلوکی شکل فوق، G_p مدل فرآیند، G_c کنترل کننده، G_s ، G_d و G_n حسگرهایی برای اندازه گیری سیگنال های خروجی فرآیند، اغتشاش و نویز می باشند. r سیگنال ورودی، n نویز اندازه گیری و d اغتشاش ناخواسته ، u سیگنال کنترل و y خروجی فرآیند می باشند. y_m سیگنال خروجی فرآیند که توسط حسگر G_s اندازه گیری شده است؛ n_m نویز اندازه گیری شده توسط حسگر G_n و d_m اغتشاش اندازه گیری شده توسط سنسور G_d می باشند.

با توجه به دیاگرام بلوکی شکل فوق خواهیم داشت:

$$y = G_p u + d$$

$$y_m = G_s y + n$$

با در نظر گرفتن بلوک کنترل کننده G_c به صورت شکل زیر خواهیم داشت:



شکل ۸-۲

$$u = F_r . r + F_y . y_m + F_n . n_m + F_d . d_m$$

۱ – تولید عدد تصادفی

با استفاده از تابع $rand(m,n)$ یک ماتریس تصادفی $m \times n$ ایجاد می شود.

```
>> rand(1,4)
ans =

      0.10          0.28          0.55          0.96
```

به کمک رابطه زیر می توان بردار rnd را با N عدد تصادفی صحیح بین $Minn$ و $Maxx$ تعیین کرد.

$$rnd = round\big(\ (Maxx - Minn) * rand(1,N)\big) + \ Minn$$

```
>> N=4; Minn=5; Maxx=15;
>> rnd=round(   (Maxx-Minn)*rand(1,N))+ Minn
rnd =

        13.00         6.00         9.00        14.00
```

۲ – تولید آرایه با تکرار آرایه دیگر

تابع $A = repmat(B,M,N)$ ، آرایه B را M بار افقی و N بار عمودی تکرار کرده و در آرایه A قرار می دهد .

```
>> A=repmat([3 6 2],2,1)
A =

     3     6     2

     3     6     2
```

۲ – توابع تحلیل داده ها

برخی توابع تحلیل آماری داده ها در جدول زیر ارائه شده اند.

نام تابع	max( )	min( )	mean( )	hist( )	std( )	sort( )	sum( )
خروجی	عنصر ماکزیمم	عنصر مینیمم	میانگین	پیشینه نگار	انحراف میانه	مرتب سازی	مجموع

```
>> a=[2,6];

>> max(a)*mean(a)
```

```
ans =

    24
```

۳ – توابع زمانی

برخی توابع زمانی در جدول زیر ارائه شده اند.

دستور	شرح عملکرد
tic	شروع تایمر
toc	نمایش زمان تایمر
$clock$	روز و ساعت
$date$	تاریخ روز
$calendar$	تقویم ماه جاری
$cputime$	زمان cpu پس از آغاز متلب
$etime(t1,t2)$	فاصله بین $t1$ و $t2$
$calendar(yyyy,mm)$	تقویم سال و ماه معین

$t1$ و $t2$ در تابع $etime$ ، حتما باید از اجرای $clock$ به دست آمده باشند.

```
>> calendar(1994,01)
```

```
                    Jan 1994

     S     M    Tu     W    Th     F     S

     0     0     0     0     0     0     1

     2     3     4     5     6     7     8

     9    10    11    12    13    14    15

    16    17    18    19    20    21    22

    23    24    25    26    27    28    29

    30    31     0     0     0     0     0
```

```
>> date
```

```
ans =

08-Dec-2017
```

```
>> tic
>> toc
```

```
Elapsed time is 6.445225 seconds.
```

```
>> fix(clock)
```

```
ans =

      2017          12           8           1          17
```

۴ – برخی توابع ریاضیاتی

برخی توابع ریاضی پرکاربرد در جدول زیر ارائه شده اند.

دستور	نام تابع
$abs(x)$	قدر مطلق
$sqrt(x)$	ریشه دوم
$log10(x)$	لگاریتم مبنای ده
$\log(x)$	لگاریتم طبیعی
$\exp(x)$	e^x
$\sin(x)\,,\cos(x)\,,\tan(x)\,,\cot(x)$	توابع مثلثاتی
$a\sin(x)\,,\mathrm{acos}(x)\,,\mathrm{atan}(x)$	توابع مثلثاتی معکوس
$round(x)$	گرد کننده x به نزدیک ترین عدد صحیح
$fix(x)$	گرد کننده x به نزدیک ترین عدد صحیح در جهت صفر
$floor(x)$	گرد کننده x به نزدیک ترین عدد صحیح در جهت $-\infty$
$ceil(x)$	گرد کننده x به نزدیک ترین عدد صحیح در جهت $+\infty$
$rem(x,y)$	باقی مانده تقسیم با علامت موافق x
$mod(x,y)$	باقی مانده تقسیم با علامت موافق y
$gcd(x,y)$	بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک
$lcm(x,y)$	کوچکترین مضرب مشترک

$rat(x)$	نمایش x به صورت مجموعی از عدد صحیح و کسر متعارفی
$[t,n]=rat(x)$	نزدیک ترین کسر متعارفی به x به صورت t/n
$bessel(x)$	تابع بسل
$legendre(x)$	تابع لژاندر
$beta(x)$	تابع بتا
$gamma(x)$	تابع گاما

```
>> vL=400;iL=10; phi=0.5548;
>> p=sqrt(3).*vL.*iL.*cos(phi);
```

```
p =

   5.8890e+03
```

اعداد و متغیرهای مختلط

در متلب اعداد مختلط تعریف نشده اند. به عبارت بهتر یکه موهومی $i=j=\sqrt{-1}$ در متلب تعریف نشده است. بنابراین به منظور ایجاد امکان کار با اعداد مختلط باید یکه موهومی $\sqrt{-1}$ در متلب تعریف شود. اعداد مختلط را به دو فرم دکارتی و قطبی می توان در متلب وارد کرد.

```
>> sqrt(-1),i,j;
>> z1=3+4j;
>> z2=6+8i;
>> z3=9+j*5;
>> z4=sqrt(2)*exp(j*pi/4);
>> Z=[z1;z2;z3;z4]
```

```
Z =

   3.0000 + 4.0000i

   6.0000 + 8.0000i

   9.0000 + 5.0000i

   1.0000 + 1.0000i
```

برخی توابع مربوط به متغیرهای مختلط در جدول زیر ارائه شده اند. عدد مختلط $z = a + jb$ را در نظر بگیرید.

تابع	شرح	مقدار
$real(z)$	بخش حقیقی z	a
$imag(z)$	بخش موهومی z	a
$abs(z)$	اندازه (قدر مطلق) z	$\sqrt{a^2+b^2}$
$\text{angle}(z)$	زاویه z در نمایش قطبی	$\tan^{-1} b/a$
$\text{conj}(z)$	مزدوج z	$a - jb$

```
>> j,i=sqrt(-1);
>> z1=5+5j;
>> A=[real(z1); abs(z1); angle(z1); conj(z1)]
```

```
A =

   5.0000 + 0.0000i

   7.0711 + 0.0000i

   0.7854 + 0.0000i

   5.0000 - 5.0000i
```

اندیس اعضاء ماتریس

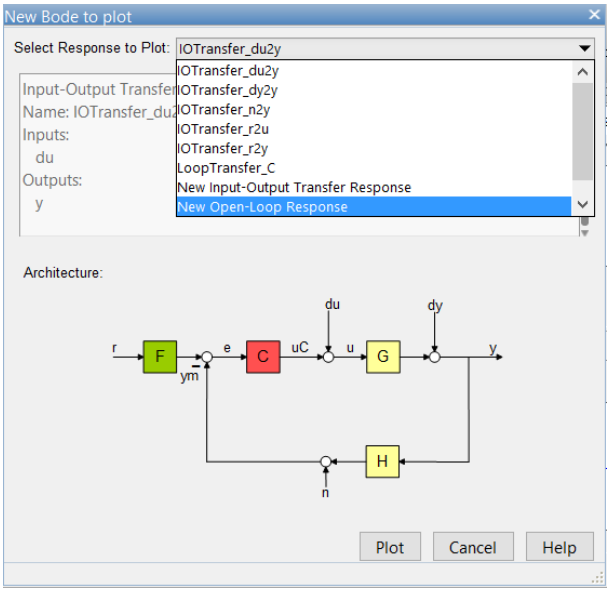
هر درایه (عنصر، عضو) ماتریس، اندیسی دارد که با آن شناخته می شود. به عنوان نمونه برای یک ماتریس 2×2 ، در متلب جایگاه اعضاء به صورت زیر تعیین می شوند.

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) \\ (2,1) & (2,2) \end{bmatrix}$$

در متلب عناصر ماتریس به صورت زیرهم در حافظه قرار می گیرند، بنابراین اگر با تک اندیس فراخوانی شوند، ستون به ستون نمایش داده می شوند.

```
>> A=[1 2 3; 8 6 7; 5 9 0];
>> A(2,1)
```

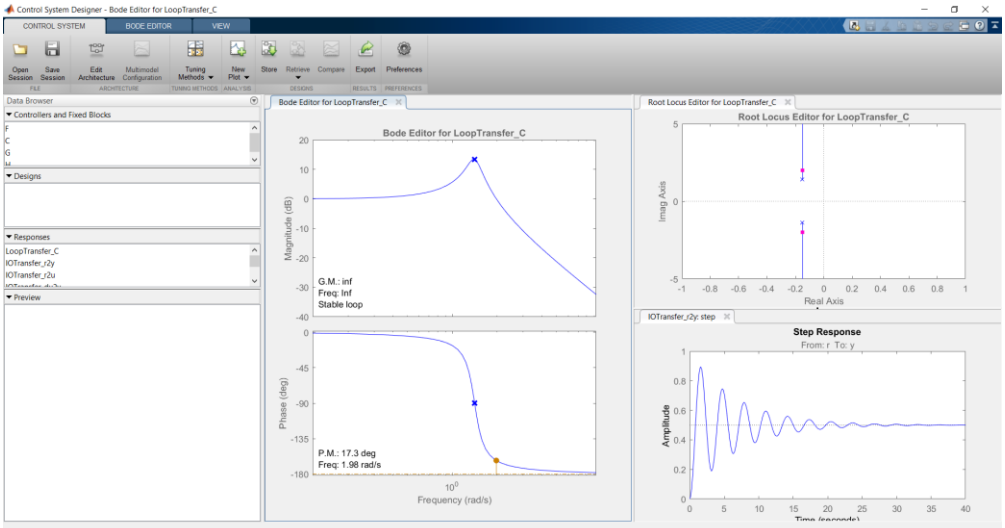
```
ans =

     8
```



شکل ۹-۶۸

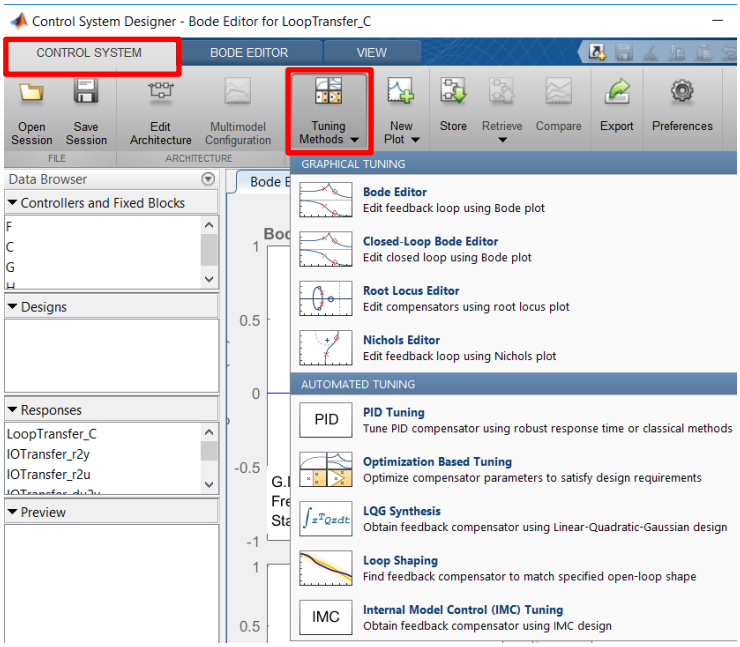
با کلیک راست کردن بر روی کلیه منحنی های نمایش داده شده می توان مشخصات مختلف مربوط به آن منحنی از جمله حاشیه فاز و حاشیه بهره، زمان نشست، فراجهش و ... را نمایش داد و سایر تنظیمات مربوط به منحنی ها را اعمال کرد.

با تعریف تابع تبدیل زیرسیستم ها و تایید آن ها به طور پیش فرض نمودارهای بود و مکان هندسی ریشه های تابع تبدیل حلقه باز با امکان ویرایش و منحنی پاسخ پله تابع تبدیل خروجی به ورودی مرجع بدون امکان ویرایش نمایش داده می شوند.



شکل ۹-۶۹

به منظور آغاز فرآیند تنظیم کنترل کننده از طریق زبانه $CONTROL\ SYSTEM$ و گزینه $Tuning\ Methods$ می توان به روش های تنظیم گرافیکی و خودکار دسترسی پیدا کرد.



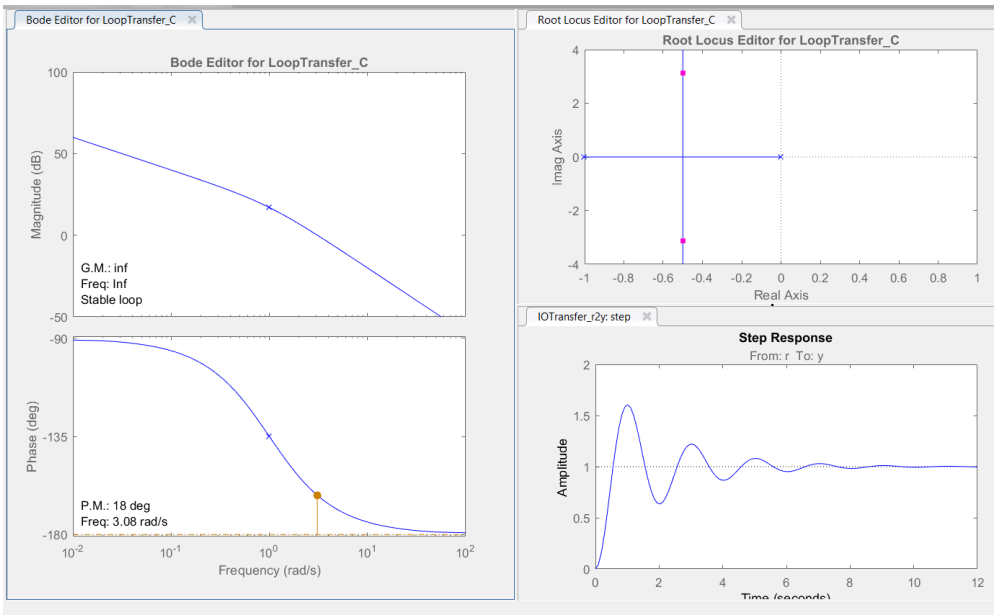
شکل ۹-۷۰

با استفاده از روش های تنظیم گرافیکی اثر هر گونه تغییر در نمودار مکان هندسی یا دیاگرام های پاسخ فرکانسی، به طور همزمان بر روی نمودارهای نمایش داده شده قابل مشاهده خواهد بود.

در ادامه با ارائه دو مثال به بررسی چگونگی تنظیم کنترل کننده مناسب برای دستیابی به پاسخ های مطلوب به دو روش مکان هندسی ریشه ها و دیاگرام های بود خواهیم پرداخت.

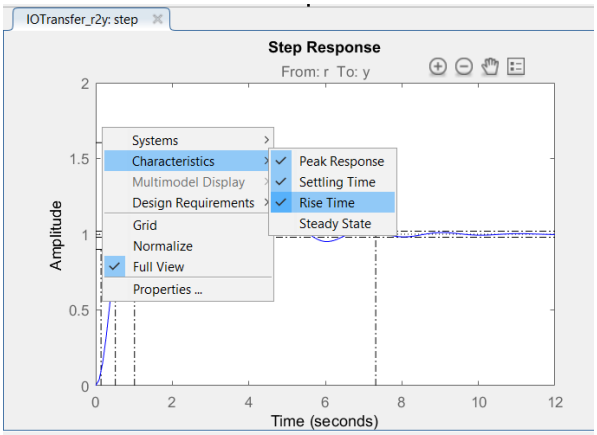
۱ – تنظیم کنترل کننده بر اساس مکان هندسی ریشه ها

مطابق توضیحات ارائه شده در رابطه با چگونگی تعیین ساختار سیستم و معرفی زیر سیستم های مربوط به آن، تابع تبدیل حلقه باز مثال ۸-۱ را به عنوان تابع تبدیل زیر سیستم G در ساختار پیش فرض $Configuration\ 1$ تعریف کرده و زیر سیستم های پیش فیلتر F و حسگر H در مقدار پیش فرض یعنی 1 ، بدون تغییر باقی می مانند. پس از تعریف تابع تبدیل زیرسیستم ها و تایید آن ها، نمودارهای بود و مکان هندسی ریشه های تابع تبدیل حلقه باز با امکان ویرایش و منحنی پاسخ پله تابع تبدیل خروجی به ورودی مرجع بدون امکان ویرایش به صورت شکل ۹-۷۱ نمایش داده می شوند.



شکل ۹-۷۱

با کلیک راست کردن بر روی پنجره گراف مربوط به پاسخ پله تابع تبدیل خروجی به ورودی مرجع، از طریق منوی *characteristics* مشخصات مربوط به پاسخ زمانی یعنی فراجهش، زمان نشست و زمان صعود را برای نمایش بر روی منحنی پاسخ پله انتخاب می کنیم.



شکل ۹-۷۲

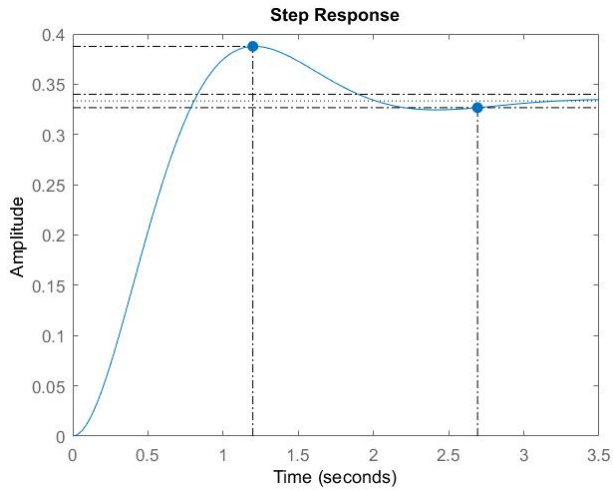
با توجه به اطلاعات نشان دهده شده بر روی پاسخ پله خواهیم داشت:

حداکثر فراجهش: $MP = 60.5\%$

زمان نشست: $t_s = 7.31s$

مشاهده می شود که سیستم حلقه بسته دارای فراجهش بسیار بزرگ و زمان نشست طولانی می باشد. مطابق با خواسته های مثال ۸-۱ انتظار می رود با افزودن یک جبرانساز پیشفاز این سیستم دارای رفتاری مشابه تابع تبدیل حلقه بسته $\frac{3}{s^2+3s+9}$ داشته باشد. به منظور یافتن مشخصات پاسخ زمانی مطلوب ابتدا پاسخ پله سیستم حلقه بسته $\frac{3}{s^2+3s+9}$ را رسم کرده و مشخصات مربوط به آن را استخراج می کنیم:

```
>> num=[3];den=[1 3 9];
>> step(num,den)
```

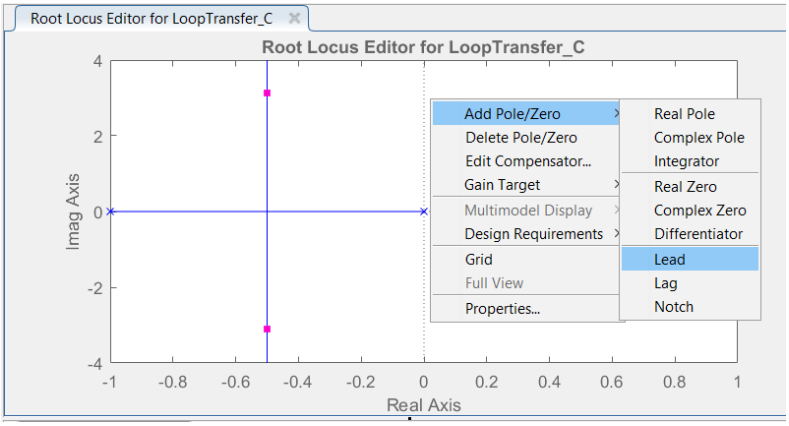


شکل ۹-۷۳

حداکثر فراجهش: $MP = 16.3\%$

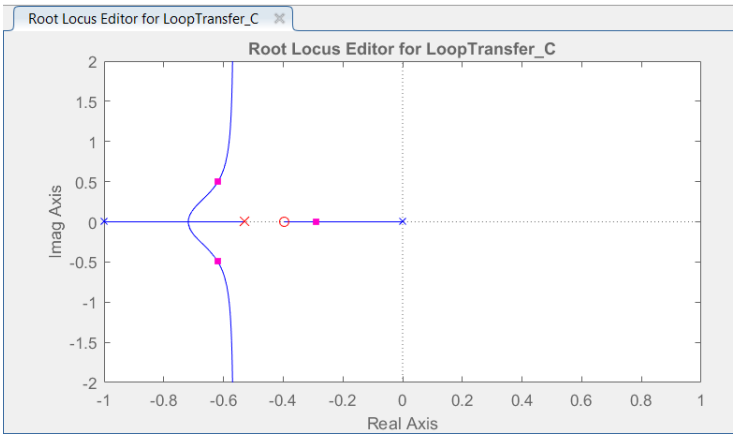
زمان نشست: $t_s = 2.69s$

برای افزودن جبرانساز پیشفاز بر روی پنجره گراف مربوط به نمودار مکان هندسی ریشه ها کلیک راست کرده و از طریق منوی $Add\ Pole/Zero$ بر روی گزینه $Lead$ کلیک می کنیم.



شکل ۹-۷۴

حال با استفاده از نشانگر ماوس می توان محل قرارگیری صفر و قطب جبرانساز را تعیین نمود. پس از افزودن جبرانساز مکان هندسی ریشه ها به صورت شکل زیر تغییر می کند.

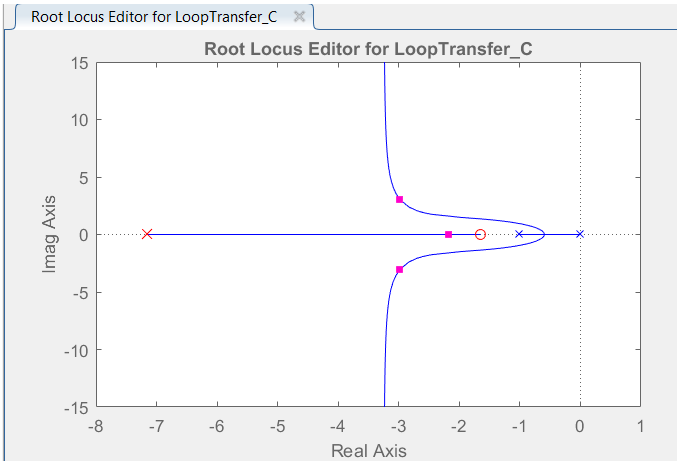


شکل ۹-۷۵

همانگونه که پیش‌تر نیز گفته شد با استفاده از روش های تنظیم گرافیکی اثر هر گونه تغییر در نمودار مکان هندسی، به طور همزمان بر روی نمودار پاسخ پله نمایش داده می شود. بنابراین، برای دستیابی به مشخصات پاسخ زمانی مطلوب یعنی$MP = 16.3\%$ و $t_s = 2.69s$ ، به طور همزمان اثر تغییر مکان صفر و قطب جبرانساز در نمودار مکان هندسی را بر روی نمودار پاسخ پله بررسی کرده تا مشخصات مطلوب حاصل شود. به منظور تغییر هدفمند پارامترها، شناخت رفتار جبرانسازها ضروری است و از این رو مطالعه فصل هشتم توصیه می شود.

مربع های صورتی رنگ که در نمودار مکان هندسی ریشه ها مشاهده می شوند، محل قرارگیری قطب های حلقه بسته را نمایش می دهند که با تغییر آن ها می توان بهره کنترل کننده را تنظیم کرد.

با تغییر مکان هندسی صفر و قطب جبرانساز و همچنین تغییر بهره آن، مکان هندسی ریشه ها به صورت شکل زیر در می آید:



شکل ۹-۷۶